



Wiskundige denkactiviteit in drie dimensies

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht



Hogeschool Utrecht

p.drijvers@uu.nl

2018-02-03



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

Conclusie

- Cognitieve psychologie en wiskundedidactiek leveren handvatten rond abstractie en schemavorming voor het leren en onderwijzen van wiskundig **denken**
- Deze handvatten worden niet altijd door wiskundigen herkend, mogelijk omdat ze eerder betrekking hebben op wiskunde **leren** dan op wiskunde **doen**
- Toch bieden ze waardevolle aanknopingspunten voor een **didactiek** van wiskundig denken
- Tegelijkertijd moeten we het verschil tussen leren en doen zo klein mogelijk maken door in de les wiskunde zo veel mogelijk recht te **doen**

Grote lijn

- **Context**
- **Cognitief-psychologische dimensie**
- **Vakdidactische dimensie**
- **Wiskundige dimensie**
- **Conclusie**



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

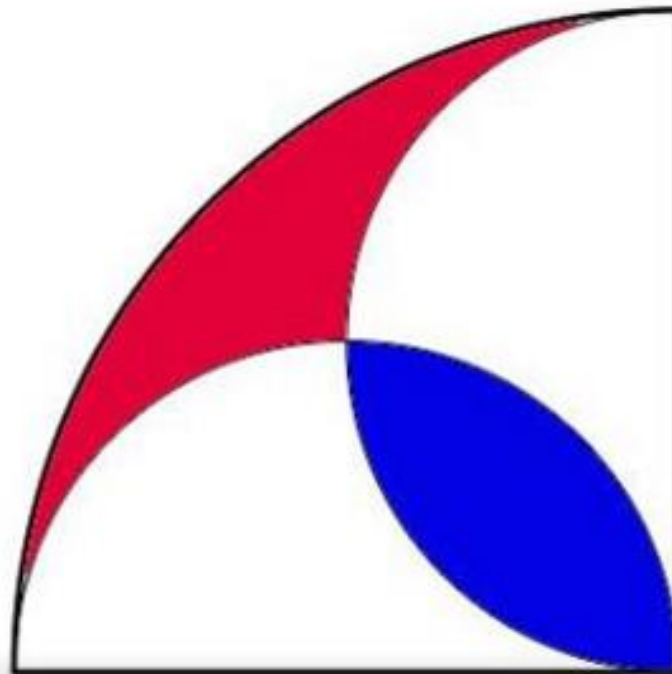
Voorbeeld: Cirkelredenering



Roland Meijerink

15 maart om 3:16

Misschien al eerder (via Twitter) voorbij zien komen: bewijs dat de oppervlakte van het rode deel gelijk aan is dat van het blauwe. #pidag





*Waar denken jullie aan bij
wiskundige denkactiviteit?*

Waarom WDA in NL?

Het idee van WDA is ontstaan in de Vernieuwingscommissie Wiskunde cTWO:

- Omdat wiskunde meer omvat dan procedurele kennis
- Om tegenwicht te bieden aan een te eenzijdige nadruk op 'symbol pushing' in de nieuwe curricula

www.ctwo.nl -> publicaties

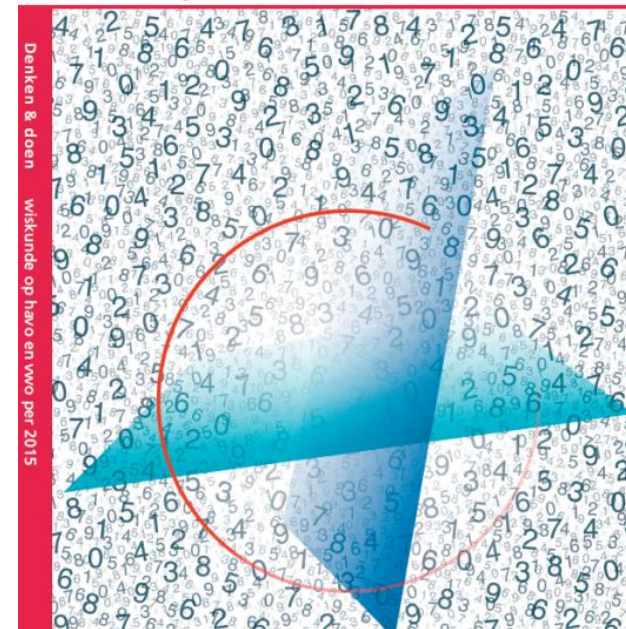


Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

Denken & doen

wiskunde op havo en vwo per 2015

Vernieuwingscommissie wiskunde cTWO



cTWO over WDA:



Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

www.ctwo.nl

4

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.

VS: CCSS for mathematical practice

1. Make sense of problems and persevere in solving them
2. Reason abstractly and quantitatively
3. Construct viable arguments and critique the reasoning of others
4. Model with mathematics
5. Use appropriate tools strategically
6. Attend to precision
7. Look for and make use of structure
8. Look for and express regularity in repeated reasoning

(<http://www.corestandards.org/Math/Practice>)



Beperkter model:



http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf

Implementatie in NL

- Syllabi, SLO publicaties
- Schoolboeken
- Nascholing (Leraar24)
- Examens:

ONDERZOEK

Wiskundige DenkActiviteiten in Praktijk

NRC | Gepubliceerd op 27 oktober 2015 **vo**

12 Wiskundig denken - trailer

In Gesprek
Voor vragen over dit onderzoek kunt u contact opnemen met [Paul Dekkers](#), hoogleraar in de didactiek van de wiskunde.
[Profielpagina Drijvers UU](#)

Nog vragen?
Leraar24, het LerarenOntwikkelFonds en de Kennisatolande helpen je graag.
[Stel je vraag!](#)

Leerlingen die wiskundig leren denken, leren een vaardigheid waarvan ze hun hele leven plezier hebben. In het dagelijks leven is logisch denken of het oplossen van problemen zeer nuttig. Maar hoe leer je leerlingen wiskundig denken? Wat kun je doen als docent? Welke opgaven zijn geschikt? Dit artikel richt zich op deze vragen.

Wat weten we?
Wiskundig denken is niets nieuws, maar het staat weer volop in de belangstelling. Dit komt door de invoering van de nieuwe examenprogramma's in 2015. Er leven bij docenten vaak vragen rondom denkactiverende wiskundelessen. Welke opgaven kun je aanbieden? Wat kan je als docent doen om leerlingen aan het denken te zetten?

Over deze vragen is nagedacht binnen het onderzoek 'Wiskundige denkactiviteit in praktijk'. Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door het Nationaal Regioorgaan Onderwijsonderzoek (NRO). Het is uitgevoerd door een zestal docenten in samenwerking met het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en het Cito.

Binnen het onderzoek is gekeken naar een koppeling tussen de bestaande theorie en praktijk. De theorie over wiskundig denken en aspecten daarvan (probleemoplossen, abstraheren en modelleren) is bestudeerd om daaruit ideeën voor de praktijk te halen. Met deze tips en ideeën zijn de docenten aan de slag gegaan en hebben ze ontdekt wat goed en minder goed werkt.

Percentage vragen die een beroep doen op wiskundig denken

Jaar	Havo regulier	Havo pilot	Vwo regulier	Vwo pilot
2011	16%	42%	---	---
2012	5%	26%	41%	60%
2013	5%	24%	33%	53%
2014	11%	32%	22%	50%
2015	21%	38%	35%	38%
2016	10%	22%	35%	38%
2017	22%		29%	27%
Gemiddeld	11%	31%	33%	44%



Maar wat houdt WDA nu echt in ? Wat kunnen we daarover leren vanuit de perspectieven van cognitieve psychologie, wiskundedidactiek en wiskunde zelf?

