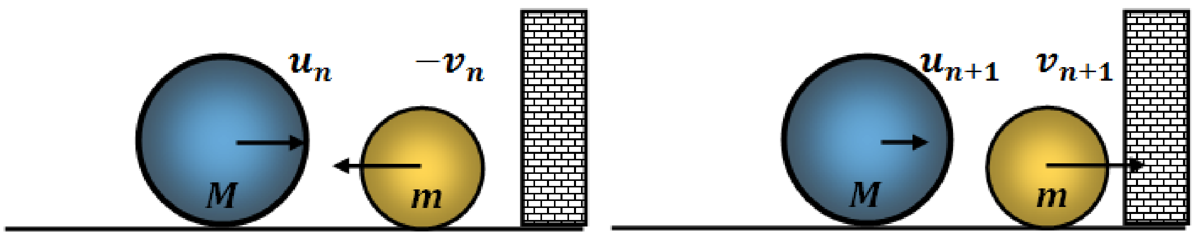
Botsende ballen en pi

Een probleem ontleend aan Ed Copeland, gepubliceerd op Numberphile:
https://www.youtube.com/watch?v=abv4Fz7oNro

Workshop NWD Eindhoven: 1 februari 2019

Opdracht 1: modelleren van de botsingen met een matrixproduct



Gegeven zijn de formules voor het behoud van impuls en het behoud van kinetische energie:

$$\begin{cases} M \cdot u_n - m \cdot v_n = M \cdot u_{n+1} - m \cdot v_{n+1} \\ M \cdot u_n^2 + m \cdot v_n^2 = M \cdot u_{n+1}^2 + m \cdot v_{n+1}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \cdot u_n - v_n = k \cdot u_{n+1} - v_{n+1} \\ k \cdot u_n^2 + v_n^2 = k \cdot u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 \end{cases}.$$

Stel $k = 16$ en bereken u_{n+1} en v_{n+1} in functie van u_n en v_n. Zet deze gevonden formules om in een vergelijking met een matrixvermenigvuldiging.

Opdracht 2: bereken de opeenvolgende snelheden van de twee ballen

Maak gebruik van de overgangsmatrix die je hierboven berekende. Stel de begintoestand van het tweeballensysteem gelijk aan:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en bereken de toestandsvector $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ na 1, 2, 3, … 7 botsingen. Na hoeveel botsingen maakt de zware bal rechtsomkeer? Na hoeveel botsingen haalt de lichte bal de zware niet meer in? Welk verband lijkt er te zijn tussen deze twee kritieke getallen.

Opdracht 3: berekening van opeenvolgende snelheden van twee ballen met andere gewichtsverhouding

Maak gebruik van de algemene overgangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix}$$

om de opeenvolgende snelheden te berekenen van de ballen met een gewichtsverhouding $k = 61$. Kies een begintoestand van het tweeballensysteem gelijk aan:

$$\binom{u_0}{v_0} = \binom{31}{0}.$$

Na hoeveel botsingen maakt de zware bal rechtsomkeer? Na hoeveel botsingen kan de lichte bal de zware niet meer inhalen?

Opdracht 4: eigenwaarden

Bereken de twee complexe eigenwaarden van de algemene overgangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Opdracht 5: eigenvectoren

Bereken de twee complexe eigenvectoren die bij de eigenwaarden van de algemene overgangsmatrix horen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k+1} & \frac{-2}{k+1} \\ \frac{2k}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Opdracht 6: wanneer maakt de zware bal rechtsomkeer?

Maak gebruik van de bewezen formule voor de snelheidstoestand $\binom{u_n}{v_n}$ na n botsingen:

$$\binom{u_n}{v_n} = \begin{pmatrix} cos(n \cdot \theta) \\ \sqrt{k}\, sin(n \cdot \theta) \end{pmatrix} \cdot u_0 \text{ met } cos\,\theta = \tfrac{k-1}{k+1} \text{ en } sin\,\theta = \tfrac{2\sqrt{k}}{k+1}$$

en bereken hieruit na hoeveel botsingen de zware bal rechtsomkeer maakt.

Opdracht 7: verband met het getal π

Maak gebruik van het resultaat van de vorige oefening om het omslagpunt te berekenen van de zware bal voor $k = 16$, $k = 16 \cdot 100$, $k = 16 \cdot 100^2$, $k = 16 \cdot 100^3$, $k = 16 \cdot 100^4$, ... Welk verband lijkt er te zijn met het getal π?

Opdracht 8: het bewijs van dit verband

Toon aan dat voor $k = 16 \cdot 100^q$ er n_r botsingen nodig zijn om zware bal rechtsomkeer te laten maken waarbij n_r het gehele getal is dat bestaat uit de q eerste decimalen van het getal π m.a.w.

$$n_r = \lfloor 10^q \cdot \pi \rfloor.$$

EERSTE DEEL VAN HET BEWIJS

Steun op $cos\,\theta = \frac{k-1}{k+1}$ en vereenvoudig dit verband door de hogeregraadstermen in de reeksontwikkelingen weg te laten vallen.

TWEEDE DEEL VAN HET BEWIJS

Steun op $n \cdot \theta > \frac{\pi}{2}$ en toon aan dat $n_r = \lfloor 10^q \cdot \pi \rfloor$. Maak hierbij gebruik van het eerste deel van het bewijs.

Verdere verdieping

Lees verder hoe je het probleem van de botsende ballen compacter kunt oplossen in een Euclidische ruimte:

https://nl.overleaf.com/articles/the-bouncing-balls-and-pi/gmyrvnkbnzqm

Luc Van den Broeck