# Economische contexten in wiskundelessen

Johan Deprez

Ann Laeremans

Ann Maes

## Inhoud



## 1. Inleiding

Wiskunde wordt in allerlei andere disciplines gebruikt. Het is dan ook geen toeval dat we al geregeld een loep geschreven hebben waarin we specifiek inzoomen op verbanden tussen wiskunde en een andere discipline: wiskunde en fysica, wiskunde en biologie, wiskunde en aardrijkskunde… Ook wiskunde en economie is al eerder aan de beurt gekomen. In Deprez & Willems (1993) namen we twee economisch getinte toepassingen van wiskunde onder de loep: we werkten leerlingenteksten uit over een toepassing op matrices (Leontiefmatrices) en over een toepassing op afgeleiden (elasticiteit). Je vindt het artikel integraal op onze website (kies nummer 9/3 bij 'Uitwiskeling digitaal'). Wat we toen uitgewerkt hebben, is nu nog altijd even bruikbaar. Wat we toen in de inleiding schreven, blijft echter ook nog actueel: economische toepassingen zijn nog niet zo sterk doorgedrongen in wiskundelessen. Daarom vonden we het opportuun om opnieuw aandacht te schenken aan de band tussen wiskunde en economie.

Een van de hinderpalen bij het integreren van toepassingen uit andere disciplines in wiskundelessen is dat wiskundeleraren niet noodzakelijk een goede achtergrond hebben in die andere disciplines. Daarom proberen we in deze loep voldoende economische achtergrond mee te geven van de toepassingen die we behandelen. De drie auteurs van deze loep, één redactielid en gastauteurs Ann Laeremans en Ann Maes, hebben een lange ervaring als wiskundedocent in de opleiding Handelswetenschappen van de KU Leuven Campus Brussel (vroeger EHSAL en HUBrussel). Ze hebben zich steeds ingespannen om economische toepassingen in wiskundelessen te integreren en zijn vertrouwd met de economische achtergrond.

Heel wat leerlingen in het secundair onderwijs, zowel in aso als in tso, volgen een economisch getinte studierichting: economie-wiskunde, economie-moderne talen, handel, boekhouden-informatica… Het is zeker goed om bij deze leerlingen nu en dan economische toepassingen in de wiskundeles te behandelen. Dat is nog nadrukkelijker het geval als ze van plan zijn om in het hoger onderwijs verder te gaan met een economische opleiding. Daar zal wiskunde immers vaak nog een belangrijke rol spelen, ook in de economische opleidingsonderdelen. Maar los daarvan, en ook in studierichtingen die niet economisch zijn, kun je leerlingen boeien met economische toepassingen.

We hebben geprobeerd om in deze loep kleinere toepassingen uit te werken, die dicht aansluiten bij het leerplan wiskunde en die je daardoor gemakkelijk in de les kunt integreren. Dat is zeker het geval voor wat we in paragrafen 2, 3 en 4 uitwerken. De toepassing in paragraaf 5 is toch wat langer uitgevallen, maar je kunt ze gemakkelijk in twee delen opsplitsen die je elk apart onder de vorm van een beperkte toepassing in de les kunt integreren.

Paragraaf 2 gaat over optimale verdeling van geproduceerde goederen over twee markten. Deze paragraaf is geschreven voor de tweede graad. Ook in paragraaf 3 komt enkel leerstof van de tweede graad aan bod, maar de toepassing is wel wat pittiger zodat ze zeker ook een plaats kan krijgen bij extremumvraagstukken in de derde graad. In paragraaf 4 leggen we een verband tussen marginale kosten en opbrengsten enerzijds en afgeleiden en integralen anderzijds. Deze paragraaf is dus voor de derde graad bedoeld. Ook de laatste paragraaf, die beschrijvende statistiek en analyse (verloop van functies en bepaalde integralen) combineert, is voor de derde graad bedoeld.

We hebben alle toepassingen uitgewerkt onder de vorm van werkteksten. Op die manier kun je heel concreet zien hoe je het in de les kunt aanpakken. Dat neemt niet weg dat je gerust voor een andere werkvorm kunt kiezen. De werkteksten kunnen je bijvoorbeeld inspireren voor een onderwijsleergesprek over het onderwerp in kwestie.

## 2. Optimale verdeling over twee markten

Bij zeer eenvoudige economische problemen slagen de leerlingen er soms in tot de juiste oplossing te komen zonder variabelen of functies te gebruiken. In deze paragraaf leggen we de leerlingen eerst zo'n eenvoudig probleem voor en moedigen we hen aanvankelijk ook aan om het probleem zo op te lossen. Vervolgens confronteren we hen met vergelijkbare problemen in een context waarin dat geen optie meer is.

We leiden hen stap voor stap naar het opstellen van het voorschrift van een aantal eerste- en tweedegraadsfuncties. Zo laten we zien we dat ze zelf in staat zijn een probleem dat aanvankelijk ingewikkeld leek, op te lossen door gebruik te maken van de kennis van dit soort functies die ze in de wiskundelessen verworven hebben.

begin lesactiviteit

## Optimale verdeling over twee markten: alle mogelijkheden op een rijtje

### Probleem 1: Verkoop je gewonnen tickets

Je hebt op Studio Brussel een quizvraag correct beantwoord en wint daarmee 10 tickets voor een optreden. Het optreden vindt echter plaats net op het moment dat jij met vakantie bent. Je beslist daarom de tickets te verkopen. Je vindt twee vrienden die elkaar niet kennen en die wel wat voelen voor dit concert. Ze willen een aantal tickets kopen aan een vaste prijs. Naarmate de prijs per ticket daalt, zijn ze bereid er meer te kopen.

Je eerste vriend wil geen tickets kopen indien de prijs per ticket 24 euro of meer bedraagt. Indien de prijs per ticket 23 euro bedraagt, wil hij één ticket kopen, aan 22 euro per ticket is hij bereid er twee te kopen. Stel dat het aantal tickets dat deze vriend wil kopen telkens met één daalt, wanneer de prijs per ticket met één euro stijgt. Het verband tussen het aantal tickets $q_1$ (de letter $q$ wordt gewoonlijk gebruikt voor een hoeveelheid en verwijst naar het Engels *quantity* of het Frans *quantité*) dat je eerste vriend wil kopen aan een prijs $p_1$ per ticket kan dus beschreven worden door $q_1 = 24 - p_1$. In economie wordt een functie met als afhankelijke veranderlijke de gevraagde hoeveelheid van een product en als onafhankelijke veranderlijke de prijs per eenheid (per stuk, per kg…) voor dat product een *vraagfunctie* genoemd. Het verband $q_1 = 24 - p_1$ kan ook geschreven worden als $p_1 = 24 - q_1$. Deze vorm laat toe te bepalen welke prijs per ticket je kunt aanrekenen wanneer je exact $q_1$ tickets wilt verkopen. Dit is een voorbeeld van wat in economie een *inverse vraagfunctie* genoemd wordt: een functie met als afhankelijke veranderlijke de prijs per eenheid van een product en als onafhankelijke veranderlijke de gevraagde hoeveelheid van dit product.


1. Hoeveel tickets wil hij kopen indien je 20 euro per ticket aanrekent? En indien je 16 euro per ticket zou vragen?

   *4 tickets aan 20 euro per stuk en 8 tickets aan 16 euro per stuk*

Je tweede vriend wil geen tickets kopen indien de prijs per ticket 20 euro of meer bedraagt. Indien de prijs per ticket 19 euro bedraagt, wil hij één ticket kopen, aan 18 euro per ticket is hij bereid er twee te kopen. Stel dat ook het aantal tickets dat deze vriend wil kopen telkens met één daalt wanneer de prijs per ticket met één euro stijgt.

2. Wat is het voorschrift van de vraagfunctie voor je tweede vriend?

   *Het voorschrift van de vraagfunctie voor je tweede vriend is* $q_2 = 20 - p_2$.

3. Wat is het voorschrift van de inverse vraagfunctie voor je tweede vriend?

   *Het voorschrift van de inverse vraagfunctie voor je tweede vriend is* $p_2 = 20 - q_2$.

4. Hoeveel tickets wil je tweede vriend kopen indien je 20 euro per ticket aanrekent? En indien je 16 euro per ticket zou vragen?

   *Geen enkel ticket aan 20 euro per stuk en 4 tickets aan 16 euro per stuk*

Je streeft ernaar zoveel mogelijk geld te 'verdienen' met de verkoop van je tickets als extraatje voor je vakantie. Via onderstaande tabel trachten we te weten te komen hoeveel tickets je daartoe aan elk van beide vrienden moet verkopen.

5. We bekijken eerst de mogelijkheid dat je geen enkel ticket verkoopt aan je eerste vriend. Hoeveel tickets zul je in dat geval willen verkopen aan je tweede vriend? Welk bedrag zul je per ticket aanrekenen aan je tweede vriend?

   *Je verkoopt alle 10 de tickets aan je tweede vriend en rekent daarvoor 10 euro per ticket aan.*

Van je eerste vriend ontvang je in dat geval uiteraard niets.

6. Welk bedrag ontvang je van je tweede vriend?

   *Van je tweede vriend ontvang je 10 maal 10 euro, dus 100 euro.*

7. Vul de eerste lijn in de volgende tabel aan met de antwoorden op vragen 5 en 6.

| Aantal tickets dat je verkoopt aan je eerste vriend | Aantal tickets dat je verkoopt aan je tweede vriend | Bedrag dat je ontvangt van je eerste vriend | Bedrag dat je ontvangt van je tweede vriend | Totale bedrag dat je ontvangt door je tickets te verkopen |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

8. Vul nu de volgende lijnen van de tabel in door analoge berekeningen te maken.

*Antwoord vraag 7 en 8:*

| Aantal tickets dat je verkoopt aan je eerste vriend | Aantal tickets dat je verkoopt aan je tweede vriend | Bedrag dat je ontvangt van je eerste vriend | Bedrag dat je ontvangt van je tweede vriend | Totale bedrag dat je ontvangt door je tickets te verkopen |
|---|---|---|---|---|
| 0 | **10** | 0 | **100** | 100 |
| 1 | 9 | 23 | 99 | 122 |
| 2 | 8 | 44 | 96 | 140 |
| 3 | 7 | 63 | 91 | 154 |
| 4 | 6 | 80 | 84 | 164 |
| 5 | 5 | 95 | 75 | 170 |
| 6 | 4 | 108 | 64 | 172 |
| 7 | 3 | 119 | 51 | 170 |
| 8 | 2 | 128 | 36 | 164 |
| 9 | 1 | 135 | 19 | 154 |
| 10 | 0 | 140 | 0 | 140 |

9. Hoeveel tickets zal je aan elk van beide vrienden verkopen?

*Uit de vervolledigde tabel kunnen we aflezen dat je het meeste ontvangt indien je 6 tickets verkoopt aan je eerste en 4 tickets aan je tweede vriend.*

### Probleem 2: Verdeling van pc's over de Belgische en Nederlandse markt

Een ondernemer produceert 1000 stuks van een pc en wil die gedeeltelijk in België en gedeeltelijk in Nederland verkopen. Het aantal van deze pc's die de Belgen willen kopen hangt samen met de prijs die ervoor gevraagd wordt. De vraagfunctie voor de Belgische markt wordt gegeven door $q_B = 1500 - p_B$. Hierbij stelt $q_B$ het aantal stuks voor dat de Belgen bereid zijn te kopen en $p_B$ de prijs per stuk die de ondernemer aanrekent op de Belgische markt. Nederlanders zijn anders dan Belgen. Op de Nederlandse markt geldt een andere vraagfunctie, namelijk $q_N = 1400 - p_N$, waarbij $q_N$ het aantal stuks voorstelt dat de Nederlanders bereid zijn te kopen en $p_N$ de prijs per stuk die de ondernemer aanrekent op de Nederlandse markt.

De ondernemer wil de 1000 stuks die hij te koop heeft natuurlijk zo verdelen over beide markten dat zijn totale ontvangsten zo groot mogelijk zijn.

10. Stel dat de ondernemer jouw advies vraagt. Kun je de optimale verdeling van de 1000 stuks over de Belgische en Nederlandse markt in dit geval nog bepalen door concreet alle mogelijkheden te onderzoeken?

    *Dat kan in principe, maar het is duidelijk dat het concreet onderzoeken van alle mogelijkheden in dit geval erg omslachtig is.*

**Probleem 3: Verdeling van kaviaar over de Belgische en Nederlandse markt**

Veronderstel dat het in probleem 2 niet gaat over 1000 pc's maar over 1000 kilogram kaviaar. Dan kunnen ook niet-gehele waarden voor $q_B$ en $q_N$ zinvol zijn.

11. Stel dat de ondernemer uit dit probleem jouw advies vraagt. Kun je de optimale verdeling van de 1000 kilogram over de Belgische en Nederlandse markt in dit geval nog bepalen door concreet alle mogelijkheden te onderzoeken?

    *Omdat ook niet-gehele waarden voor $q_B$ en $q_N$ zinvol zijn, is het concreet onderzoeken van alle mogelijkheden via een tabel in dit geval helemaal onbegonnen werk.*

einde lesactiviteit

In de volgende werktekst gaan we op zoek naar een methode die ons toelaat op een efficiënte manier de optimale verdeling te berekenen in elk van bovenstaande problemen.

begin lesactiviteit

## Optimale verdeling over twee markten: met een functie

In deze werktekst gaan we op zoek naar een methode die niet alleen toelaat te berekenen hoe je jouw 10 tickets het best kunt verdelen over je twee vrienden, maar die ook geschikt is om op een efficiënte manier advies te verlenen aan de ondernemers uit problemen 2 en 3. We introduceren de methode aan de hand van probleem 1 en passen ze nadien toe op de problemen 2 en 3.

**Probleem 1: Verkoop je gewonnen tickets**

We zullen daarvoor in probleem 1 de grootheden in alle kolommen van de tabel uitdrukken in termen van het aantal tickets $q_1$ dat je verkoopt aan je eerste vriend.

1. Geef een voorschrift dat toelaat de waarde van $q_2$ te berekenen in functie van $q_1$.

   *Omdat je in totaal* 10 *tickets wilt verkopen moet* $q_1 + q_2 = 10$ *en dus* $q_2 = 10 - q_1$.

Het bedrag dat je ontvangt van je eerste vriend, noteren we met $b_1$, het bedrag dat je ontvangt van je tweede vriend met $b_2$ en het bedrag dat je ontvangt van beide vrienden samen met $b$.