Grote lijn

- ✓ **Context**
 - **Cognitief-psychologische dimensie**
 - **Vakdidactische dimensie**
 - **Wiskundige dimensie**
 - **Conclusie**



Universiteit Utrecht

[Faculteit **Bètawetenschappen**

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

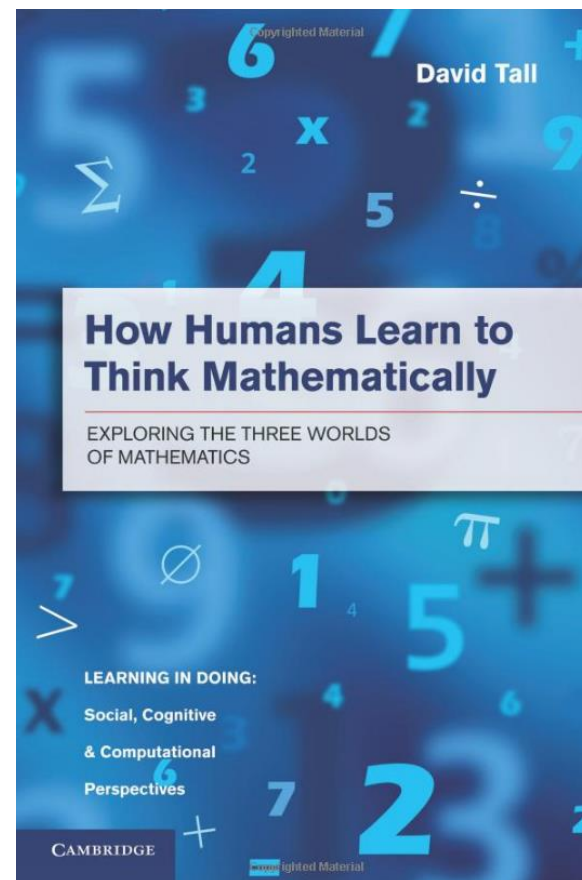
Twee kernbegrippen..

... voor het onderbouwen van de theorie over wiskundig denken vanuit cognitief-psychologisch perspectief:

1. Abstractie
2. Schema

Abstractie

- “The greatest barrier to doing mathematics” (Devlin, 2000, p.11)
- “Abstracting is an activity by which we become aware of similarities ... among our experiences.” (Skemp, 1986, p. 21)
- “Abstraction is the isolation of specific attributes of a concept so that they can be considered separately from the other attributes” (Tall, 1988, p. 2).



Abstractie volgens Piaget (1936)

- *Empirische abstractie*, gebaseerd op concrete ervaringen met eigenschappen van een object
- *Pseudo-empirische abstractie*, gebaseerd op acties op objecten
- *Reflectieve abstractie*: mentaal, intern, los van concrete objecten en ervaringen

Reflectieve abstractie

Piaget / Dubinsky

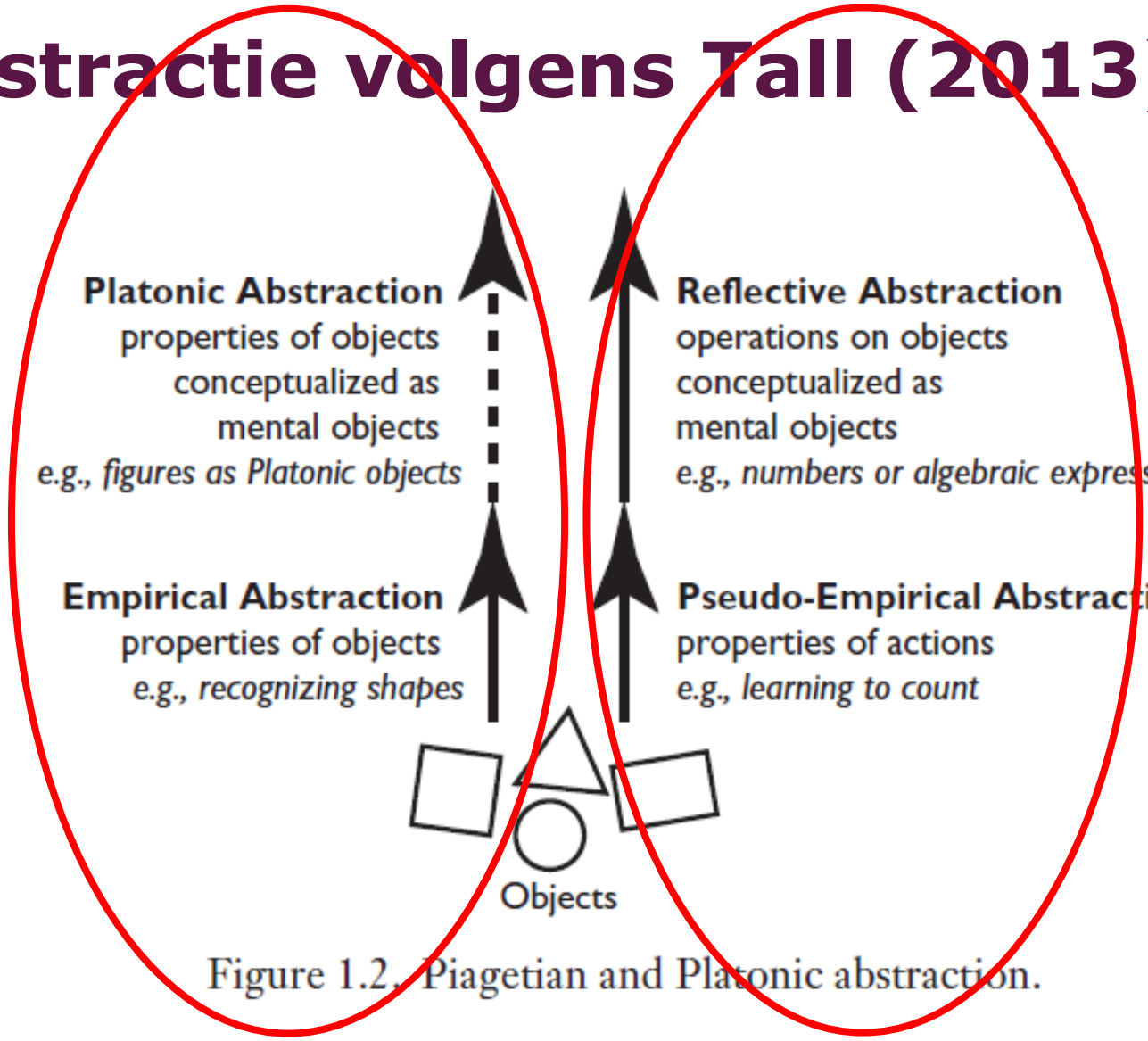
- Interiorisatie
- Coördinatie
- Encapsulation
- Generalization
- Reversing

Cifarelli 1988

- Recognition
- Re-presentation
- Structural abstraction
- Structural awareness

Abstractie volgens Tall (2013)

structural,
“sensi-”



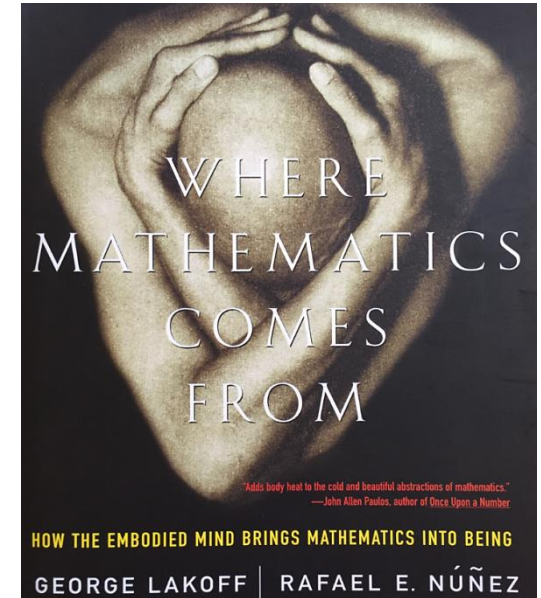
operational,
“-motor”

Figure 1.2. Piagetian and Platonic abstraction.

Abstractie gebaseerd op sensori-motor ervaringen

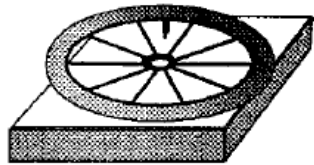
Lakoff & Nunez (2000, p. 5):

- For the most part, human beings conceptualize abstract concepts in concrete terms, using ideas and modes of reasoning **grounded in the sensory-motor system**.
- “Embodied cognition”

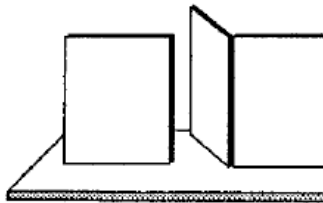


Abstractie: \

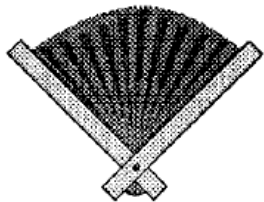
■ Hoekbegrip (Mitchel)



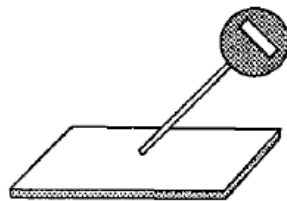
Wheel



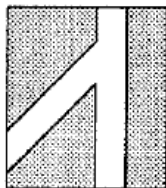
Door



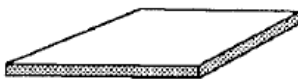
Fan



Signpost



Junction



Tile

Figure 1. Models used to represent the nine p

Task 1: Global angle representation. The interviewer laid the flexible drinking straw on the table in front of the student, showed how it bent, and asked the student to demonstrate how it could be used to represent the general situation in the given model. For example, the student was asked how the straw could be used to show “how the wheel turns” or “how the hill slopes”.

Task 2: Size matching (recognition). The interviewer bent the two parts of the flexible drinking straw together, laid the straw on the table in front of the student, opened it through an angle of about 45° , and then replaced it by the fixed straw. The student was then asked to demonstrate the same angle on the physical model. For example, the student was asked to “open the door by that amount” or to “point to the tile whose corner is like that”.

Task 3: Angle matching (recognition). The student was asked to place the 45° bent straw on the physical model to explain how he or she had solved the previous task.

Task 4: Global angular similarity. The interviewer asked if the student could see “anything the same” about the two situations. Neutral prompts such as “Anything else?” were given until the student reported no further similarities.

Task 5: Size matching (similarity). The interviewer set one situation to show an angle of 45° by moving a movable model or selecting a fixed model. She then asked the student to set the other situation to “show the same as this”.

Task 6: Angle matching (similarity). The student was asked to use the flexible straw to explain how he or she knew the two settings were the same.

Figure 2. Interview tasks.

Cognitief schema (1)

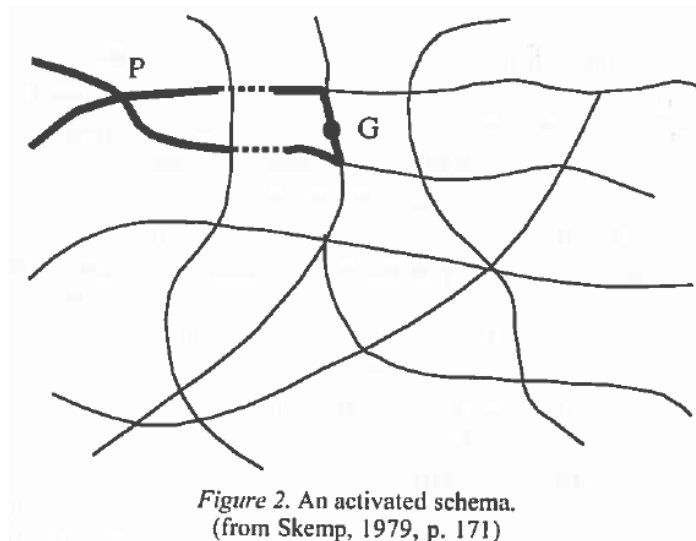
- Piaget (1952, p. 7):
Een samenhangende, herhaalbare reeks van acties met deelacties die nauw met elkaar zijn verbonden en worden beheerst door een kernbetekenis.
- Piaget (1980, p.24): All action that is repeatable or generalized through application to new objects engenders by this very fact a 'scheme'.
- Cognitieve structuur om kennis te organiseren in “eenheden” van objecten, acties en abstracte concepten
- Schemaontwikkeling:
 - assimilatie
 - accommodatie

Cognitief schema (2)

- Vergnaud (2007, p. 17):
Een schema is een invariante vorm van organisatie van een activiteit en het gedrag voor een bepaalde klasse van situaties.
- A schema is a coherent collection of actions, processes, objects and other schemas that are linked in some way and brought to bear on a problem situation.
(Cottrill et al., 1996, p. 172)

Cognitief schema (3)

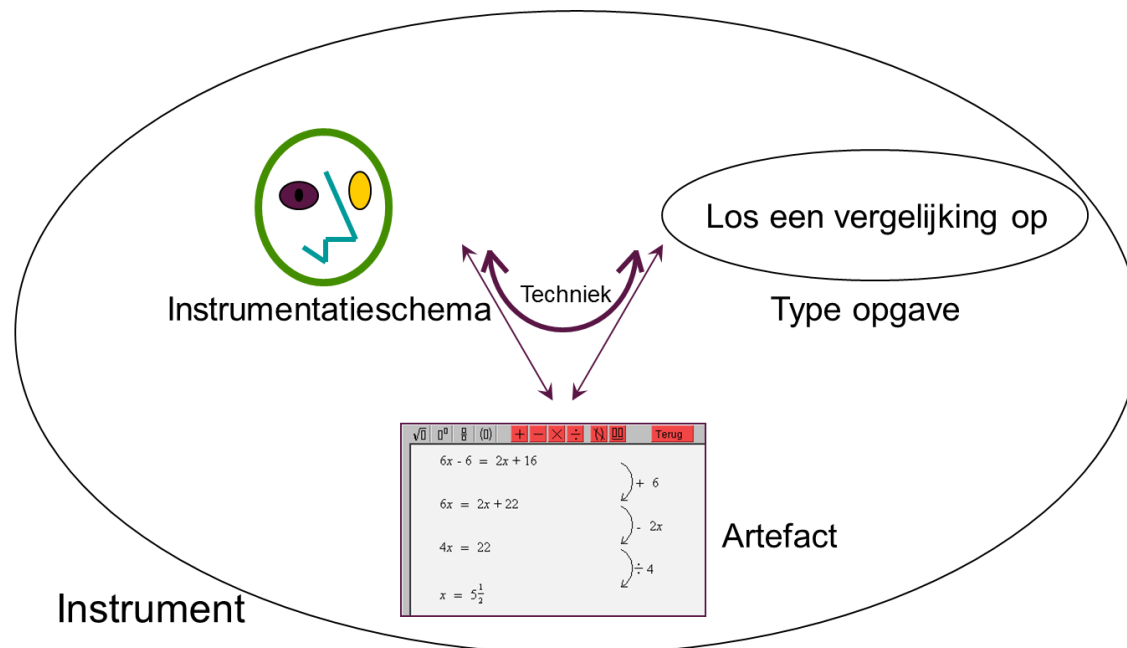
- Skemp (1979), van Streun (2012):



- Davis & Tall (2002) “stapelen” schema’s:
 - 0-de orde schema of actie schema: sequentie van acties om een doel te bereiken
 - n -de orde schema: een categorisering van lagere orde schema’s

Cognitief schema (4)

- Instrumentatieschema:
Een coherent en betekenisvol mentaal schema voor het gebruik van (technologisch) gereedschap om een specifiek soort problemen op te lossen.