2. Stel een voorschrift op dat $b_1$ uitdrukt in termen van $q_1$.

   $b_1 = p_1 \cdot q_1 = (24 - q_1) \cdot q_1 = -q_1^2 + 24q_1$

3. Stel een voorschrift op dat het bedrag $b_2$ uitdrukt in termen van $q_2$.

   $b_2 = p_2 \cdot q_2 = (20 - q_2) \cdot q_2 = -q_2^2 + 20q_2$

4. Gebruik de antwoorden op vraag 1 en vraag 3 nu om een voorschrift op te stellen dat het bedrag $b_2$ uitdrukt in termen van $q_1$.

   *Wanneer we de uitdrukking* $q_2 = 10 - q_1$ *uit het antwoord op vraag* 1 *invullen in de uitdrukking* $-q_2^2 + 20q_2$ *uit het antwoord op vraag* 3, *dan krijgen we de uitdrukking*

   $$b_2 = -(10 - q_1)^2 + 20 \cdot (10 - q_1) = -q_1^2 + 100,$$

   *die het bedrag* $b_2$ *dat je ontvangt van je tweede vriend inderdaad uitdrukt in termen van* $q_1$.

5. Gebruik ten slotte de antwoorden op vraag 2 en vraag 4 om een voorschrift op te stellen dat het totale bedrag $b$ dat je ontvangt door je tickets te verkopen uitdrukt in termen van $q_1$. Werk dit voorschrift vervolgens zo ver mogelijk uit.

   *Het totale bedrag b dat je ontvangt door $q_1$ tickets te verkopen aan je eerste vriend en de overblijvende $10 - q_1$ tickets aan je tweede vriend is de som van de uitdrukkingen uit antwoorden 2 en 4. Deze totale ontvangsten kunnen dus uitgedrukt worden in termen van $q_1$ als volgt:*

$$b = (-q_1^2 + 24q_1) + (-q_1^2 + 100) = -2q_1^2 + 24q_1 + 100.$$

6. Welk soort functie wordt beschreven door het voorschrift dat je in het antwoord op vraag 5 vond? Beschrijf de grafiek van deze functie.

   *Het voorschrift uit het antwoord op vraag 5 beschrijft een tweedegraadsfunctie. De grafiek van deze functie is een parabool. Omdat de coëfficiënt van $q_1^2$ negatief is, is deze parabool een bergparabool.*

7. Bepaal de waarde van $q_1$ waarvoor het totale bedrag $b$ maximaal is.

   *De maximale waarde van b wordt bereikt voor $q_1 = \frac{-24}{2\cdot(-2)} = 6$.*

8. Hoeveel tickets zul je verkopen aan je eerste vriend? En aan je tweede?

   *Om zoveel mogelijk 'winst' te maken uit de verkoop van de 10 gewonnen tickets, moet je 6 tickets verkopen aan je eerste vriend en de resterende 4 tickets aan je tweede vriend.*

9. Vergelijk je antwoord met de conclusie die je eerder trok in het antwoord op vraag 9 in de vorige werktekst.

## Probleem 2: Verdeling van PC's over de Belgische en Nederlandse markt

10. Stel het voorschrift op voor de totale ontvangsten $TO$ van de ondernemer uit probleem 2 in functie van het aantal pc's $q_B$ die hij verkoopt op de Belgische markt. Bemerk de naam die we voor de functie gebruiken: in wiskunde, economie… gebruikt men vaak betekenisvolle namen voor een functie. Een functie wordt dan niet altijd aangeduid met de letter *f*, *g*… maar eerder met een 'naam' die verwijst naar de betekenis ervan, zoals $TO$ voor totale ontvangsten.

    *Door in $TO = p_B \cdot q_B + p_N \cdot q_N$ de gegeven verbanden $p_B = 1500 - q_B$ en $p_N = 1400 - q_N$ in te vullen, vinden we volgende uitdrukking voor de totale ontvangsten: $TO = (1500 - q_B) \cdot q_B + (1400 - q_N) \cdot q_N$. Omdat de ondernemer in totaal 1000 stuks wil verkopen, moet $q_B + q_N = 1000$ en dus $q_N = 1000 - q_B$. Bijgevolg geldt dat $TO = (1500 - q_B) \cdot q_B + \big(1400 - (1000 - q_B)\big) \cdot (1000 - q_B)$. Deze laatste uitdrukking kan vereenvoudigd worden tot $TO = -2q_B^2 + 2100q_B + 400\,000$.*

11. Berekenen door gebruik te maken van dit voorschrift hoeveel eenheden de ondernemer moet verkopen op de Belgische markt om zijn totale ontvangsten op de Belgische en Nederlandse markt samen te maximaliseren. Bereken ook de maximale waarde van de ontvangsten die hij kan genereren uit de verkoop van de 1000 stuks op beide markten samen.

    *De tweedegraadsfunctie met als voorschrift $TO = -2q_B^2 + 2100q_B + 400\,000$ bereikt haar maximum bij $q_B = 525$. De ondernemer moet dus 525 stuks verkopen op de Belgische markt (en de resterende 475 stuks op de Nederlandse markt) om zijn totale ontvangsten te maximaliseren.*

    *De totale ontvangsten $TO = (1500 - q_B) \cdot q_B + (1400 - q_N) \cdot q_N$ bedragen in dat geval 951 250 euro. Merk op dat we dit resultaat ook kunnen berekenen door $q_B$ te vervangen door 525 in het voorschrift $TO = -2q_B^2 + 2100q_B + 400\,000$.*

## Probleem 3: Verdeling van kaviaar over de Belgische en Nederlandse markt

12. Welk advies zou je geven aan de ondernemer uit probleem 3? Leg uit waarom.

    *In de oplossing van vraag 11 hebben we nergens gebruik gemaakt van het feit dat $q_B$ en $q_N$ geheel zijn. Alle berekeningen blijven dus geldig. We adviseren de ondernemer uit probleem 3 daarom 525 kilogram kaviaar te verkopen op de Belgische en 475 kilogram op de Nederlandse markt. Op die manier zullen zijn totale ontvangsten maximaal zijn.*

**Een variant op probleem 2 en probleem 3**

Stel dat de inverse vraagfunctie voor de pc's uit probleem 2 op de Belgische markt voorschrift $p_B = 1501 - q_B$ zou hebben en dat de inverse vraagfunctie voor dit product op de Nederlandse markt $p_N = 1400 - q_N$ zou blijven. Het voorschrift voor de totale ontvangsten van de ondernemer zou dan $TO = -2q_B^2 + 2101q_B + 400\,000$ zijn (dat hoef je niet na te rekenen).

13. Bereken hoeveel stuks de ondernemer in dit geval moet verkopen op de Belgische markt om zijn totale ontvangsten op de Belgische en Nederlandse markt samen te maximaliseren.

    *De tweedegraadsfunctie $TO = -2q_B^2 + 2101q_B + 400\,000$ bereikt haar maximum bij $q_B = 525{,}25$, wat geen zinvolle waarde is voor $q_B$ (het gaat over aantallen pc's). Door gebruik te maken het verloop van de grafiek van de functie $TO$ (een bergparabool met top en symmetrieas bij $q_B = 525{,}25$), weten we dat de maximale waarde van $TO$ bereikt wordt voor de gehele waarde van $q_B$ die zo dicht mogelijk bij de symmetrieas ligt. In dit geval is dat $q_B = 525$. De ondernemer zal daarom ook in dit geval zijn totale ontvangsten op beide markten samen maximaliseren door 525 stuks op de Belgische en 475 stuks op de Nederlandse deelmarkt aan te bieden.*

14. Veronderstel dat we in probleem 3 dezelfde verandering zouden aanbrengen in de inverse vraagfunctie voor kaviaar voor de Belgische markt. Wat zou dan de optimale verdeling over de markten zijn?

    *De berekeningen zijn dezelfde als bij de vorige oefening. Doordat we ook een niet-geheel aantal kilogram kaviaar kunnen verkopen, hoeven we nu echter niet over te gaan op een geheel getal als antwoord en verkopen we dus 525,25 kg op de Belgische markt en 474,75 kg op de Nederlandse markt.*

einde lesactiviteit

## 3. Reducties voor grote groepen

In de vorige paragraaf ondervonden de leerlingen dat ze er bij zeer eenvoudige economische problemen soms in slagen tot de juiste oplossing te komen zonder variabelen of functies te gebruiken maar werden ze ook geconfronteerd met het feit dat dit voor vergelijkbare problemen in een lichtjes andere context vaak geen optie meer is. Ook in deze paragraaf leggen we de leerlingen eerst een eenvoudig probleem voor en moedigen we hen aanvankelijk aan om het probleem op te lossen zonder gebruik te maken van variabelen of functies. Vervolgens confronteren we hen ook in deze paragraaf met vergelijkbare problemen in een context waarin dat geen optie meer is. We leiden hen stap voor stap naar het opstellen van een zogenaamd *meervoudig voorschrift* van een functie en laten hen ontdekken hoe ze het extremum van een dergelijke functie kunnen berekenen door gebruik te maken van de kennis van de functies die ze in de wiskundelessen bestudeerd hebben. Deze paragraaf is geïnspireerd op Deprez & Laeremans (2014).

begin lesactiviteit

## Reducties voor grote groepen: alle mogelijkheden op een rijtje

**Probleem 1: Schoolreis naar zee**

Een reisbureau biedt een schoolreis naar zee aan tegen een prijs van 250 euro per deelnemer. Opdat de reis zou doorgaan moeten er minstens 35 inschrijvingen zijn. Om organisatorische redenen is het aantal deelnemers bovendien beperkt tot maximaal 50.

Om leerlingen te motiveren zich in te schrijven, beslist het reisbureau de volgende korting te geven: zodra er 40 deelnemers zijn ingeschreven, wordt de deelnameprijs voor elke deelnemer (dus niet alleen voor de nieuwe deelnemers!) verlaagd met 5 euro telkens wanneer zich één persoon extra aanmeldt (bovenop de 40 die reeds ingeschreven zijn).

In deze werktekst bepalen we het aantal deelnemers waarbij de totale ontvangsten voor het reisbureau maximaal zijn.

1. Vervolledig daartoe eerst de volgende tabel.

| Aantal inschrijvingen voor de schoolreis naar zee | Deelnameprijs per persoon | Totale ontvangsten voor het reisbureau |
|---|---|---|
| 35 | | |
| 36 | | |
| 37 | | |
| 38 | | |
| 39 | | |
| 40 | | |

*Antwoord:*

| Aantal inschrijvingen voor de schoolreis naar zee | Deelnameprijs per persoon | Totale ontvangsten voor het reisbureau |
|---|---|---|
| 35 | 250 | 8750 |
| 36 | 250 | 9000 |
| 37 | 250 | 9250 |
| 38 | 250 | 9500 |
| 39 | 250 | 9750 |
| 40 | 250 | 10000 |

2. Hoeveel bedraagt de deelnameprijs per persoon wanneer er 41 deelnemers zijn?

   $250 - 1 \cdot 5 = 245\ euro$

3. Hoeveel bedragen de totale ontvangsten voor het reisbureau in dat geval?

   $41 \cdot 245 = 10\,045\ euro$

4. Vul de volgende tabel aan met de antwoorden op vragen 2 en 3.

| Aantal inschrijvingen voor de schoolreis naar zee | Deelnameprijs per persoon | Totale ontvangsten voor het reisbureau |
|---|---|---|
| 41 | | |
| 42 | | |
| 43 | | |
| 44 | | |
| 45 | | |
| 46 | | |
| 47 | | |
| 48 | | |
| 49 | | |
| 50 | | |

5. Vervolledig nu deze tabel door analoge berekeningen te maken.

*Antwoord vraag 4 en vraag 5:*

| Aantal inschrijvingen voor de schoolreis naar zee | Deelnameprijs per persoon | Totale ontvangsten voor het reisbureau |
|---|---|---|
| 41 | **245** | **10 045** |
| 42 | 240 | 10 080 |
| 43 | 235 | 10 105 |
| 44 | 230 | 10 120 |
| 45 | 225 | 10 125 |
| 46 | 220 | 10 120 |
| 47 | 215 | 10 105 |
| 48 | 210 | 10 080 |
| 49 | 205 | 10 045 |
| 50 | 200 | 10 000 |

6. Bij welk aantal deelnemers zijn de totale ontvangsten die het reisbureau genereert uit de organisatie van deze schoolreis maximaal?

   *We bekijken eerst de situatie waarbij het aantal deelnemers tussen de 35 en de 40 ligt. Uit de aangevulde versie van de tabel uit vraag 1 blijkt dat in dit geval de totale ontvangsten maximaal zijn bij 40 deelnemers.*

   *Uit de aangevulde versie van de tabel na vraag 5 blijkt dat in het geval er meer dan 40 deelnemers zijn, de totale ontvangsten maximaal zijn bij 45 deelnemers.*

   *Om na te gaan bij welk aantal deelnemers de totale ontvangsten maximaal zijn indien we alle mogelijke aantallen deelnemers in overweging nemen, moeten we de totale ontvangsten bij het 'beste' aantal uit beide tabellen vergelijken. We stellen vast dat de totale ontvangsten bij 45 deelnemers hoger liggen dan die bij 40 deelnemers. De totale ontvangsten van het reisbureau zijn dus maximaal bij 45 deelnemers.*

### Probleem 2: Avontuurlijke vakanties voor groepen

Veronderstel nu dat het reisbureau ook een avontuurlijke vakantie organiseert voor groepen van minstens 220 en hoogstens 400 deelnemers en dat de normale deelnameprijs 500 euro per persoon bedraagt. Voor 'grote' groepen is de volgende reductie voorzien: zodra er 260 deelnemers zijn ingeschreven, wordt de deelnameprijs voor elke deelnemer (dus niet alleen voor de nieuwe deelnemers) verminderd met 1 euro telkens wanneer zich één persoon extra aanmeldt (bovenop de 260 die reeds ingeschreven zijn).

Het reisbureau wil onderzoeken voor welk aantal deelnemers de totale ontvangsten uit de organisatie van deze reis maximaal zijn. Het is duidelijk dat het concreet onderzoeken van alle mogelijkheden in dit geval erg omslachtig is als het manueel gedaan wordt. Wanneer de variabele (hier het aantal deelnemers) uitsluitend gehele waarden kan aannemen, kan dit eventueel opgelost worden door gebruik te maken van een rekenblad (bijvoorbeeld Excel).