Drijvers, 2003

Cognitief schema: voorbeeld

Schema's voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen:

1. Elementair “*abc*-schema”:

- Herken kwadratische vergelijking
- Herken daarin de waarden van a , b en c
- Substitueer in de *abc*-formule

2. Iets rijker “*abc*-schema”:

Als 1. maar uitgebreid met inzichten zoals:

- is ook toepasbaar bij vergelijkingen zoals $x^2 + 2x + a = 0$ of $p^2 + 2p + 1 = 0$
- is niet toepasbaar op vergelijkingen zoals $5^2x - 25 = 0$

Cognitief schema: voorbeeld

Schema's voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen:

3. Nog rijker “*abc*-schema”:

Als 2. maar uitgebreid met zaken als:

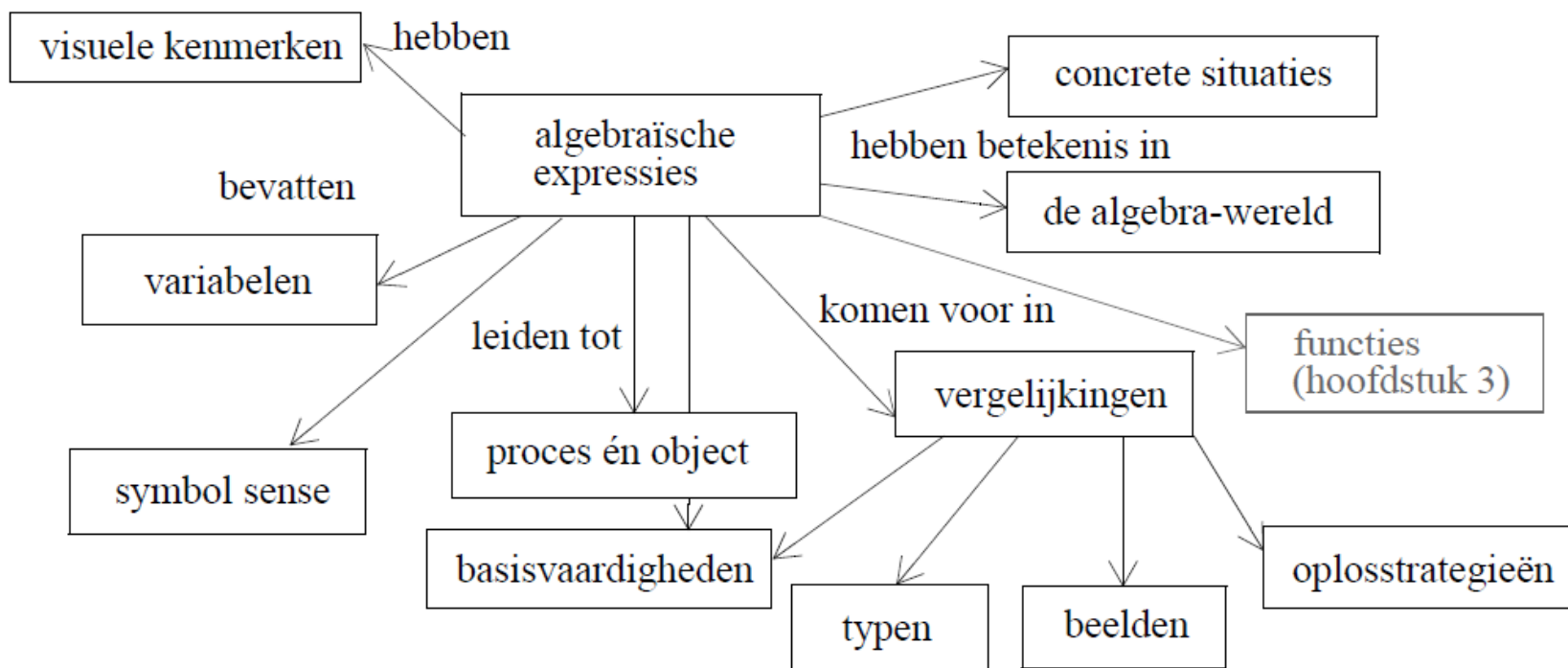
- Voor $x^2 = 9$ is de *abc*-formule overkill
- Vormen als $(x - p)(x - q) = 0$ en $(x - a)^2 + b = c$ bieden ook voordelen

2. Instrumentatieschema:

- Zien dat je de oplossingen van $x^2 + 7x = 3x - 5$ kunt vinden door de grafieken van linker- en rechterlid met elkaar te snijden
- Linker- en rechterlid invoeren in ICT omgeving
- Daarbinnen intersect procedure toepassen
- Antwoord terugvertalen naar de vergelijking

Schema en abstractie

- Gemeenschappelijk element: op een hoger niveau schema's ontwikkelen door de vorming van abstracte concepten



Drijvers & Kop 2012, p. 81

Grote lijn

- ✓ **Context**
- ✓ **Cognitief-psychologische dimensie**
 - **Vakdidactische dimensie**
 - **Wiskundige dimensie**
 - **Conclusie**



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

De roaring 90s!

Toepassingen van de cognitieve psychologie in wiskundededidactiek:

- Sfard 1991
- Gray & Tall 1994
- Cottrill et al. 1996
- Treffers 1987 / Gravemeijer 1994



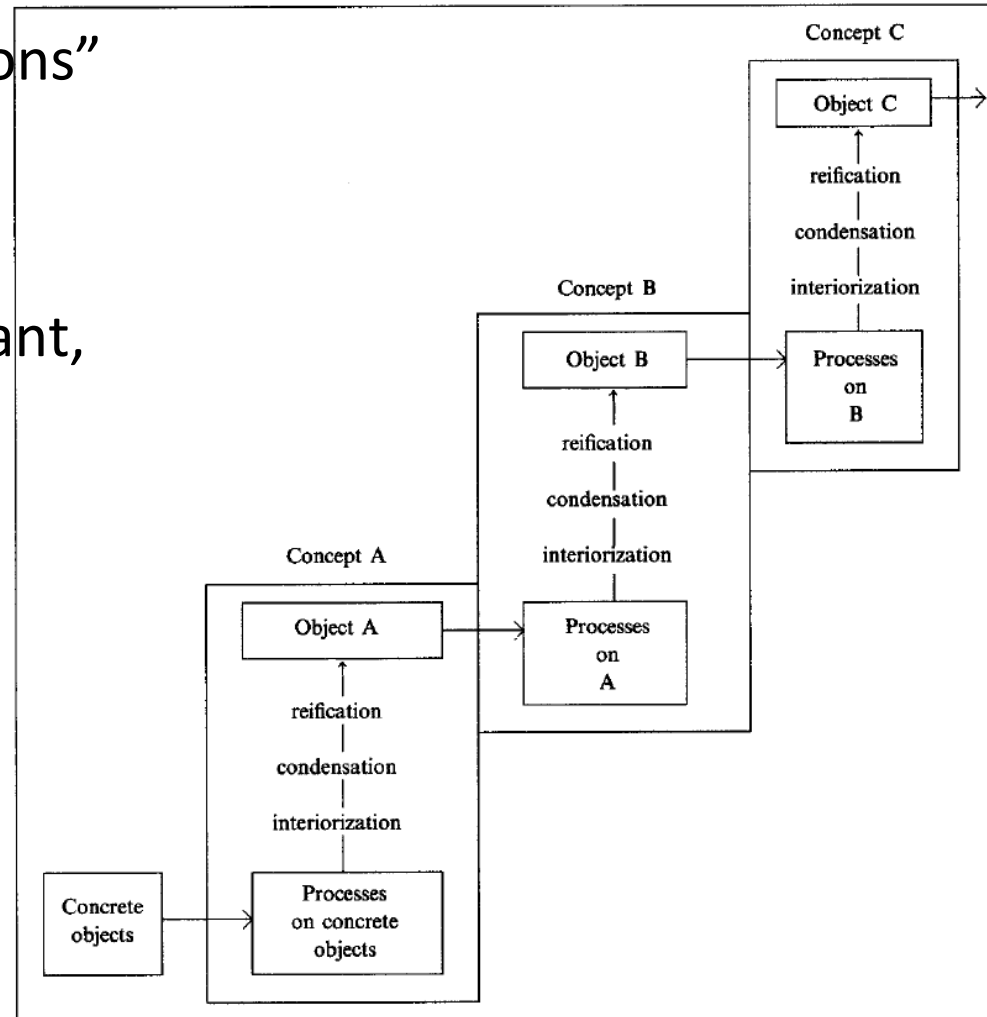
Sfard 1991: "On the dual nature..."