We keren eerst terug naar probleem 1.

7. Maak een Excel-bestand met daarin de (niet-aangevulde) tabellen uit vraag 1 en vraag 4 van probleem 1. Vul de tabel nu opnieuw aan. Doe dat niet door zelf de getallen in te typen, maar door een gepaste formule te typen in het bovenste vakje van de twee kolommen en naar onder te slepen zodat Excel de getallen berekent.

8. Doe nu hetzelfde voor probleem 2. Bij welk aantal deelnemers zijn de totale ontvangsten uit probleem 2 maximaal?

   *Bij 380 deelnemers zijn de totale ontvangsten van het reisbureau maximaal.*

Wanneer in een andere context ook niet gehele waarden voor de variabele zinvol kunnen zijn, dan is het zelfs met behulp van een Excel-bestand onbegonnen werk om alle concrete mogelijkheden te onderzoeken.

einde lesactiviteit

In de volgende werktekst gaan we op zoek naar een methode die niet alleen toelaat te berekenen bij welk aantal deelnemers de totale ontvangsten in probleem 1 maximaal zijn, maar die ook geschikt is om op een efficiënte manier te berekenen hoeveel deelnemers er moeten inschrijven om de totale ontvangsten in probleem 2 te maximaliseren en die bovendien ook bruikbaar blijft in een context waarin ook niet gehele waarden voor de variabele zinvol kunnen zijn.

begin lesactiviteit

## Reducties voor grote groepen: met een functie

In deze werktekst gaan we op zoek naar een methode die niet alleen toelaat op probleem 1 op te lossen, maar die ook geschikt is om op een efficiënte manier probleem 2 op te lossen. We introduceren de methode aan de hand van probleem 1 en passen ze nadien toe op probleem 2.

### Probleem 1: Schoolreis naar zee

We drukken de grootheden in de verschillende kolommen uit de tabellen uit de vorige werktekst uit in termen van het aantal deelnemers $x$.

#### *Groepen van hoogstens* 40 *deelnemers*

We kijken eerst naar de eerste tabel, dus groepen van minstens 35, maar hoogstens 40 deelnemers.

1. Stel voor dit geval een voorschrift op dat de totale ontvangsten $TO$ van het reisbureau uitdrukt in termen van het aantal deelnemers $x$.

   $TO = 250x$

Het voorschrift in het antwoord op vraag 1 herkennen we als een voorschrift van de vorm $y = mx + q$, met $m \neq 0$. Vermits $m$ in bovenstaand voorschrift een positieve waarde aanneemt, weten we dat de grafiek van deze functie een stijgende rechte is. Omdat we ons hier beperken tot een deelnemersaantal tussen 35 en 40, is de grafiek in feite een stijgend lijnstuk. Het maximum van deze functie wordt bereikt in de grootst mogelijke waarde van $x$.

2. Bereken voor welk aantal deelnemers de totale ontvangsten maximaal zijn bij groepen van hoogstens 40 deelnemers.

   *Omdat de totale ontvangsten in dit geval maximaal zijn bij een zo groot mogelijke waarde van $x$, bereiken de totale ontvangsten van het reisbureau in dit geval een maximum bij $x = 40$.*

#### *Groepen van meer dan 40 deelnemers*

We kijken nu naar de tweede tabel, dus groepen van meer dan 40, maar hoogstens 50 deelnemers.

3. Stel voor dit geval een voorschrift op dat de korting per persoon uitdrukt in termen van het aantal deelnemers $x$.

   $\textit{korting per persoon} = 5 \cdot (x - 40)$

4. Stel voor dit geval nu een voorschrift op dat de deelnameprijs per persoon uitdrukt in termen van het aantal deelnemers $x$.

   $\textit{deelnameprijs per persoon} = 250 - 5 \cdot (x - 40) = 450 - 5x$

5. Stel tot slot voor dit geval een voorschrift op dat de totale ontvangsten $TO$ van het reisbureau uitdrukt in termen van het aantal deelnemers $x$.

   $TO = \textit{deelnameprijs per persoon} \times \textit{aantal deelnemers} = (450 - 5x) \cdot x = -5x^2 + 450x$

6. Bereken uit het antwoord op vraag 5 de waarde van $x$ waarvoor de totale ontvangsten voor dit geval maximaal zijn.

   *De tweedegraadsfunctie* $TO = (450 - 5x) \cdot x = -5x^2 + 450x$ *bereikt haar maximale waarde bij* $x = 45$*. De totale ontvangsten bereiken in dit geval dus een maximum bij* 45 *deelnemers.*

***Alle groepsgroottes***

We beperken ons nu niet meer tot groepen van hoogstens 40 deelnemers of tot groepen van meer dan 40 deelnemers, maar houden rekening met alle mogelijke groepsgroottes. Het aantal deelnemers kan dus variëren van minstens 35 tot hoogstens 50.

De totale ontvangsten $TO$ kunnen dan als volgt uitgedrukt worden in termen van $x$

$$TO = \begin{cases} 250x & \text{als } 35 \le x \le 40 \\ -5x^2 + 450x & \text{als } 40 < x \le 50. \end{cases}$$

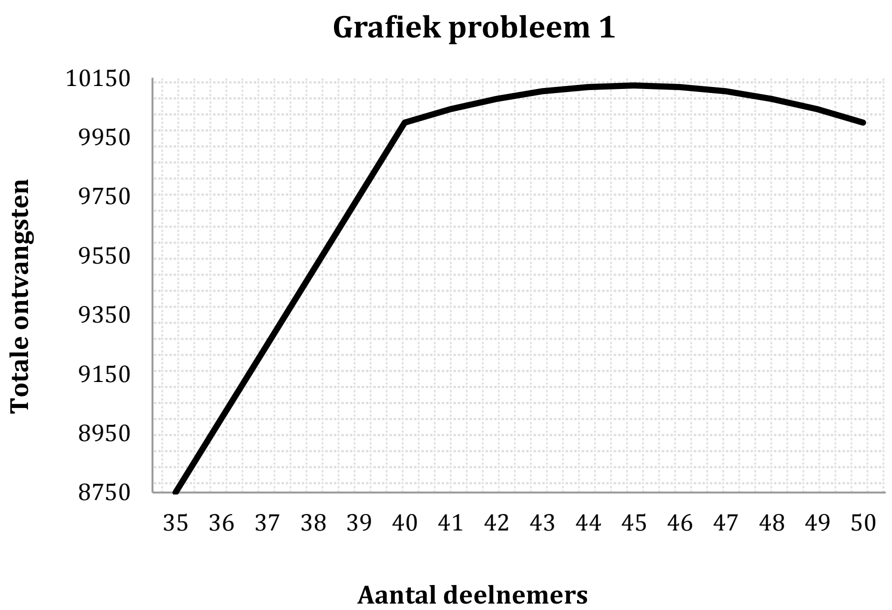
Het is met andere woorden afhankelijk van de waarde van $x$ welk voorschrift ($TO(x) = 250x$ of $TO(x) = -5x^2 + 450x$) gebruikt moet worden om de bijbehorende totale ontvangsten te berekenen. Zo'n voorschrift wordt een *meervoudig voorschrift* genoemd.

7. Bereken bij welk aantal deelnemers de totale ontvangsten maximaal zijn.

   *Uit de antwoorden op vragen* 2 *en* 6 *kunnen we besluiten dat het volstaat de totale ontvangsten bij* 40 *deelnemers te vergelijken met de totale ontvangsten bij* 45 *deelnemers. De totale ontvangsten bij* 40 *deelnemers kunnen worden berekend aan de hand van de formule uit antwoord* 1 *en bedragen dus* $250 \cdot 40 = 10\,000$ *euro. De totale ontvangsten bij* 45 *deelnemers kunnen worden berekend aan de hand van de formule uit antwoord* 5 *en bedragen dus* $-5 \cdot 45^2 + 450 \cdot 45 = 10\,125$ *euro. Omdat de totale ontvangsten bij* 45 *deelnemers hoger liggen dan de totale ontvangsten bij* 40 *deelnemers, zijn de totale ontvangsten in probleem* 1 *maximaal bij* 45 *deelnemers.*

8. Maak een grafiek van de functie $TO(x)$ en controleer het resultaat van je berekeningen aan de hand van deze grafiek.

   *Antwoord:*




**Probleem 2: Avontuurlijke vakanties voor groepen**

9. Stel een voorschrift op dat de totale ontvangsten $TO$ van het reisbureau uit probleem 2 uitdrukt in functie van het aantal deelnemers $x$.

*Het voorschrift is*

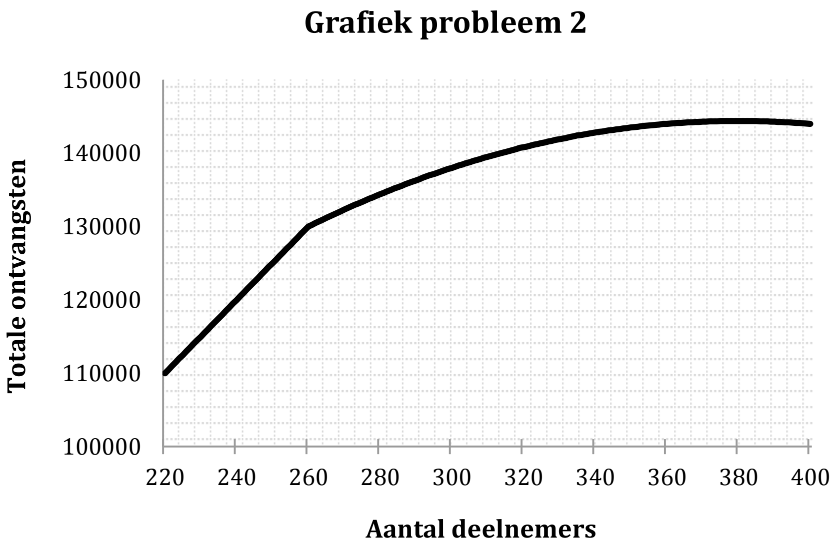
$$TO = \begin{cases} 500x & \text{als } 220 \leq x \leq 260 \\ -x^2 + 760x & \text{als } 260 < x \leq 400. \end{cases}$$

10. Gebruik je antwoord op de vorige vraag om te berekenen bij welk aantal deelnemers de totale ontvangsten maximaal zijn.

*Wanneer we alleen groepen van minstens* 220 *en hoogstens* 260 *deelnemers in overweging nemen, bereikt* $TO$ *haar maximale waarde bij* $x = 260$*. Wanneer we alleen groepen van meer dan* 260 *en hoogstens* 400 *deelnemers in overweging nemen, bereikt* $TO$ *haar maximale waarde bij* $x = 380$*. We vergelijken dan nog* $TO(380) = 144\,400$ *met* $TO(260) = 130\,000$*, en besluiten daaruit dat* $TO$ *maximaal is bij* 380 *deelnemers.*

11. Maak een grafiek van de functie $TO(x)$ en controleer het resultaat van je berekeningen aan de hand van deze grafiek.

*Antwoord:*




### Een variant op probleem 2

Veronderstel dat een ander reisbureau een soortgelijke vakantie aanbiedt als het reisbureau uit probleem 2. Deze vakantie wordt ingericht voor groepen van minstens 220 en hoogstens 350 deelnemers. Bij dit reisbureau bedraagt de normale deelnameprijs 520 euro per deelnemer. Dit reisbureau geeft echter aan elke deelnemer niet één maar vier euro korting per deelnemer boven de 260.

12. Stel een voorschrift op dat de totale ontvangsten $TO$ van dit reisbureau uitdrukt in functie van het aantal deelnemers *x*.

*Het voorschrift is*

$$TO = \begin{cases} 520x & \text{als } 220 \leq x \leq 260 \\ -4x^2 + 1560x & \text{als } 260 < x \leq 350. \end{cases}$$

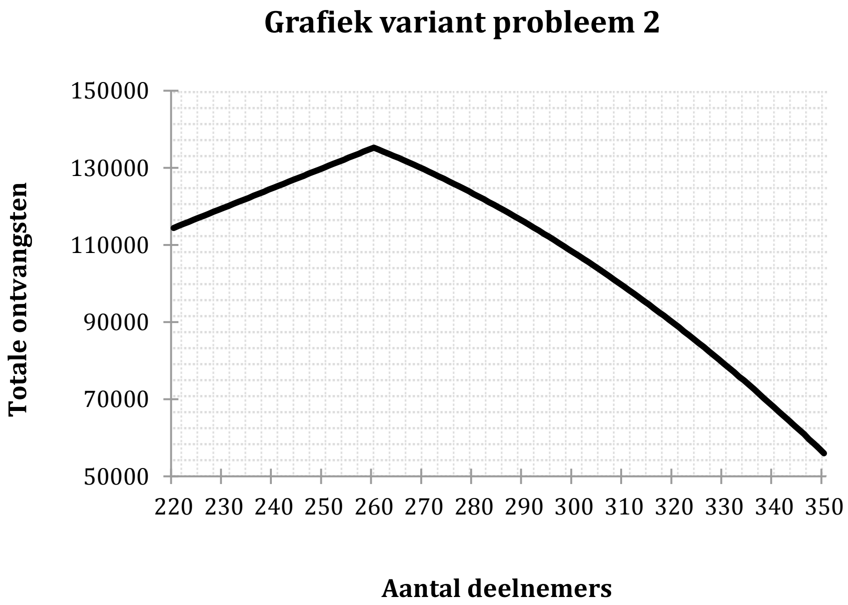
13. Gebruik je antwoord op de vorige vraag om te berekenen bij welk aantal deelnemers de totale ontvangsten van dit reisbureau maximaal zijn.

*Wanneer we alleen groepen van minstens* 220 *en hoogstens* 260 *deelnemers in overweging nemen, bereikt* $TO$ *haar maximale waarde bij* $x = 260$*. Wanneer we alleen groepen van meer dan* 260 *en hoogstens* 350 *deelnemers in overweging nemen, bereikt* $TO$ *haar maximale waarde bij* $x = 261$*. Immers, de top van de parabool ligt buiten het gebied dat we beschouwen. We houden enkel een dalend stuk van de parabool over en dus wordt het maximum bereikt voor de kleinst mogelijke* $x$*-waarde.*

*Wanneer we dan nog* $TO(260) = 135\,200$ *vergelijken met* $TO(261) = 134\,676$, *dan besluiten we daaruit dat* $TO$ *maximaal is bij* 260 *deelnemers.*

14. Maak een grafiek van de functie $TO(x)$ en controleer het resultaat van je berekeningen aan de hand van deze grafiek.