... of mathematical conceptions"

Concepten hebben een
een proces- en een object-kant,
operationeel en structureel

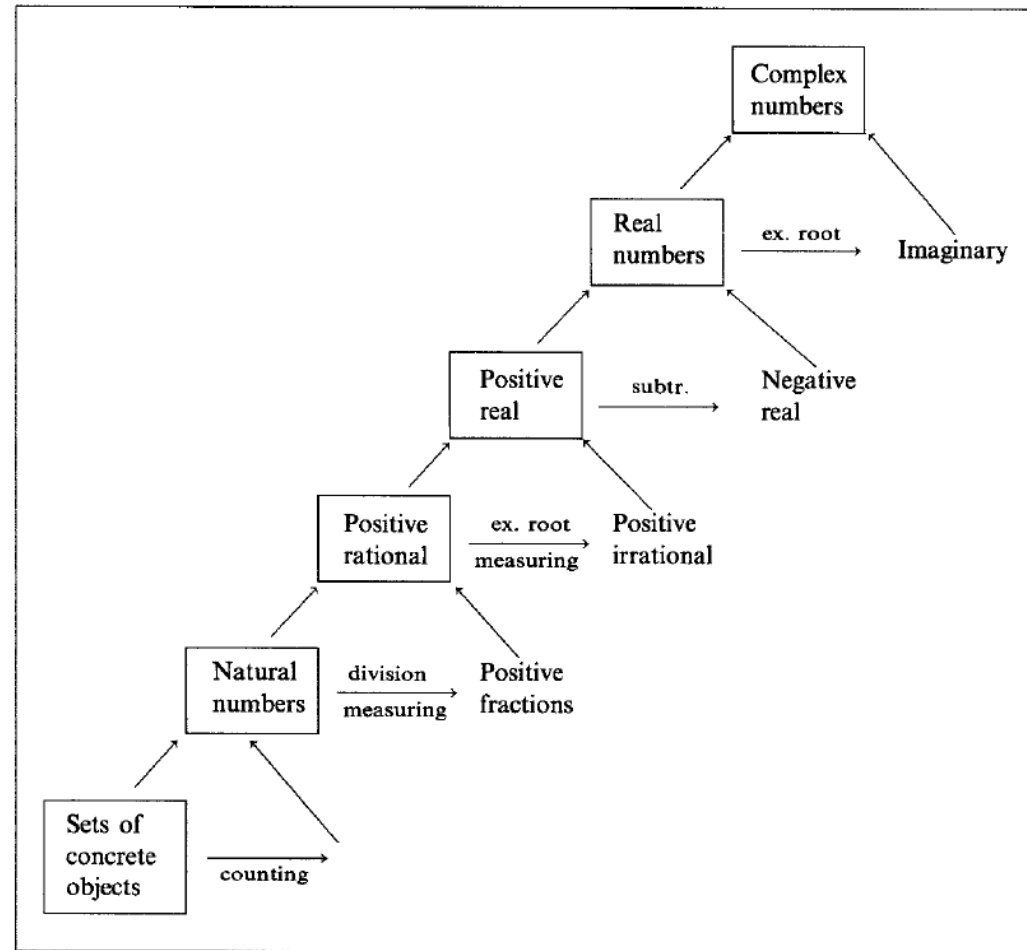
Conceptontwikkeling:

- Interiorizatie
- Condensatie
- Reificatie



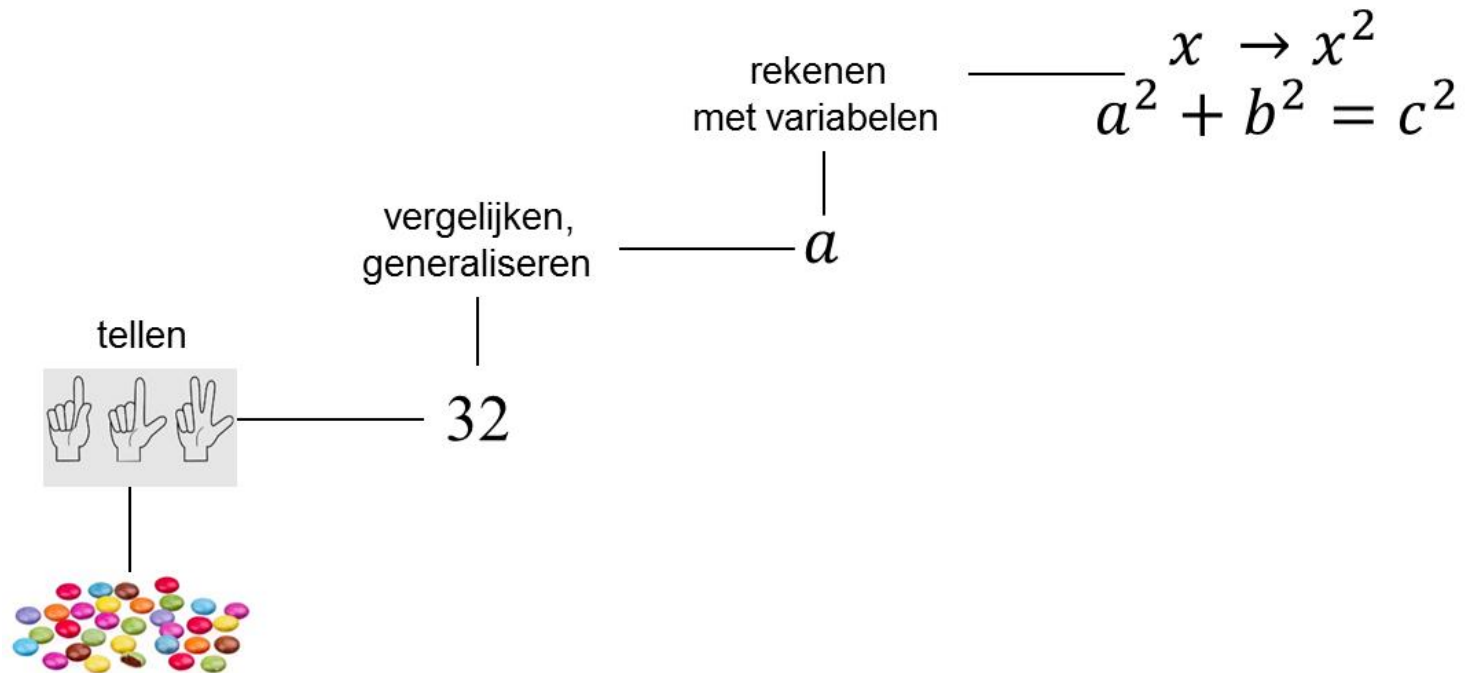
Reificatie

- “Verdinglijking”, objectvorming
- Processen worden omgezet in compacte gehelen



Objectvorming

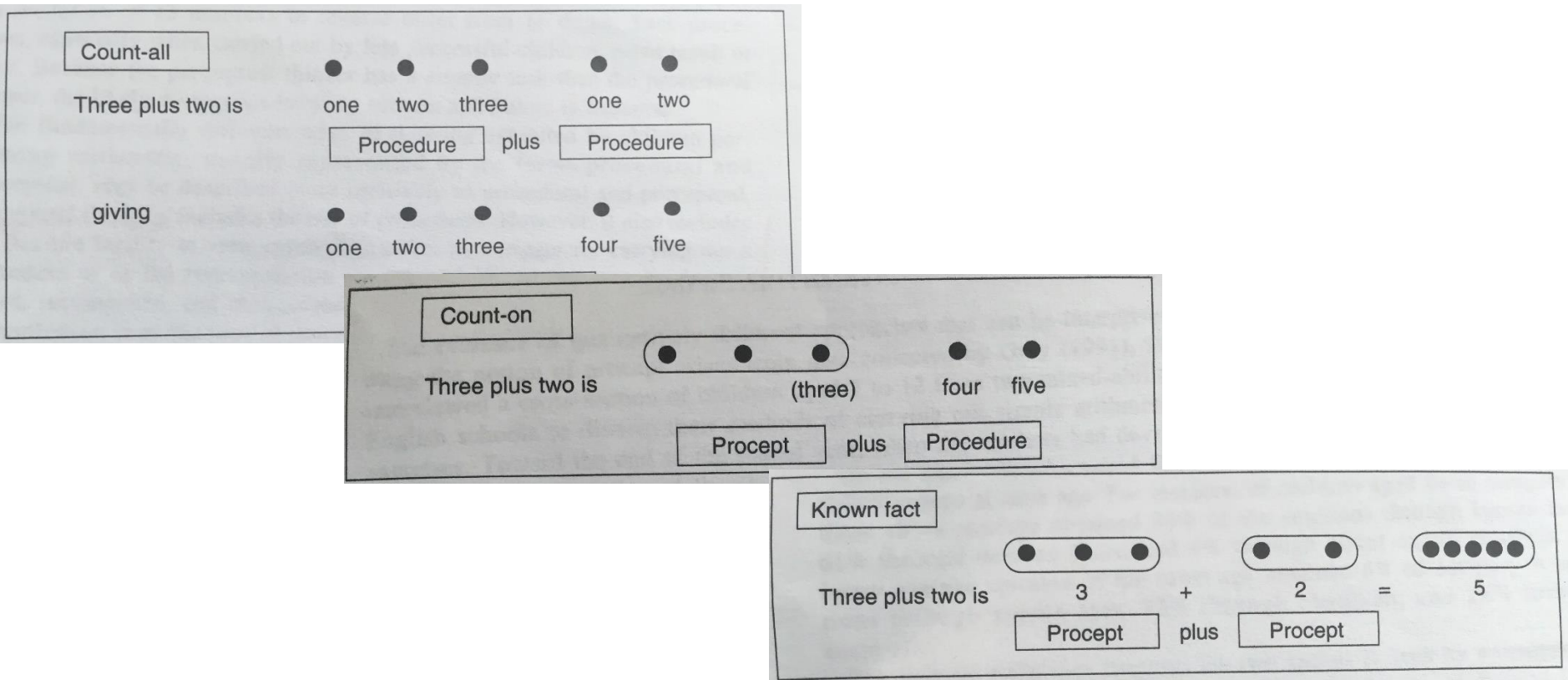
- Objectvorming onder invloed van hogere orde processen
- In het leren gaat “vaak” het operationele vooraf aan het structurele, het proces aan het object



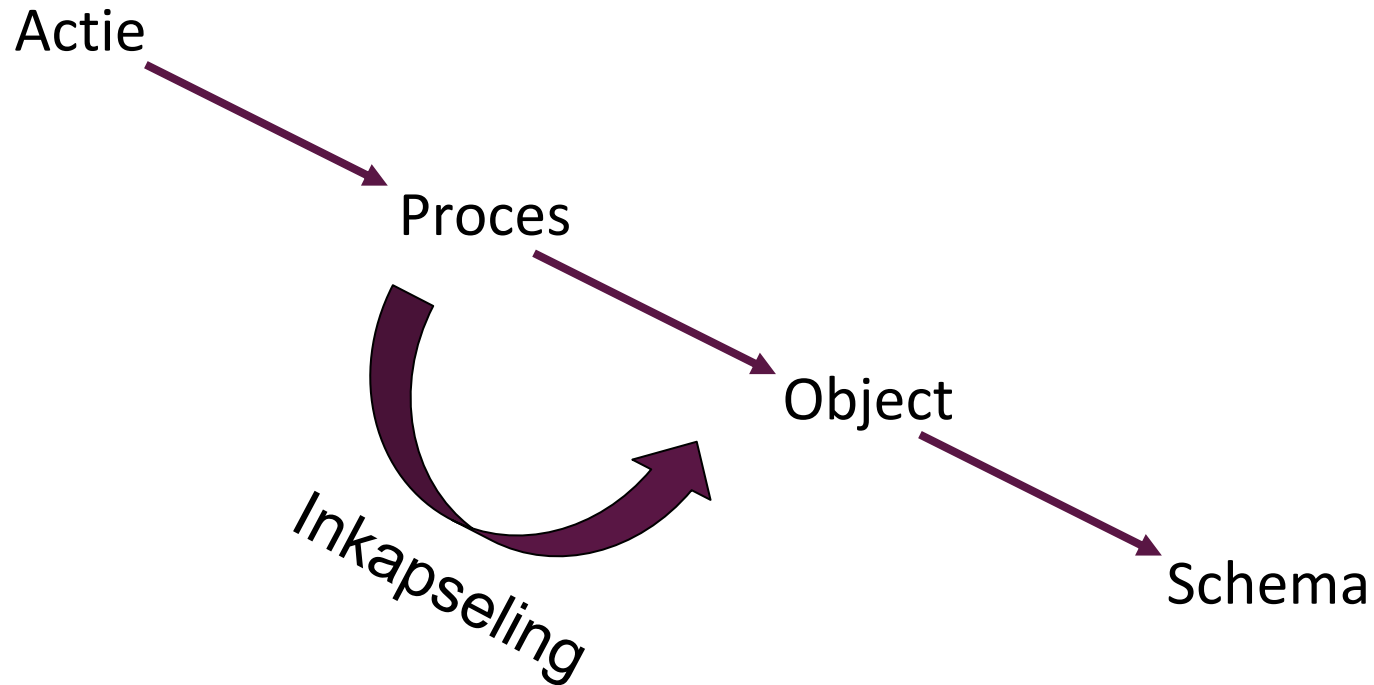
Gray & Tall 1994: procept

Door mentale compressie ontstaat een:

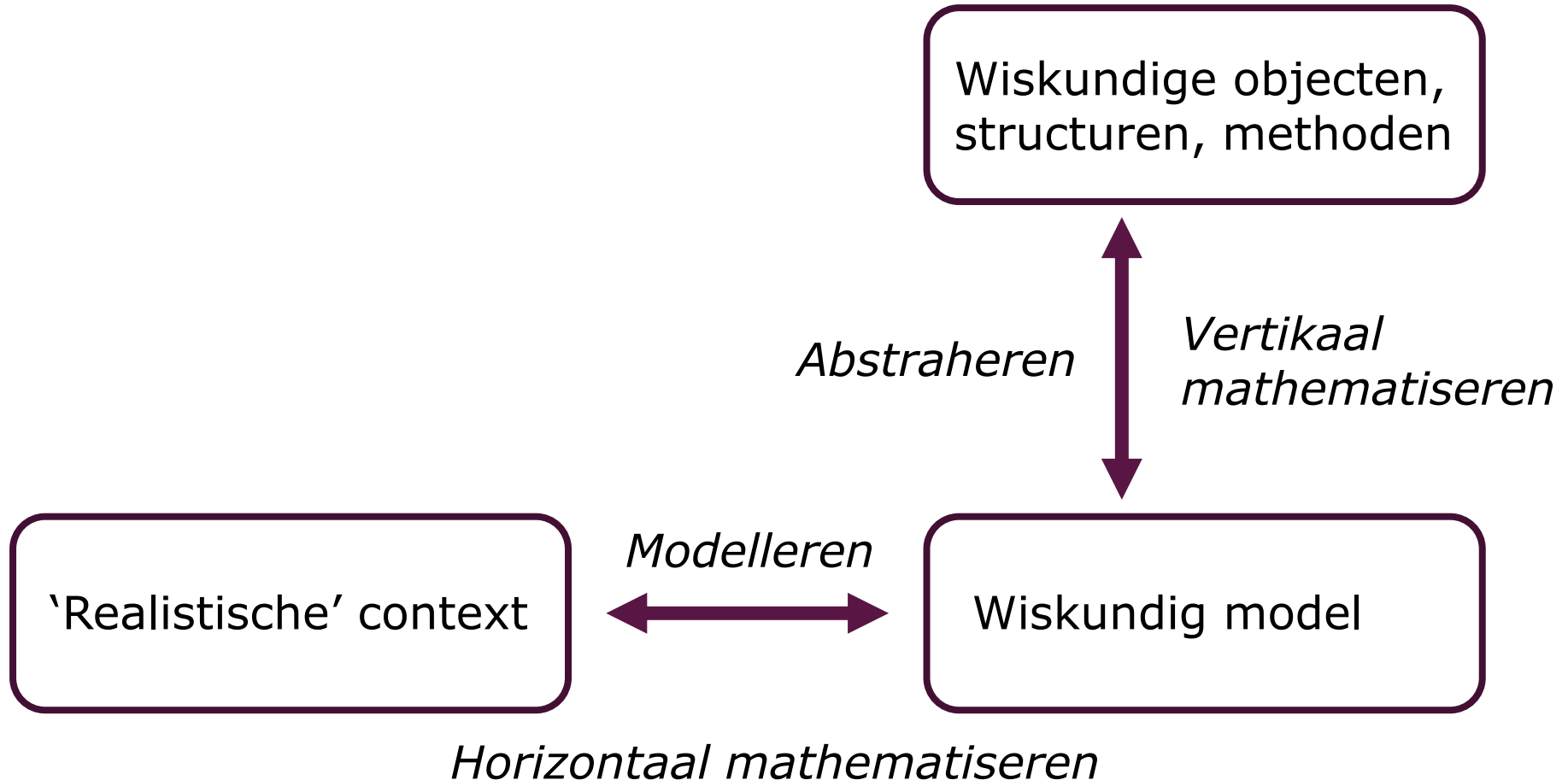
- Procept = process + object (+ symbol)



Cottrill et al. 1996: APOS theory



Mathematiseren



Treffers 1987; Drijvers 2003

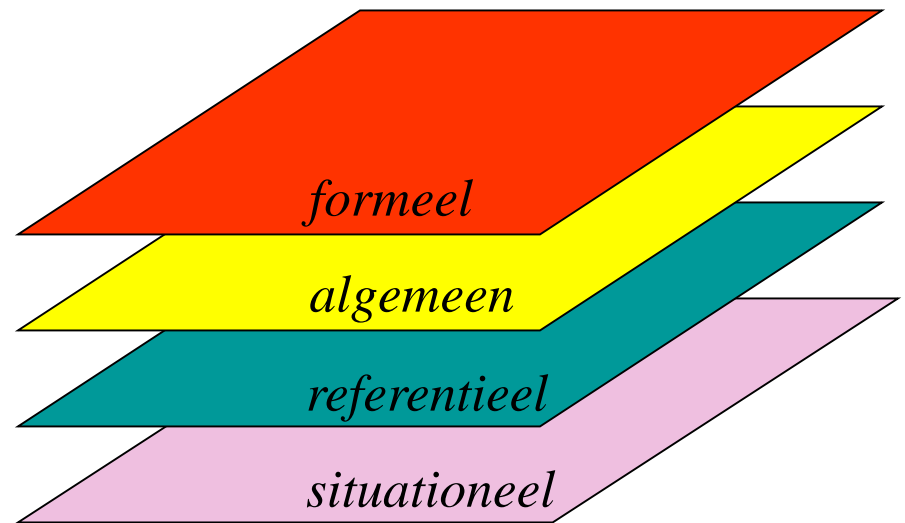
Emergent modelleren

Model *van* een situatie



Model *voor* een manier van redeneren / werken bij een categorie van problemen

(Gravemeijer 1994)



Grote lijn

- ✓ **Context**
- ✓ **Cognitief-psychologische dimensie**
- ✓ **Vakdidactische dimensie**
- **Wiskundige dimensie**
- **Conclusie**



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

Wat is wiskunde?

- Devlin (2000, p. 74):
Mathematics is the science of order, patterns, structure, and logical relationships
- [...] Mathematics offers distinctive modes of thought which are both versatile and powerful, including modeling, abstraction, optimization, logical analysis, inference from data, and use of symbols
(NRC, 1989, p. 31).

Wat is wiskundig denken?

- Mathematical thinking is a whole way of looking at things, of stripping them down to their numerical, structural, or logical essentials, and of analyzing the underlying patterns (Devlin, 2011, p. 59).

The screenshot displays a Coursera video player interface. The main video area shows a man speaking, with the text "It's about thinking, not learning new math techniques." overlaid. The video title is "Lecture 0 - Welcome (8:41)" and the course is "Introduction to Mathematical Thinking" by Dr. Keith Devlin. The interface includes a sidebar with course navigation, a video control bar at the bottom, and a search bar. The video player also shows a progress bar and a "Help Center" link.

Drie wiskundigen over....

Drie wiskundigen over....

... wiskunde doen:

*Je bent iets tegengekomen waarvan je iets meer wilt weten, of waarvan je zegt dat is helemaal niet waar, en dan probeer je in beide gevallen preciezer te zeggen waar het aan schort, waar zit het hem nu in waarover ik me verbaas, wat is het precies wat die persoon zegt, je begint dikwijls met niet te begrijpen wat er staat. ... dan probeer je dat **uit elkaar te rafelen** in wat kleinere dingen: wat kan ik er nu wél van zeggen? Sluit het aan bij voorbeelden en tegenvoorbeelden, wat moet je je bij die situatie eigenlijk voorstellen? En dan zie je dus geleidelijk aan dat sommige dingen waar zijn en andere dingen niet waar.*

Drie wiskundigen over....

... wiskunde doen:

*Ik ben een artikel tegengekomen waarin ik een verrassend fenomeen tegenkwam. Ik zag dat er een verband was met een probleem waar ik zelf mee bezig was. Op een gegeven moment ben ik tot een ander **idee** gekomen, dat nog wiskundiger was, en een idee van hoe ik dat zou kunnen gaan **bewijzen**. Ik heb dat proberen te bewijzen op basis van wat aannames. Dat bewijs klopte uiteindelijk wel maar het bleek dat ik intussen afgedwaald was van het probleem. Ik had wel een heel goed bewijs voor iets dat nutteloos was.*

Drie wiskundigen over....

... het WDA-lijstje van cTWO:

*In mijn waarneming zouden dit een soort wolkjes zijn, die naast elkaar staan en allemaal een beetje met elkaar **verbonden** zijn.*

Ik ben het met heel veel eens. Absoluut heel belangrijk. Formules manipuleren, dat is de manier waarop je een deel van de rest gaat leren. Abstraheren ook heel belangrijk. Ik vind het er allemaal bij horen.

cTWO over WDA:



Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

www.ctwo.nl

4

Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze

Drie wiskundigen over....