*Antwoord:*




einde lesactiviteit

## 4. Marginale kosten en opbrengsten

De economische begrippen marginale kosten en marginale opbrengsten zijn vanuit wiskundig oogpunt afgeleiden. Deze begrippen staan op de leerplannen economie van de derde graad aso, maar worden in de lessen economie meestal behandeld zonder te verwijzen naar afgeleiden. In de plaats daarvan wordt een discrete versie gebruikt. Voor leerlingen in economische richtingen met een sterke component wiskunde kan er een mooie brug gelegd worden tussen beide vakken door in de wiskundeles terug te grijpen naar deze economische begrippen op het moment dat afgeleiden (en integralen) behandeld worden.

Ook voor leerlingen uit niet-economische richtingen kan het interessant zijn één of enkele wiskundelessen te wijden aan dit onderwerp. De leerplannen wiskunde vragen immers toepassingen op afgeleiden en integralen te behandelen, niet enkel binnen maar ook buiten de wiskunde. Deze economische toepassingen kunnen een mooie aanvulling vormen op de misschien beter gekende toepassingen uit het domein van de natuurkunde.

In deze paragraaf presenteren we een aantal lesactiviteiten over deze topic, deels geïnspireerd op Biront & Deprez (2012). Studenten uit economische richtingen zullen de beschreven economische begrippen herkennen uit de lessen economie, maar het materiaal is zo opgesteld dat het ook bruikbaar is voor studenten zonder enige voorkennis economie.

In paragraaf 4.1 laten we zien dat marginale kosten en opbrengsten beschreven kunnen worden met afgeleiden. We vertrekken daarbij van marginale kosten en opbrengsten in een discrete context, zoals dat ook in de lessen economie gedaan wordt. Daarna maken we de overgang naar de continue aanpak. In paragraaf 4.1 laten we zien hoe bepaalde en onbepaalde integralen gebruikt kunnen worden in de context van marginale en totale kosten en opbrengsten.

Essentieel in deze paragraaf is het onderscheid tussen een discrete en een continue beschrijving van de realiteit. Bij een continue beschrijving van een fenomeen uit de realiteit maak je gebruik van ‘gewone’ functies, dus functies waarvan de onafhankelijke veranderlijke waarden aanneemt in een interval. In het discrete geval neemt de onafhankelijke veranderlijke alleen gehele waarden aan en werk je dus met (eindige of oneindige) rijen. We gebruiken het woord ‘continu’ dus in een andere betekenis dan bij het begrip ‘continue functie’ in de wiskunde.

Voor we van wal steken, wijzen we nog op een potentieel misverstand in de terminologie. Het woord ‘opbrengsten’ in de omgangstaal doet denken aan wat je overhoudt na aftrek van de kosten, dus aan de winst. In de economie is dat anders. Het woord ‘opbrengsten’ is daar een synoniem voor ‘omzet’ en ‘ontvangsten’. Het gaat dus over de inkomsten wanneer je iets verkoopt zonder rekening te houden met de kosten.

## 4.1. Marginale kosten en opbrengsten als afgeleiden

Economisten bestuderen niet alleen grootheden op zich, maar ook de mate waarin grootheden *veranderen*. Een fabrikant is niet enkel geïnteresseerd in de kosten bij een bepaald productieniveau, maar ook in hoe snel deze kosten stijgen naarmate de productie toeneemt. De mate waarin een grootheid verandert, wordt in het economisch jargon de ‘marginale’ grootheid genoemd. In deze paragraaf introduceren we marginale kosten en marginale opbrengsten en kijken we welke informatie ze leveren.

In een eerste werktekst introduceren we deze begrippen in een eenvoudige, discrete versie – de versie die ook gebruikt wordt in de lessen economie in het secundair onderwijs.

begin lesactiviteit

## Introductie tot marginale kosten en opbrengsten: de productie van wintermutsen

Een fabrikant produceert wintermutsen. We gaan ervan uit dat er elk uur een geheel aantal mutsen geproduceerd wordt: de geproduceerde hoeveelheid kan dus gelijk zijn aan 0, 1, 2, 3,… We zeggen dat de geproduceerde hoeveelheid een *discrete* grootheid is.

In de onderstaande tabel vind je de kosten voor verschillende productieniveaus van wintermutsen. In de eerste kolom staat het aantal mutsen dat geproduceerd wordt per uur, in de tweede kolom de *totale kosten* die daarmee verbonden zijn. Merk op dat er ook kosten zijn als er niets geproduceerd wordt: deze worden de *vaste kosten* of *constante kosten* genoemd (denk aan kosten voor gebouwen, afschrijvingen van machines enz.).

| Aantal mutsen | Totale kosten | Marginale kosten | Totale opbrengsten | Marginale opbrengsten | Winst |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | | | | |
| 1 | 16 | | | | |
| 2 | 22 | | | | |
| 3 | 26 | | | | |
| 4 | 29 | | | | |
| 5 | 32 | | | | |
| 6 | 37 | | | | |
| 7 | 45 | | | | |
| 8 | 55 | | | | |
| 9 | 69 | | | | |
| 10 | 95 | | | | |

De *marginale kosten* bij een bepaald productieniveau worden nu gedefinieerd als de bijkomende kosten voor de productie van 1 extra muts.

1. Vul de kolom met marginale kosten in. Merk op dat we met de gegeven tabel de marginale kosten bij een productieniveau van 10 mutsen niet kunnen bepalen.

De fabrikant in het voorbeeld is een kleine speler in de markt van wintermutsen. Hij kan zelf de marktprijs niet beïnvloeden omdat hij een te kleine productiecapaciteit heeft. Hij verkoopt zijn mutsen aan de marktprijs van 8 euro per muts.

Analoog aan de marginale kosten, worden de *marginale opbrengsten* gedefinieerd als de bijkomende opbrengsten bij de productie en verkoop van 1 extra muts per uur. De winst is gedefinieerd als het verschil tussen totale opbrengsten en totale kosten. Verwar winst en opbrengsten niet met elkaar: de opbrengsten staan voor de ontvangsten of inkomsten bij de verkoop en de winst voor wat je hiervan overhoudt na aftrek van de kosten.

2. Vul nu ook de kolommen met totale opbrengsten, marginale opbrengsten en winst in.

   *Antwoord vraag* 1 *en* 2*:*

| Aantal mutsen | Totale kosten | Marginale kosten | Totale opbrengsten | Marginale opbrengsten | Winst |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 10 | 0 | 8 | – 6 |
| 1 | 16 | 6 | 8 | 8 | – 8 |
| 2 | 22 | 4 | 16 | 8 | – 6 |
| 3 | 26 | 3 | 24 | 8 | – 2 |
| 4 | 29 | 3 | 32 | 8 | 3 |
| 5 | 32 | 5 | 40 | 8 | 8 |
| 6 | 37 | 8 | 48 | 8 | 11 |
| 7 | 45 | 10 | 56 | 8 | 11 |
| 8 | 55 | 14 | 64 | 8 | 9 |
| 9 | 69 | 26 | 72 | 8 | 3 |
| 10 | 95 | | 80 | 8 | – 15 |

3. Zowel de totale kosten als de totale opbrengsten stijgen als de productie toeneemt. Wat betekent dit voor de marginale kosten en de marginale opbrengsten?

   *De marginale kosten en de marginale opbrengsten zijn steeds positief.*

4. Beschrijf in woorden het verloop van de marginale kosten en van de marginale opbrengsten.

   *De marginale kosten dalen eerst en stijgen vervolgens. De marginale opbrengsten zijn constant.*

5. We vergelijken nu de marginale opbrengsten met de marginale kosten. Vul de zinnen in a, b en c telkens aan met één van de antwoordmogelijkheden in i, ii en iii.

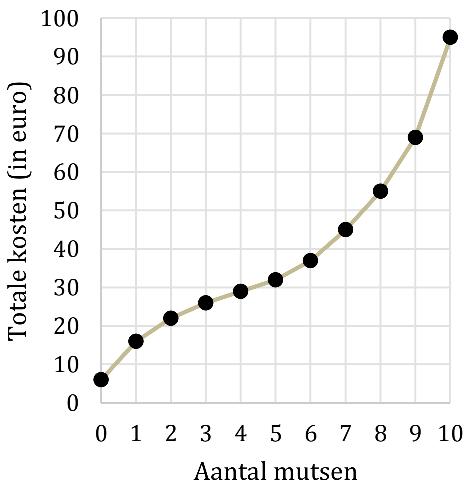
   a. Wanneer de marginale opbrengsten groter zijn dan de marginale kosten …
   b. Wanneer de marginale opbrengsten kleiner zijn dan de marginale kosten …
   c. Wanneer marginale opbrengsten en marginale kosten gelijk zijn …

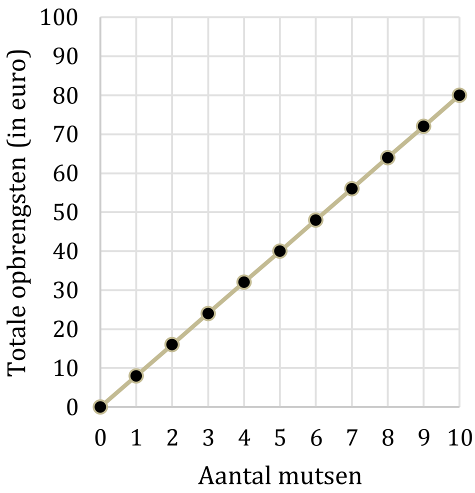
   i. … neemt de winst af als er een extra eenheid geproduceerd wordt.
   ii. … verandert de winst niet als er een extra eenheid geproduceerd wordt.
   iii. … neemt de winst toe als er een extra eenheid geproduceerd wordt.

   Verklaar dit verband aan de hand van een economisch argument.

   *a – iii, b – i, c – ii; verklaring: Wanneer de marginale kosten groter zijn dan de marginale opbrengsten, ligt de meerkost voor de productie van een extra muts hoger dan de meeropbrengst. De productie van een extra muts resulteert dus in een afname van de winst.*

De onderstaande figuur geeft de totale kosten (links) en de totale opbrengsten (rechts) als functie van het geproduceerde aantal mutsen. De punten zijn verbonden door lijnstukjes (die strikt genomen niet tot de grafiek behoren).




6. Waar kun je de vaste kosten (de kosten als er niets geproduceerd wordt) aflezen op de grafiek?

   *De hoogte waar de grafiek van de kostenfunctie de verticale as snijdt.*

7. Hoe kun je de richtingscoëfficiënt (helling) van elk van de lijnstukjes (bij benadering) aflezen op de grafiek? Wat is het verband met de marginale kosten en de marginale opbrengsten?

   *Als we één eenheid naar rechts bewegen op de grafiek is het overeenkomstige verticale verschil de richtingscoëfficiënt van het betreffende lijnstuk. Dit komt precies overeen met de marginale kosten en de marginale opbrengsten: de bijkomende kosten of opbrengsten voor de productie van één extra muts.*


einde lesactiviteit

Na deze discrete aanloop bekijken we in een tweede werktekst marginaliteit in een continue context. Marginale kosten en opbrengsten worden nu gedefinieerd als afgeleiden. Deze tweede werktekst is geschreven als vervolg op de eerste.

In deze werktekst komt zijdelings een economisch thema aan bod dat niet onmiddellijk iets te maken heeft met marginaliteit maar dat wel interessant is als achtergrondinformatie bij veel economische toepassingen, namelijk het verschil tussen de monopolist en de kleine producent die de marktprijs moet accepteren. Ook dit is een thema dat studenten uit economische richtingen zullen herkennen uit de lessen economie.

De kostenfunctie die in het voorbeeld gebruikt zal worden als model voor de productie van fruitsap is een derdegraadsfunctie. Verderop, in paragraaf 1.1, zullen we beknopt toelichten waarom een derdegraadsfunctie een plausibel model is voor een kostenfunctie.

begin lesactiviteit

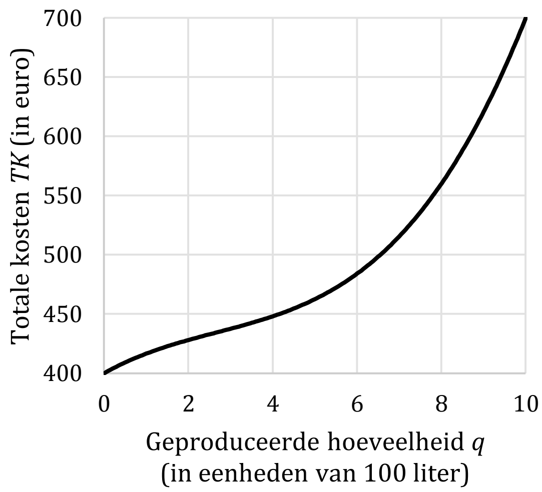
## Marginaliteit continu bekeken: de productie van fruitsap

Een bedrijf produceert fruitsap. De totale kosten $TK$ (in euro) voor de productie van een hoeveelheid $q$ (in eenheden van 100 liter) zijn gegeven door de functie

$$TK(q) = 400 + 20q - 4q^2 + 0{,}5q^3.$$

De letter $q$ die gewoonlijk gebruikt wordt voor geproduceerde hoeveelheid verwijst naar het Engelse woord *quantity* of het Franse woord *quantité*.

In principe is elke (niet-negatieve) productiehoeveelheid mogelijk. De geproduceerde hoeveelheid $q$ hoeft dus (anders dan in het voorbeeld van wintermutsen) geen geheel getal te zijn. We zeggen dat de geproduceerde hoeveelheid $q$ een *continue grootheid* is. In de onderstaande figuur wordt de grafiek van de functie $TK(q)$ gegeven.




1. Lees de vaste kosten af van de grafiek.

   400 *euro*

De totale kosten stijgen als de productiehoeveelheid stijgt, maar ze stijgen niet overal even sterk. Zo stijgen ze sterker – de grafiek is steiler – bij een productieniveau van 8 (maal 100 liter) dan bij een productieniveau van 2 (maal 100 liter). In een continue situatie werken we met een andere definitie van marginale kosten dan in het discrete geval: hier noemen we de 'snelheid' waarmee de totale kosten toenemen, de *marginale kosten MK*. Grafisch betekent dit dat de marginale kosten gegeven zijn als de *helling* van de functie $TK(q)$, of meer precies als de *helling van de raaklijn* aan de grafiek van de functie $TK(q)$.

2. Wat is het wiskundige verband tussen de marginale kostenfunctie $MK(q)$ en de totale kostenfunctie $TK(q)$?

   *$MK(q)$ is de afgeleide van de functie $TK(q)$.*

3. Bereken de marginale kosten bij een productieniveau $q = 2$ en bij een productieniveau $q = 8$.

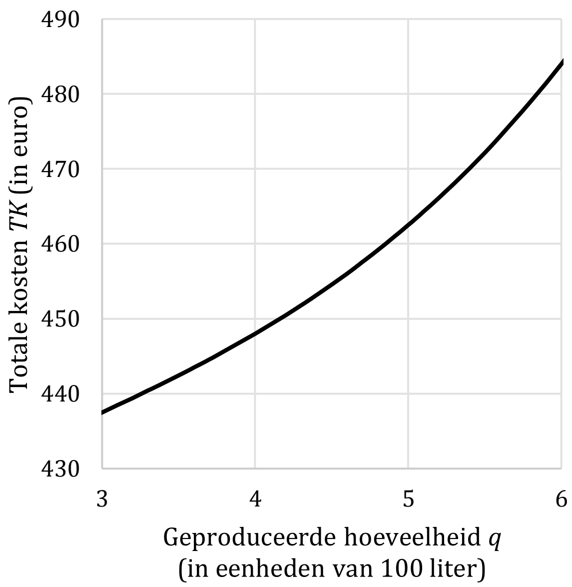
   $MK(q) = 20 - 8q + 1{,}5q^2$. *Dus* $MK(2) = 10$ *euro per eenheid (van* 100 *liter) en* $MK(8) = 52$ *euro per eenheid (van* 100 *liter). Merk op dat de dimensie van de marginale kosten dezelfde is als in de discrete versie: het is nog steeds euro per geproduceerde eenheid.*

4. De bijkomende kosten van een extra productie-eenheid zijn in deze (continue) context niet meer exact gegeven door de marginale kosten, maar kunnen er wel door benaderd worden. Illustreer dit door voor een productieniveau $q = 2$ de bijkomende kosten van een extra productie-eenheid exact te berekenen, en deze te vergelijken met de marginale kosten in dit punt.

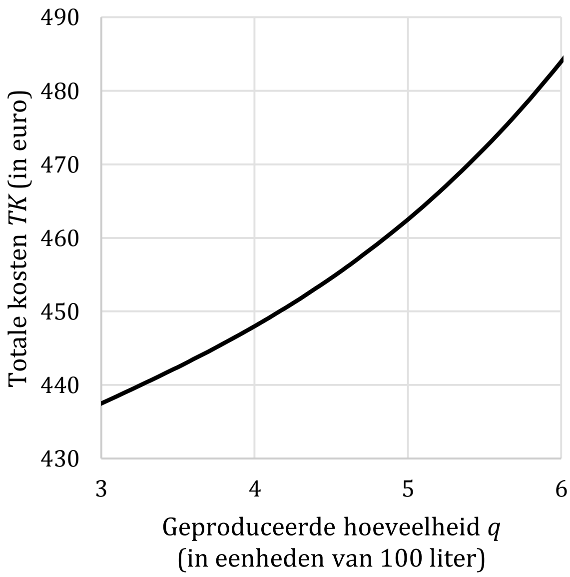
   $TK(3) - TK(2) = 9{,}5$ *euro. Vergelijk met de marginale kosten* $MK(2) = 10$. *(Van leerlingen krijg je misschien de vraag wat een extra productie-eenheid is,* 1 *liter of* 100 *liter.)*

Vervolgens bekijken we de marginale kosten als benadering voor de meerkost van een extra productie-eenheid grafisch.

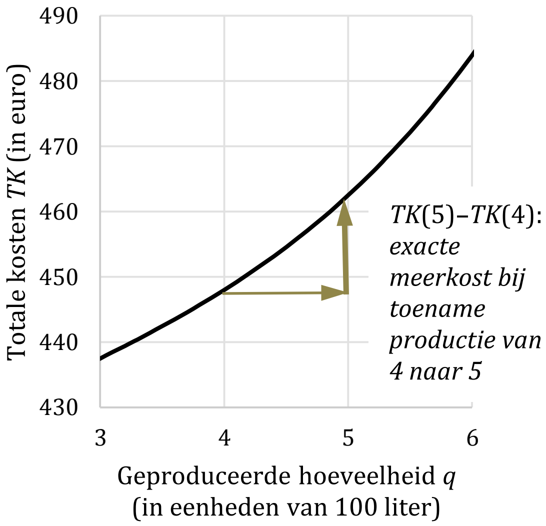
5. De onderstaande figuur geeft de totale kostenfunctie, ingezoomd op het productieniveau $q = 4$. Duid op deze grafiek de exacte bijkomende kosten aan als de productie toeneemt van $q = 4$ tot $q = 5$.

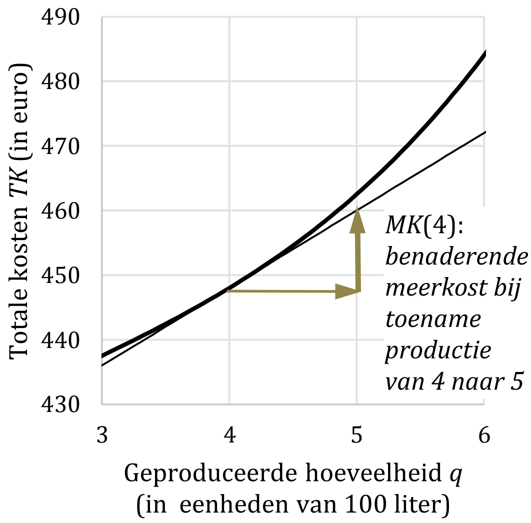



6. De marginale kosten voor het productieniveau $q = 4$ worden gegeven door de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(4, TK(4))$. Teken deze raaklijn op de onderstaande figuur. De marginale kosten kunnen nu afgelezen worden als de verticale afstand die overeenkomt met een productietoename van $q = 4$ tot $q = 5$, niet volgens de grafiek maar wel volgens de raaklijn. Duid de marginale kosten $MK(4)$ aan op de grafiek.




*Antwoord vraag* 5 *en* 6*:*




7. De totale kosten stijgen als de productie toeneemt. Wat betekent dit voor de marginale kosten?

   *De marginale kosten zijn steeds positief.*

8. Hoe kun je op de figuur in het begin van deze werktekst aflezen voor welk productieniveau de totale kosten het minst snel groeien?

   *Waar de helling van (de raaklijn aan) de grafiek het minst steil is, d.w.z. ter hoogte van het buigpunt van de grafiek. Dit is bij benadering voor* $q \approx 3$.

9. Bereken voor welke waarde van $q$ de totale kosten het minst snel groeien.

   *Dit is wanneer de marginale kosten minimaal zijn. Met de tweede afgeleide vinden we dat dit is wanneer* $q = 8/3 \approx 2{,}6667$.

10. Bepaal waar de totale kosten versneld stijgen (d.w.z. de grafiek is hol) en waar de totale kosten vertraagd stijgen (d.w.z. de grafiek is bol).

    *Met het tekenverloop van de tweede afgeleide vinden we dat de totale kosten vertraagd stijgen voor* $0 < q < 8/3$ *en versneld stijgen voor* $q > 8/3$.

Vervolgens kijken we naar de totale opbrengsten $TO$ als functie van de geproduceerde hoeveelheid $q$. We gaan ervan uit dat de producent de enige is die dit soort fruitsap produceert (hij is een *monopolist*). De hoeveelheid $q$ die hij kan verkopen, hangt af van de eenheidsprijs $p$ die hij vraagt. De zogenaamde *vraagfunctie* voor het geproduceerde fruitsap is $q = (200 - p)/6$, waarbij $p$ de eenheidsprijs is (in euro per 100 liter) en $q$ de verkochte hoeveelheid (in 100 liter). Merk op dat dit een dalende functie is: naarmate de eenheidsprijs $p$ toeneemt daalt de verkochte hoeveelheid $q$.

11. Schrijf de prijs $p$ als functie van $q$. De functie $p(q)$ wordt in de economie de *inverse vraagfunctie* genoemd: ze geeft weer hoe de eenheidsprijs $p$ bepaald wordt opdat een hoeveelheid $q$ verkocht kan worden.

    $p = 200 - 6q$

12. Geef het voorschrift van de functie $TO(q)$ die de totale opbrengsten geeft als functie van het productieniveau $q$. Ga er van uit dat de prijs zodanig bepaald wordt dat de volledige productie precies verkocht kan worden.

    $TO = pq = 200q - 6q^2$

De winst $W$ bij een productieniveau $q$ is het verschil tussen de totale opbrengsten en de totale kosten: $W = TO - TK$.

13. Toon aan dat op het productieniveau waar de winst maximaal is, de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten.

    *Op het productieniveau $q_{MAX}$ waar de winst maximaal is, is de afgeleide van de winst gelijk aan* $0$. *Dus* $0 = W'(q_{MAX}) = TO'(q_{MAX}) - TK'(q_{MAX}) = MO(q_{MAX}) - MK(q_{MAX})$. *Op dit niveau zijn de marginale opbrengsten dus gelijk aan de marginale kosten.*

14. Geldt de implicatie ook in de andere richting? Als bij een bepaald productieniveau $q$ de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten, is dan de winst noodzakelijk maximaal?

    *Op het productieniveau waar de marginale opbrengsten gelijk zijn aan de marginale kosten, is de afgeleide van de winstfunctie gelijk aan* $0$. *Dit betekent niet noodzakelijk dat de winst in dat punt maximaal is – de winst zou er bijvoorbeeld ook minimaal kunnen zijn. Een tekenonderzoek van de afgeleide van de winstfunctie of een studie van de tweede afgeleide van deze functie kan bevestigen of er een maximum bereikt wordt.*

15. Bereken het productieniveau dat overeenkomt met maximale winst.

    *De winstfunctie is gegeven door* $W(q) = -0{,}5q^3 - 2q^2 + 180q - 400$. *De afgeleide is* $W'(q) = -1{,}5q^2 - 4q + 180$. *Het enige positieve nulpunt van de afgeleide is* $q \approx 9{,}7020$. *Dit is het productieniveau dat overeenkomt met maximale winst (verifieer dat dit inderdaad een maximum van de winstfunctie is!).*

### Definities: marginale kosten en marginale opbrengsten

Als de geproduceerde hoeveelheid $q$ enkel gehele waarden kan aannemen, zeggen we dat $q$ een *discrete grootheid* is. In dit geval zijn de *marginale kosten* bij een bepaald productieniveau gedefinieerd als de bijkomende kosten voor de productie van de volgende eenheid: $MK(q) = TK(q+1) - TK(q)$. (Soms worden de marginale kosten ook gedefinieerd als de bijkomende kosten van de laatst geproduceerde eenheid.) Analoog hiermee worden de *marginale opbrengsten* bij een bepaald productieniveau gedefinieerd.

Als de geproduceerde hoeveelheid $q$ alle waarden kan aannemen in een interval, zeggen we dat $q$ een *continue grootheid* is. Economisten noemen dit de hypothese van de *onbeperkte deelbaarheid* van het goed. In dit geval zijn de *marginale kosten* gedefinieerd als de afgeleide van de totale kosten, en de *marginale opbrengsten* als de afgeleide van de totale opbrengsten. De marginale kosten voor een bepaald productieniveau $q$ zijn dan bij benadering de bijkomende kosten voor de productie van de volgende eenheid. Analoog zijn de marginale opbrengsten bij benadering de bijkomende opbrengsten bij de verkoop van de volgende eenheid.

einde lesactiviteit

Hiermee is marginaliteit geïntroduceerd in een continue context en hebben we een aantal gelijkenissen en verschilpunten tussen de discrete en continue benadering besproken. Zelfs als $q$ in de realiteit niet echt een continue grootheid is, kiezen economisten vaak voor de continue aanpak omdat het werken met afgeleiden conceptueel en rekentechnisch erg handig is. Voor het vervolg van deze paragraaf zullen wij dan ook de continue aanpak gebruiken. Merk op dat de keuze voor een discrete of continue aanpak over het algemeen zal leiden tot verschillende getalwaarden voor de marginale grootheden.

In een derde werktekst bieden we een aantal oefeningen aan bij de nieuw aangebrachte begrippen.

begin lesactiviteit

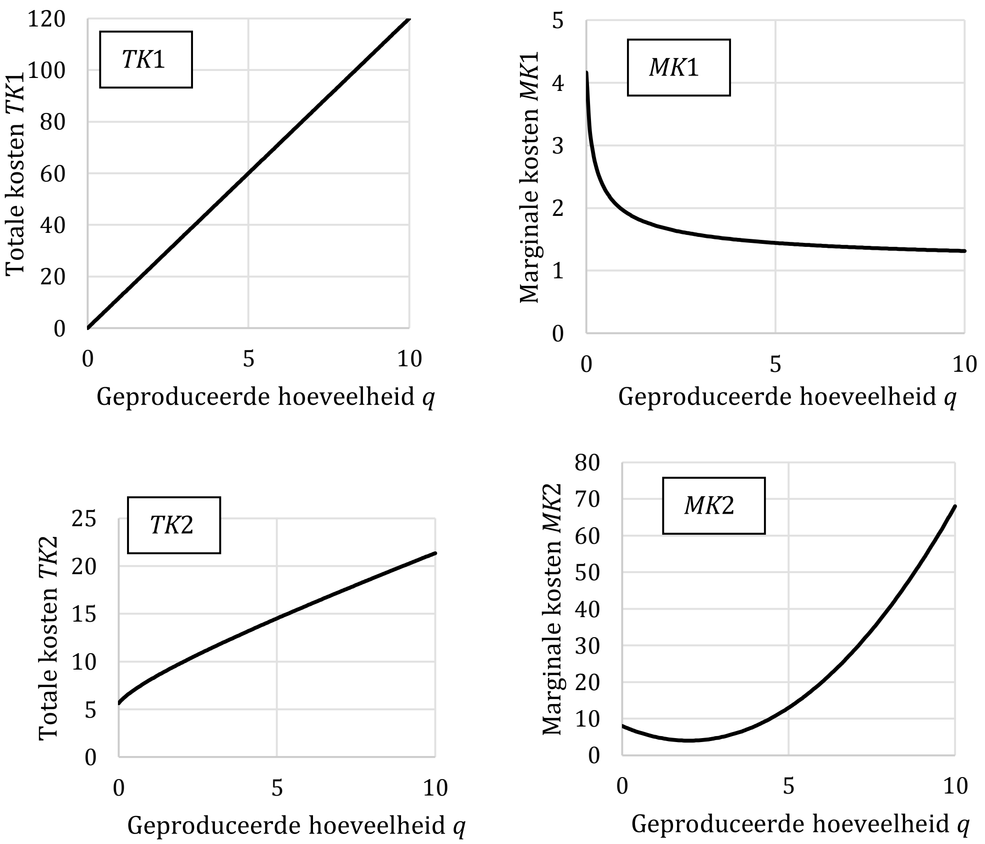
## Oefeningen op marginale kosten en opbrengsten

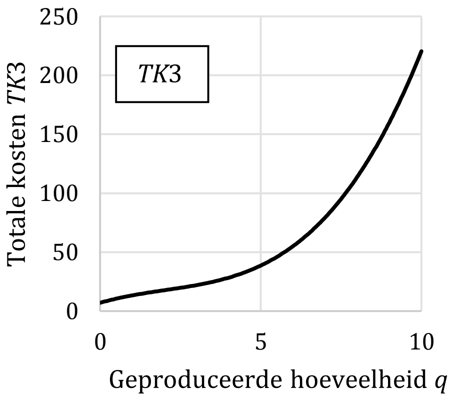
Voor deze oefeningen gaan we ervan uit dat de geproduceerde hoeveelheid $q$ een continue grootheid is. We gebruiken dus de continue versie van de definitie van marginale kosten en opbrengsten.