... het WDA-lijstje van cTWO:

*Ook in de zuivere wiskunde **modelleer** je heel vaak, omdat je een soort van abstracte situatie hebt die te moeilijk is. Dan laat je data weg en dan kijk je wat er dan gebeurt. En heb ik nu de belangrijke data weggelaten of niet, en wat gebeurt er in een eenvoudiger geval.*

***Modelleren** is niet inherent aan de wiskunde, inherent aan het contact tussen wiskundigen en de rest van de wereld.*

cTWO over WDA:



Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO

www.ctwo.nl

4

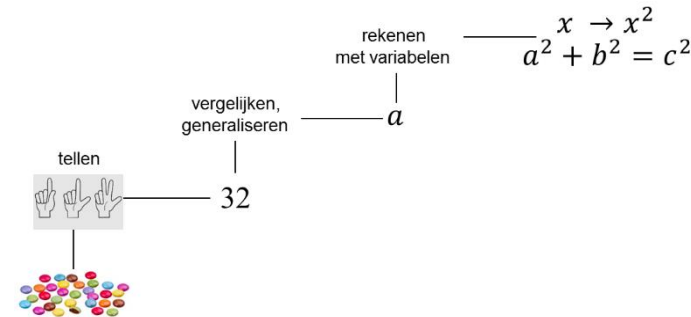
Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze

Drie wiskundigen over....

... de objectvorming volgens Sfard en anderen:

*Naarmate je verder in het probleem verward raakt, laat je die voorbeelden wel los, vervangen worden door voorbeelden op een **ander niveau** waarvan je je niet zo expliciet bewust bent.*

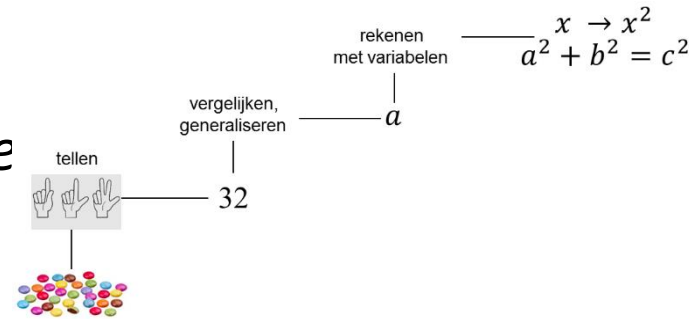


*Ik denk dat het uiteindelijk **maar één keer** kan, niet dat je daar een ketting van kunt maken. Het is niet zo dat een wiskundige dat de hele tijd doet, die beweegt zich op een bepaald niveau. En die gaat niet uit dat niveau een volgend niveau maken, in het algemeen.*

Drie wiskundigen over....

... de objectvorming volgens Sfard en anderen:

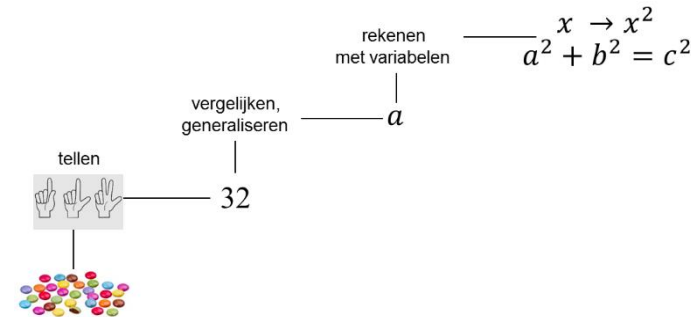
*Het haakt wel aan bij de **ontwikkeling** die ik zie **bij mijn kinderen**, dit vind ik wel heel natuurlijk. Je ziet dat dit inderdaad die stappen zijn, op een bepaalde leeftijd is het gewoon niet mogelijk om zo'n stap te maken, op een gegeven moment ga je dit zelf heel natuurlijk vinden, maar voor een kind in een bepaalde ontwikkelingsfase gaat het gewoon niet. Dus in die zin herken ik het wel. Het is in mijn eigen werk wel zo als ik iets nieuws doe, dan begin ik meestal met voorbeelden.*



Drie wiskundigen over....

... de objectvorming volgens Sfard en anderen:

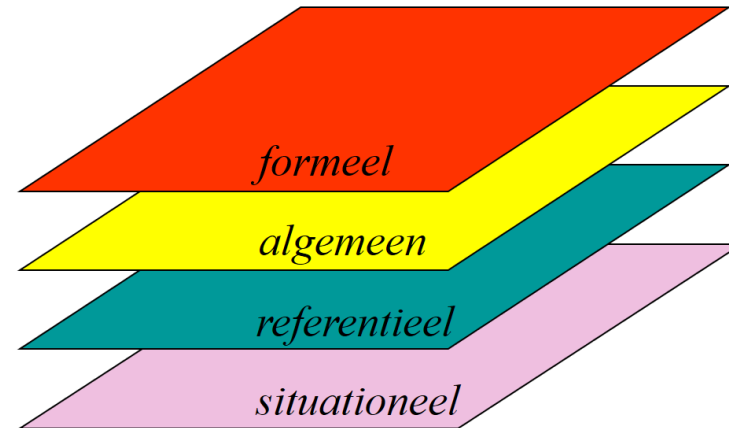
*Op een bepaald moment heb je de theorie geïntenaliseerd als een soort black box, en dan kan je het in allerlei analoge situaties gebruiken. En als je dat dan tien keer herhaalt, dat soort processen, dat is een soort van **verdichting**. Ik denk dat het één lijn beschrijft, dat is de lijn om tot een definitie te komen. Ik vind dat er in dit model van wiskunde doen zijn heel veel activiteiten die ontbreken, heel veel **loops** die intussen plaatsvinden.*



Drie wiskundigen over....

... abstractie en mathematiseren:

*Ik heb zo'n soort gevoel daarbij, er moet een soort principiële mogelijkheid zijn om het weer **uit te pakken**. Er zit een soort van spiraalbeweging in waarin dit 10 of 100 keer herhaald is en wat ooit formeel was is soms de heel erg concrete **context voor de volgende stap**. Je hebt de box gemaakt, en dat wordt de nieuwe context.*



Drie wiskundigen over....

... wiskundeonderwijs in het VO:

Besteed (meer?) aandacht aan

- bewijzen, voor zeker weten, voor waarheid
- notatie, definitie, precisie
- herhalen / oefenen, want daarop moet de ervaring en intuïtie gefundeerd zijn
- wat een goed probleem is, voor wat de goede vraag is
- waar wiskunde goed voor is

En dit alles wellicht ten koste van het aantal onderwerpen dat aan de orde komt. Liever diep dan breed.

Grote lijn

- ✓ **Context**
- ✓ **Cognitief-psychologische dimensie**
- ✓ **Vakdidactische dimensie**
- ✓ **Wiskundige dimensie**
- **Conclusie**



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

Conclusie

- Cognitieve psychologie en wiskundedidactiek leveren handvatten rond abstractie en schemavorming voor het leren en onderwijzen van wiskundig **denken**
- Deze handvatten worden niet altijd door wiskundigen herkend, mogelijk omdat ze eerder betrekking hebben op wiskunde **leren** dan op wiskunde **doen**
- Toch bieden ze waardevolle aanknopingspunten voor een **didactiek** van wiskundig denken
- Tegelijkertijd moeten we het verschil tussen leren en doen zo klein mogelijk maken door in de les wiskunde zo veel mogelijk recht te **doen**



Dank voor jullie aandacht!

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht

 Hogeschool Utrecht

p.drijvers@uu.nl
2018-02-03



Universiteit Utrecht

[Faculteit **Bè**tawetenschappen

FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]