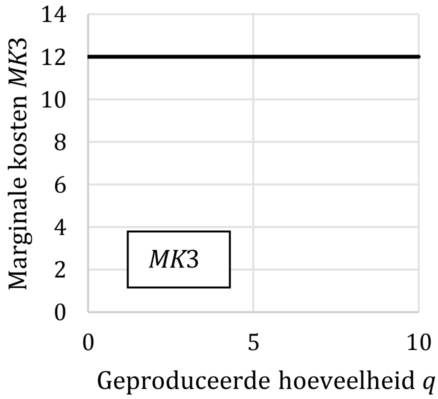
1. De totale kostenfunctie (in euro per geproduceerde eenheid) voor een bepaald goed is gegeven door $TK = \frac{q^2}{q+2} + 80$. Bepaal de marginale kosten wanneer $q$ = 5. Bereken ook de exacte bijkomende kosten voor de productie van de volgende eenheid en vergelijk met de berekende marginale kosten.

   *De gevraagde marginale kosten zijn* $45/49 \approx 0{,}9184$ *euro per geproduceerde eenheid. De exacte bijkomende kosten voor de productie van de zesde eenheid zijn* $13/14 \approx 0{,}9286$ *euro.*

2. De onderstaande figuren tonen drie totale kostenfuncties en daarnaast drie marginale kostenfuncties. Vind voor elke totale kostenfunctie de overeenkomstige marginale kostenfunctie.





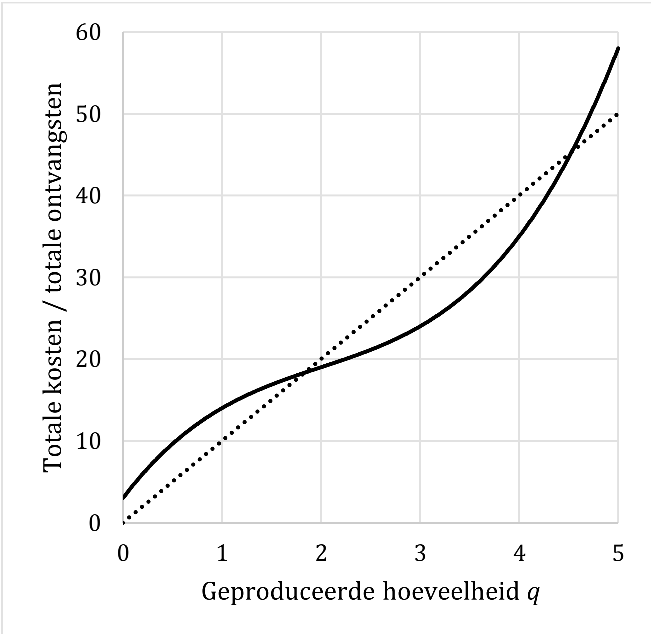

*Antwoord: TK1 – MK3, TK2 – MK1, TK3 – MK2*

3. De totale kosten en de totale ontvangsten (in eenheden van 1000 euro) voor de productie en verkoop van $q$ eenheden (van 1000 stuks) van een bepaald goed zijn gegeven door

$$TK(q) = q^3 - 6q^2 + 16q + 3 \text{ en } TO(q) = 10q.$$

a. Gebruik je grafisch rekentoestel om één grafiek te maken waarop je zowel de totale kosten als de totale ontvangsten zet. Gebruik een schaal van 0 tot 5 op de horizontale as en een schaal van 0 tot 60 op de verticale as.

*Antwoord:*




b. Leg uit hoe je op deze grafiek kunt zien voor welk(e) productieniveau(s) $q$ er een break-even bereikt wordt (d.w.z. dat de winst nul is).

*De twee snijpunten van de grafieken komen overeen met een break-even.*

c. Leg uit hoe je op de grafiek bij benadering kunt aflezen voor welk productieniveau $q$ de winst maximaal is.

*De winst is maximaal waar het verticale verschil tussen de totale ontvangsten en de totale kosten het grootst is. Voor deze waarde van q is $MO(q) = MK(q)$. De raaklijn aan de grafiek van de totale opbrengsten is voor deze q-waarde dus evenwijdig met de grafiek van de totale opbrengsten.*

d. Bereken het productieniveau $q$ waarvoor de winst maximaal is.

*De winstfunctie is gegeven door* $W(q) = TO - TK = -q^3 + 6q^2 - 6q - 3$*. De afgeleide* $W'(q) = -3q^2 + 12q - 6$ *heeft twee nulpunten:* $q \approx 0{,}5858$ *komt overeen met minimale 'winst' (met maximaal verlies) en* $q \approx 3{,}4142$ *komt overeen met maximale winst.*

e. Bepaal de marginale kosten en de marginale ontvangsten voor het productieniveau berekend in d.

*Beide bedragen* 10 000 *euro per eenheid (van* 1000 *stuks).*

einde lesactiviteit

## 4.2. Van marginaal naar totaal met een integraal

De marginale kostenfunctie is de afgeleide functie van de totale kostenfunctie. Dan kan omgekeerd de totale kostenfunctie berekend worden als primitieve van de marginale kostenfunctie, als de vaste kosten gekend zijn. Een toename in totale kosten kan berekend worden als bepaalde integraal van de marginale kosten. We geven twee voorbeelden.

begin lesactiviteit

## Onbepaalde integraal: break-even in de productie van parfum

In dit voorbeeld zullen we de totale kostenfunctie voor de productie van het parfum Eternity construeren uit de marginale kostenfunctie, en deze vervolgens gebruiken om het minimale productieniveau voor break-even te bepalen.

Een typisch patroon voor een marginale kostenfunctie is dat de marginale kosten eerst dalen (omdat de productie efficiënter wordt, dalen de bijkomende kosten van een extra eenheid) en vanaf een bepaald niveau opnieuw stijgen (vanaf een bepaald punt is het inzetten van extra middelen niet meer efficiënt). Je kunt bijvoorbeeld denken aan een pizzeria met één kok. Als er meer pizza's gevraagd worden, wordt er een tweede kok aangenomen. De twee koks samen kunnen meer dan dubbel zoveel pizza's produceren als één kok, omdat ze het werk efficiënt kunnen verdelen. Als er echter vier koks in de keuken van de pizzeria moeten werken, lopen deze elkaar voor de voeten of moeten ze wachten op elkaar. Het inzetten van een extra kok is dan minder efficiënt.

Het eenvoudigste model voor een functie die eerst daalt en vervolgens toeneemt, is een kwadratische functie. We gaan er daarom van uit dat de marginale kostenfunctie voor de productie van het parfum Eternity een kwadratische functie is.

1. Als de marginale kostenfunctie een kwadratische functie is, welk type functie is de totale kostenfunctie dan?

   *een derdegraadsfunctie (primitieve van een kwadratische functie)*

De marginale kosten voor de productie van Eternity zijn 40 euro per liter bij een productieniveau $q = 0$, zijn 25 euro per liter bij een productieniveau $q = 1$ liter en zijn 16 euro per liter bij een productieniveau $q = 2$ liter.

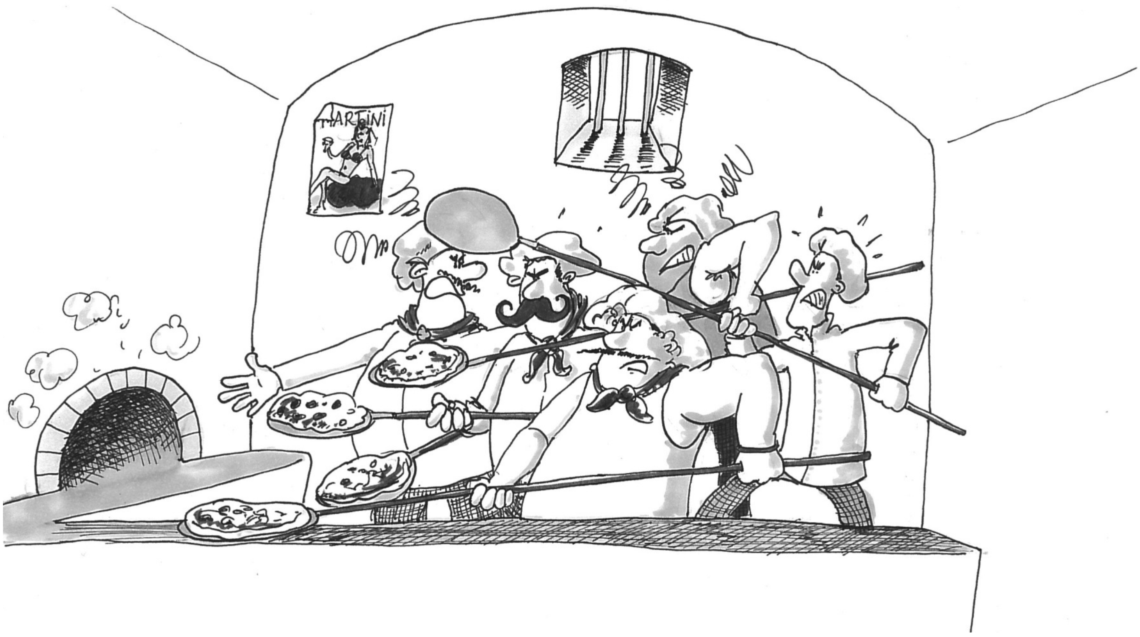
2. Stel een voorschrift op voor de marginale kostenfunctie $MK(q)$.

   $MK(q) = 3q^2 - 18q + 40$

Bovendien is gegeven dat de vaste kosten voor de productie van Eternity 50 euro bedragen.

3. Stel een voorschrift op voor de totale kostenfunctie $TK(q)$.

   *Via een onbepaalde integraal vind je de totale kosten op een constante term na. De gegeven 'beginvoorwaarde' laat dan toe om deze constante te bepalen. Zo vinden we* $TK(q) = q^3 - 9q^2 + 40q + 50$.




De inverse vraagfunctie voor het parfum Eternity is gegeven door $p = 200 - 6q$, waarbij $p$ de eenheidsprijs is (in euro per liter).

4. Bepaal de totale opbrengsten bij de verkoop van $q$ liter van Eternity.

   *We vinden* $TO(q) = p \cdot q = 200q - 6q^2$.

   *We hebben er in deze werktekst voor gekozen om de totale opbrengsten te bepalen op basis van de vraagfunctie. We hadden ook kunnen kiezen voor een aanpak die analoog is als bij de kostenfunctie. We zouden dan een marginale kostenfunctie hebben moeten opgeven. Merk op dat een expliciete 'beginvoorwaarde' in het geval van opbrengsten niet nodig is: het is immers evident de* $TO(0) = 0$.

5. Bepaal het minimale productieniveau om een break-even te verkrijgen. Hint: maak gebruik van je grafisch rekentoestel.

   *We zoeken q waarvoor TK(q) = TO(q), dus waarvoor* $q^3 - 3q^2 - 160q + 50 = 0$. *Met het grafisch rekentoestel vinden we q* $\approx$ 0,3109 *liter.*

einde lesactiviteit

begin lesactiviteit

## Bepaalde integraal: toename in totale kosten bij de productie van olijfolie

We gaan ervan uit dat de marginale kosten (in euro) voor de productie van $q$ liter olijfolie gegeven zijn door $MK(q) = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{q}}$. We bepalen hoeveel de totale kosten toenemen als het productieniveau toeneemt van 400 tot 900 eenheden.

1. Gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening om de gevraagde toename op te schrijven in termen van de marginale kostenfunctie.

   $TK(900) - TK(400) = \int_{400}^{900} MK(q)\,dq$. *Immers, omdat MK de afgeleide functie is van TK, is TK een primitieve functie van MK.*

2. Bereken de toename in totale kosten als het productieniveau toeneemt van 400 tot 900 eenheden.

$\int_{400}^{900} \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{q}}\,dq = 50\sqrt{2}\left[2\sqrt{q}\right]_{400}^{900} = 1000\sqrt{2} \approx 1414{,}21$ *euro.*

einde lesactiviteit

## 5. Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt

De toepassing die we in deze paragraaf uitwerken, heeft twee luiken. Het eerste luik past in het kader van de lessen statistiek. Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt kun je zien als een stukje beschrijvende statistiek dat verder gaat dan wat in de tweede graad al aan bod gekomen is. Ze beschrijven immers hoe gelijk of ongelijk gegevens (in ons geval: inkomens) verdeeld zijn. De Lorenzkromme doet dat op een grafische manier en de Ginicoëfficiënt onder de vorm van een kengetal. Met het tweede luik komen we in de analyse terecht. We gebruiken een functie als model voor een Lorenzkromme. De Ginicoëfficiënt kan in deze context dan berekend worden via een bepaalde integraal.

We hebben ook deze toepassing uitgewerkt onder de vorm van twee werkteksten. Zoals we in de inleiding al vermeldden, hoeft je dat niet tegen te houden om voor een andere werkvorm te kiezen. Je kunt je bijvoorbeeld door de werkteksten laten inspireren voor een onderwijsleergesprek over dit onderwerp. Of je zou er een heus project van kunnen maken, waarbij de leerlingen bijvoorbeeld veel meer zelf moeten opzoeken op het internet (gegevens over inkomens, het artikel waarin Lorenz zijn krommen geïntroduceerd heeft, alternatieven voor de Ginicoëfficiënt…) en waarin ze veel meer zelf moeten uitrekenen en tekenen.

begin lesactiviteit

## Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt discreet

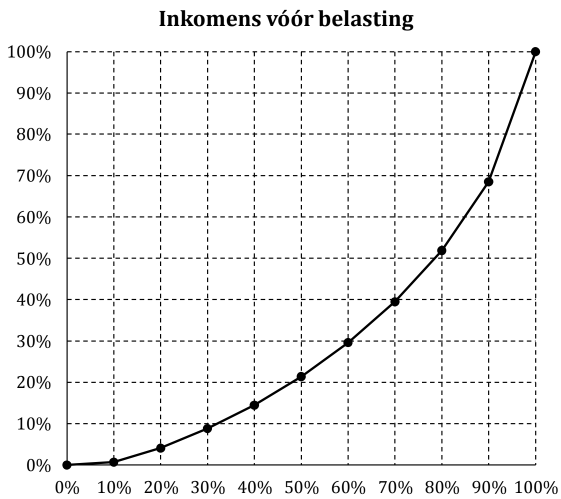
Op de website van de Algemene Directie Statistiek van de Federale Overheidsdienst Economie kun je heel wat statistische gegevens vinden. We baseerden ons op deze informatie voor de onderstaande tabel over de Belgische inkomens in 2012.

| Percentiel | Totaal netto belastbaar inkomen | | | | Totale belasting | | Inkomen na belasting | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Bovengrens (in €) | Totaal bedrag (in €) | In % van het totaal | Cumulatief % | Totaal bedrag (in €) | In % van het totaal | Totaal bedrag (in €) | In % van het totaal | Cumulatief % |
| 0% | 0 | 0 | 0,0% | 0,0% | | | | | 0,0% |
| 10% | 6 052 | 1 312 544 884 | 0,7% | 0,7% | -27 692 440 | -0,1% | 1 340 237 324 | 0,9% | 0,9% |
| 20% | 12 796 | 6 313 916 088 | 3,4% | 4,1% | 22 812 227 | 0,1% | 6 291 103 861 | 4,4% | 5,3% |
| 30% | 15 475 | 8 641 258 037 | 4,7% | 8,8% | 166 464 142 | 0,4% | 8 474 793 895 | 6,0% | 11,3% |
| 40% | 18 788 | 10 519 535 708 | 5,7% | 14,5% | 879 513 149 | 2,0% | 9 640 022 559 | 6,8% | 18,1% |
| 50% | 22 610 | 12 724 236 290 | 6,9% | 21,4% | 1 764 913 727 | 4,1% | 10 959 322 563 | 7,7% | 25,8% |
| 60% | 26 981 | 15 233 590 518 | 8,2% | 29,6% | 2 855 653 518 | 6,6% | 12 377 937 000 | 8,7% | 34,5% |
| 70% | 32 775 | 18 281 825 330 | 9,9% | 39,5% | 3 756 234 184 | 8,7% | 14 525 591 146 | 10,2% | 44,7% |
| 80% | 42 226 | 22 828 867 292 | 12,4% | 51,9% | 5 425 606 187 | 12,6% | 17 403 261 105 | 12,3% | 57,0% |
| 90% | 59 482 | 30 669 245 328 | 16,6% | 68,5% | 8 444 276 011 | 19,7% | 22 224 969 317 | 15,7% | 72,7% |
| 100% | | 58 288 892 905 | 31,5% | 100,0% | 19 675 971 838 | 45,8% | 38 612 921 067 | 27,2% | 99,9% |
| **Totaal** | | 184 813 912 381 | 100,0% | | 42 963 752 542 | 100,0% | 141 850 159 837 | 100,0% | |

1. Begrijp je wat in elke kolom voorgesteld wordt? Controleer wat je denkt door enkele getallen na te rekenen.

   *Percentiel: de bovengrens van bijvoorbeeld* 6052 *EUR, die bij percentiel* 10 *hoort, vormt de grens tussen de* 10% *laagste aangiftes en de* 90% *hoogste. Cumulatief percentage: de* 40% *aangiftes met de laagste inkomens krijgen samen* 14,5% *van het totale inkomen van alle Belgen.*

De onderstaande grafiek is gemaakt op basis van deze tabel.



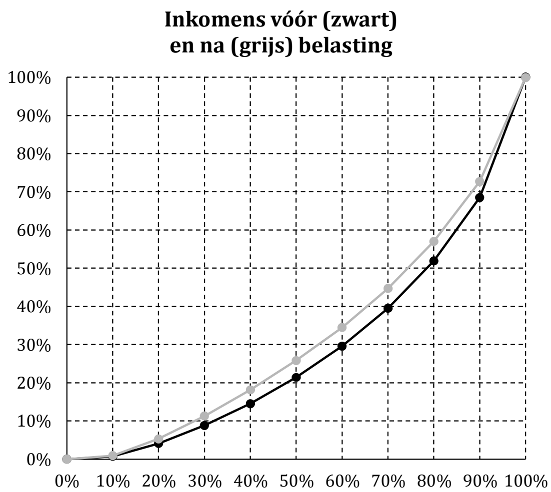

We onderzoeken eerst wat de veelhoekslijn in deze grafiek voorstelt. Je ziet elf punten.

2. In welke kolommen uit de tabel vind je de coördinaatgetallen van deze punten terug?

   *Elk punt heeft als eerste coördinaat een getal uit de kolom 'Percentiel' en als tweede coördinaat het overeenkomstige getal uit de kolom 'Cumulatief %' van 'Totaal netto belastbaar inkomen'.*

De veelhoekslijn in deze grafiek wordt een Lorenzkromme genoemd, naar de Amerikaanse economist Max O. Lorenz (1876-1959). Het is misschien wel een beetje raar om een veelhoekslijn kromme te noemen, maar het is nu eenmaal gebruikelijk. In de volgende opdrachten zul je achterhalen met welke bedoeling Lorenz deze veelhoekslijn introduceerde in een artikel dat in 1905 verscheen.

Omdat gezinnen belastingen betalen, gaat er iets – veel of weinig – van hun inkomen af. In de tweede figuur is de Lorenzkromme van de inkomens na belastingen toegevoegd.




3. Leg in eigen woorden uit welke informatie je kunt halen uit het vijfde punt uit de nieuwe grafiek.

   *De* 40% *mensen met het laagste inkomen krijgen samen bijna* 20% *van het totale inkomen na belastingen.*

4. Wat is het meest ongelijk verdeeld: de inkomens vóór of na belastingen? Hoe kun je dat in de grafiek zien?

   *De inkomens vóór belastingen. De punten van die grafiek liggen lager, behalve natuurlijk het eerste en het laatste, die noodzakelijk samenvallen met het eerste en het laatste punt van de vorige Lorenzkromme. In het begin gaat de grafiek 'vóór belastingen' trager omhoog. Dat betekent dat de laagste inkomens een kleiner deel van het totale inkomen krijgen.*

5. Teken in dezelfde figuur ook de Lorenzkromme van een denkbeeldig land waar de inkomens perfect gelijk verdeeld zijn.

   *Deze Lorenzkromme is het lijnstuk dat de oorsprong verbindt met het punt* $(1, 1)$*: omdat iedereen evenveel krijgt, krijgt de 'armste' x procent van de bevolking precies x procent van het totale inkomen.*

6. Hoe ziet de Lorenzkromme eruit van een denkbeeldig land met de meest extreme ongelijkheid in inkomens?

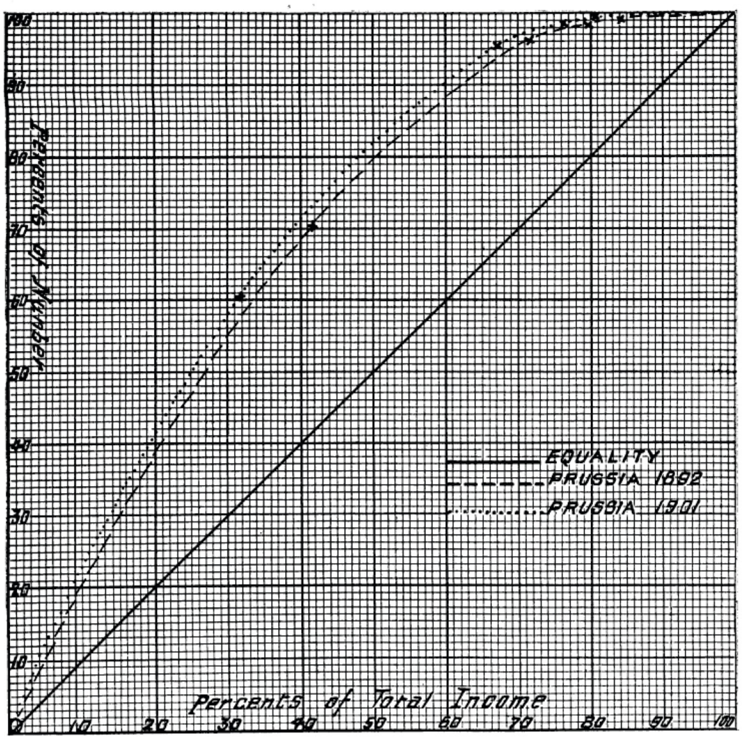
   *De meest extreme ongelijkheid die denkbaar is, is dat één persoon het volledige inkomen krijgt. De Lorenzkromme vertrekt dan horizontaal om pas helemaal op het einde verticaal omhoog te gaan naar het punt* $(1, 1)$.

In zijn artikel uit 1905 bekritiseerde Lorenz eerst een aantal manieren die door andere auteurs gebruikt werden om ongelijkheid in de verdeling van inkomen of vermogen te vergelijken (tussen twee landen, op twee tijdstippen…). Vervolgens introduceerde hij de Lorenzkromme (die hij niet zelf zo noemde) als een nieuw en beter middel. Veel van de kritiek die Lorenz in het artikel geeft, is voor ons niet zo interessant omdat de eerdere methoden om ongelijkheid weer te geven inderdaad nogal rudimentair waren.

7. Een van de principes die Lorenz vooropstelde voor een goede beschrijving van de ongelijkheid in een verdeling, is het volgende: als alle inkomens verdubbelen, dan verandert de ongelijkheid in de verdeling niet. Voldoen Lorenzkrommen aan deze voorwaarde?

   *Ja, bijvoorbeeld: de* 10% *personen met het laagste inkomen blijven in die situatie en omdat niet alleen hun eigen inkomen maar ook het totale inkomen van de hele bevolking verdubbelt, blijft de verhouding tussen het gezamenlijke inkomen van die* 10% *en het totale inkomen gelijk.*

We bekijken nu een van de illustraties die Lorenz in zijn artikel geeft. Hij maakte de volgende grafiek op basis van gegevens over de inkomens in Pruisen in 1892 en 1901 (met de hand en op millimeterpapier!).



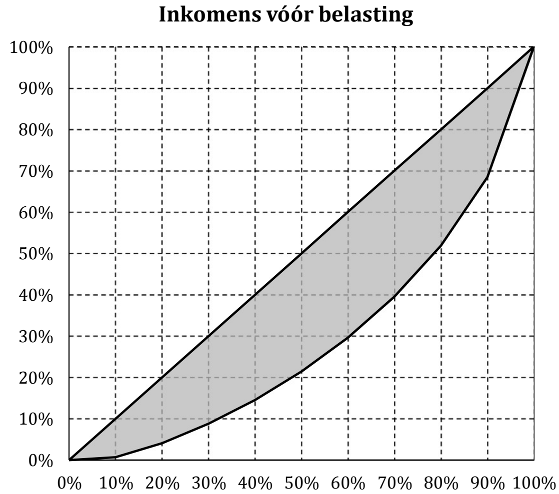

8. Bekijk hoe Lorenz de assen benoemt. Is dat in overeenstemming met wat wij gedaan hebben?

   *Net zoals wij beschouwt Lorenz het cumulatieve percentage van het totale inkomen en het cumulatieve percentage van de bevolking (geordend volgens de hoogte van het inkomen), maar tegenwoordig zijn de assen omgewisseld in vergelijking met de oorspronkelijke versie van Lorenz. De oorspronkelijke Lorenzkrommen zijn dan ook het spiegelbeeld van de huidige t.o.v. de eerste bissectrice. Wij zullen verder blijven werken met de 'moderne' versie.*

9. Is de ongelijkheid in Pruisen toegenomen of afgenomen tussen 1892 en 1901? Verklaar je antwoord.

   *Toegenomen: de puntlijn ligt hoger dan de streepjeslijn en met deze keuze voor de assen betekent dit dat lage inkomens in* 1901 *een kleiner percentage van het totale inkomen krijgen.*

De Italiaanse statisticus Corrado Gini (1884-1965) kende de methode om ongelijkheid van inkomens (en andere variabelen) te vergelijken via Lorenzkrommen. In een artikel uit 1914 formuleerde hij de kritische bedenking dat de grafische methode van Lorenz niet toelaat om een precieze maat te geven voor de graad van ongelijkheid (of concentratie, zoals hij het noemde) en dat het daardoor niet altijd mogelijk is om de ongelijkheid van twee inkomensverdelingen te vergelijken (bijvoorbeeld als hun Lorenzkrommen elkaar snijden, zodat de ene niet overal boven de andere ligt). Daarop stelde hij een manier voor om op basis van de Lorenzkromme te komen tot een *getal* dat uitdrukt hoe gelijk of ongelijk inkomens verdeeld zijn in een land. (Omdat zijn voorstel niet helemaal nieuw was, maar een grafische interpretatie van een maat voor ongelijkheid die hij zelf enkele jaren eerder ontwikkeld en gepubliceerd had, vind je vaak 1912 als jaartal voor de ontdekking van de Ginicoëfficiënt). Zijn idee was om hiervoor het dubbel van de oppervlakte te nemen van het gebied tussen de Lorenzkromme en de eerste bissectrice. Dat getal wordt nu de Ginicoëfficiënt genoemd. Dit wordt geïllustreerd in de volgende figuur voor de inkomens vóór belastingen.




10. Vind je dat een goede keuze? Waarom zou Gini niet gewoon de oppervlakte genomen hebben i.p.v. het dubbele van de oppervlakte?

    *Het is een goede keuze in de volgende zin: grote inkomensongelijkheid betekent dat de Lorenzkromme 'traag start' en op het einde 'snel stijgt', waardoor ze 'ver van de eerste bissectrice' ligt. Grotere inkomensongelijkheid betekent dus een grotere oppervlakte. De oppervlakte neemt een waarde aan tussen* 0 *(volledige gelijkheid van inkomens) en* 0,5 *(meest extreme ongelijkheid). Omdat het logischer is om een getal tussen* 0 *en* 1 *te gebruiken, neemt men niet de oppervlakte zelf, maar het dubbel van de oppervlakte.*

    *Je kunt natuurlijk ook kritiek formuleren op de idee om een complex fenomeen als inkomensongelijkheid te reduceren tot één getal (een kritiek die trouwens algemeen van toepassing is als een fenomeen herleid wordt tot één getal). De grafische methode van Lorenz laat bijvoorbeeld veel meer gelegenheid voor nuance. Lorenz vergeleek in zijn artikel bijvoorbeeld twee fictieve landen waarbij de lage inkomens in het ene land meer ongelijk verdeeld waren en de hoge inkomens meer ongelijk in het andere land. De Ginicoëfficiënt kan zo'n subtieler verschil niet weergeven.*

11. Bereken de Ginicoëfficiënt van de inkomens vóór belastingen. Gebruik ICT (rekenblad, GeoGebra, rekenmachine, …) om het rekenwerk te beperken. Rond je eindresultaat af op twee decimalen. Controleer of je resultaat in overeenstemming is met de volgende informatie: de Ginicoëfficiënt voor de inkomens <u>na</u> belastingen is 0,36.

    *Het gebied waarvan je de oppervlakte moet berekenen, is een veelhoek. GeoGebra kan de oppervlakte van die veelhoek voor jou berekenen. Als je een rekenblad gebruikt, splits je het gebied op in* 10 *trapezia* *en gebruik je de formule voor de oppervlakte van een trapezium. De Ginicoëfficiënt is* $0{,}42$*. Dat is groter dan* $0{,}36$*. Na belastingen zijn de inkomens inderdaad meer gelijk verdeeld.*

De website http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_income_equality toont gegevens over de Ginicoëfficiënt van heel wat landen in de wereld. Je merkt dat verschillende internationale organisaties een Ginicoëfficiënt berekenen en dat ze tot verschillende resultaten komen, wellicht omdat ze van verschillende gegevens vertrekken.

12. Je merkt op de website ook dat er ook andere kengetallen dan de Ginicoëfficiënt gebruikt worden voor inkomensongelijkheid. Geef een voorbeeld en verklaar hoe het getal berekend wordt.

    *Er wordt ook gebruik gemaakt van de verhouding tussen het gemiddelde inkomen van de* $10$ *(of* $20$*) procent rijkste inwoners en het gemiddelde inkomen van de* $10$ *(of* $20$*) procent armste inwoners.*

einde lesactiviteit

We hebben hiermee het eerste luik van onze toepassing achter de rug.

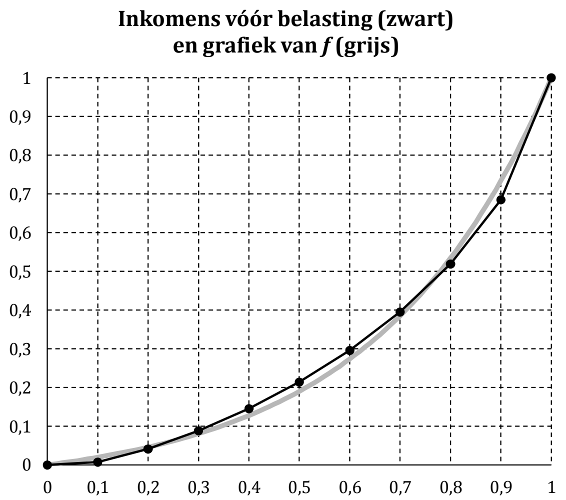
In de tweede werktekst maken we de overgang van de statistiek naar de analyse: de Lorenzkromme wordt de grafiek van een functie en de Ginicoëfficiënt een getal dat je via een bepaalde integraal berekent. De statistische aanpak hoort bij het meer praktische gebruik. Functies en integralen worden gebruikt in een meer theoretisch kader. Je kunt dit vergelijken met de overstap die we ook al in de vorige paragrafen maakten, bijvoorbeeld bij de marginale kostprijs. Die had aanvankelijk een heel concrete en praktische betekenis: bijkomende kostprijs bij de productie van een extra eenheid. Naderhand maakten we de overstap naar marginale kostprijs als afgeleide. In die vorm is de marginale kostprijs wat moeilijker te verbinden met een heel concrete realiteit, maar in een meer theoretisch kader is het gebruik van de afgeleide juist veel handiger. In de werktekst maken we de overgang van statistiek naar analyse door een eenvoudig voorschrift te zoeken dat goed aansluit bij de statistisch bepaalde Lorenzkromme uit de eerste werktekst. Gaandeweg laten we de realiteit dan meer en meer los.

De tweede werktekst is geschreven als een vervolg op de eerste. Het is echter ook mogelijk om in de klas alleen de statistische kant of alleen de analytische kant te behandelen. De eerste werktekst vormt op zichzelf een afgerond geheel en kan dus gebruikt worden zonder verder te gaan met het vervolg. Maar ook als je Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt alleen als een kleine toepassing van integralen wilt behandelen, zonder de statistische aanloop, dan is dat perfect mogelijk. Je legt dan eerst kort aan je leerlingen uit wat een Lorenzkromme is. Je kunt dat doen zoals in de eerste werktekst, maar dan onmiddellijk via een functie. De afhankelijke veranderlijke $y$ staat dan voor het gezamenlijke inkomen van de armste $x$ procent van de bevolking, waarbij $y$ bekeken wordt als percentage van het totale inkomen van de volledige populatie. Vervolgens leg je uit wat de Ginicoëfficiënt is, gewoon zoals in de vorige werktekst. Dat volstaat om een bepaalde integraal te kunnen gebruiken voor het berekenen van een Ginicoëfficiënt. Je vindt in deze paragraaf zeker voldoende informatie om zelf een dergelijke kleine toepassing binnen de analyse uit te werken. Wij hebben in deze loep echter voor een andere aanpak gekozen. We hebben de overgang van de statistische aanpak naar de aanpak met functies als model zorgvuldig willen uitwerken. Dat vraagt wel een beetje tijd, maar het laat leerlingen tegelijk een belangrijk facet van de wiskunde zien.

begin lesactiviteit

## Lorenzkromme en Ginicoëfficiënt continu

In de vorige werktekst vertrokken we van statistische gegevens over (onder andere) de Belgische inkomens vóór belastingen in 2012. Op basis van deze gegevens, tekenden we een veelhoekslijn, die we de Lorenzkromme noemden (zie de onderstaande figuur) en die een beeld geeft van de ongelijkheid in de verdeling van de inkomens. In de onderstaande figuur tekenden we ook de grafiek van de functie $f$ met vergelijking $f(x) = 0{,}0582(e^{2{,}9x} - 1)$. Je merkt dat deze kromme een goede benadering vormt voor de veelhoekslijn. Je ziet dat we op de assen nu gewoon getallen gebruiken i.p.v. percentages.




Je vraagt je natuurlijk af hoe we deze benaderende functie op het spoor gekomen zijn. Daar gaan we verder in deze werktekst dieper op in, maar eerst willen we laten zien dat het handig is om over zo'n benaderende functie te beschikken. In de vorige werktekst gebruikten we Lorenzkromme om de Ginicoëfficiënt te berekenen. Deze Ginicoëfficiënt is een samenvatting in één getal van de mate van ongelijkheid in de verdeling van de inkomens. Het ging over een omslachtige berekening. Nu we de veelhoekslijn benaderd hebben door de grafiek van een functie, kunnen we de Ginicoëfficiënt (of een goede benadering ervan) vinden door een integraal te berekenen.

1. Welke integraal moeten we dan berekenen? Gebruik in je formule een algemene functie $f$, dus niet specifiek de functie die hierboven gegeven werd.

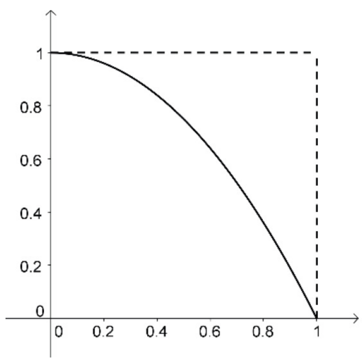
   *De Ginicoëfficiënt is het dubbel van de oppervlakte van een gebied dat begrensd wordt door twee grafieken: de grafiek van $f$ en de eerste bissectrice (de grafiek van de identieke functie). Zo zien we dat de Ginicoëfficiënt gegeven wordt door de integraal $2 \cdot \int_0^1 (x - f(x))\,dx$. Je vindt de alternatieve uitdrukking $1 - 2 \cdot \int_0^1 f(x)\,dx$ als je gebruikt dat de Ginicoëfficiënt gelijk is aan $1$ min twee keer de oppervlakte tussen de Lorenzkromme en de horizontale as.*

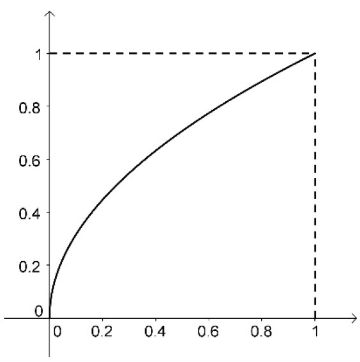
2. Bereken deze integraal voor de functie die hierboven gegeven werd.

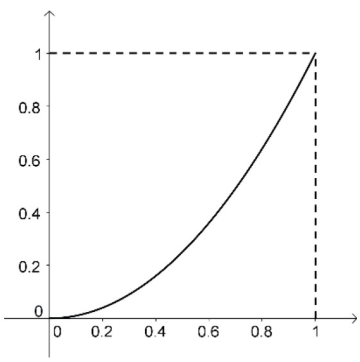
   *Je vindt (afgerond) $0{,}43$ voor de Ginicoëfficiënt, wat inderdaad heel dicht ligt bij de waarde die we eerder berekenden ($0{,}42$).*

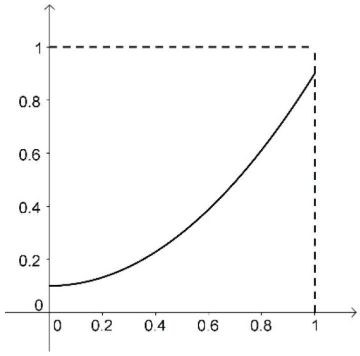
Nu gaan we in op de vraag hoe we aan deze benaderende functie op het spoor gekomen zijn. Eerst merken we op dat niet zomaar elke functie bruikbaar is voor de beschrijving van een Lorenzkromme.

3. Hieronder zie je zes grafieken van functies. Welke van deze grafieken zouden Lorenzkrommen van een of ander land kunnen voorstellen? Verklaar je antwoord.

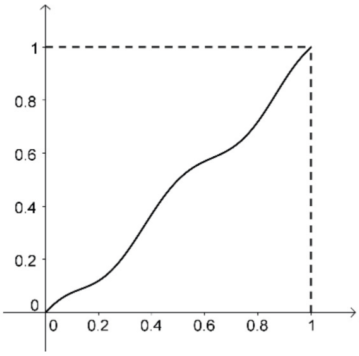

grafiek A


grafiek B

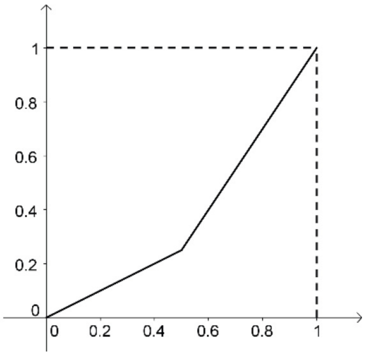

grafiek C




grafiek D




grafiek E




grafiek F

*Alleen grafiek C en F zijn goed. Omdat we ons in het vervolg beperken tot functies die over het hele interval* $]0,\ 1[$ *afleidbaar zijn, zullen we grafiek F uiteindelijk toch niet accepteren. Grafiek D kan niet omdat een Lorenzkromme door* $(0,\ 0)$ *en* $(1,\ 1)$ *gaat (de armste* 0% *van de bevolking krijgt* 0% *van het inkomen en de armste* 100% *van de bevolking krijgt* 100% *van het inkomen). In functietermen:* 0 *wordt afgebeeld op* 0 *en* 1 *op* 1*. Grafiek B kan niet omdat een Lorenzkromme overal onder de eerste bissectrice moet liggen. De armste $x$ procent van de bevolking krijgt per definitie immers nooit meer dan $x$ procent van het totale inkomen. Grafiek A kan niet omdat een functie die bij een Lorenzkromme hoort, stijgend is: een groter percentage van de bevolking krijgt een groter deel van het totale inkomen. Ook grafiek E kan niet. Een Lorenzkromme keert haar holle zijde immers overal naar boven. Het is iets moeilijker om dat in te zien en daarom leggen we het eerst uit voor het discrete geval. De inwoners zijn gerangschikt van arm naar rijk. Van links naar rechts neemt het inkomen dus toe. Omdat het inkomen van een persoon aangeeft met hoeveel de Lorenzkromme omhoog gaat, betekent dit dat de Lorenzkromme steeds sneller omhoog gaat. Nu continu: je kunt dezelfde redenering ook maken door gebruik te maken van de afgeleide. De afgeleide van de bijbehorende functie geeft aan hoe snel de $y$-waarde (het percentage van het totale inkomen) toeneemt als de $x$-waarde (het beschouwde percentage van de bevolking) toeneemt. Omdat de inwoners van arm naar rijk gerangschikt zijn, neemt deze snelheid toe. De afgeleide van de functie is daarom stijgend en de tweede afgeleide is dus positief.*

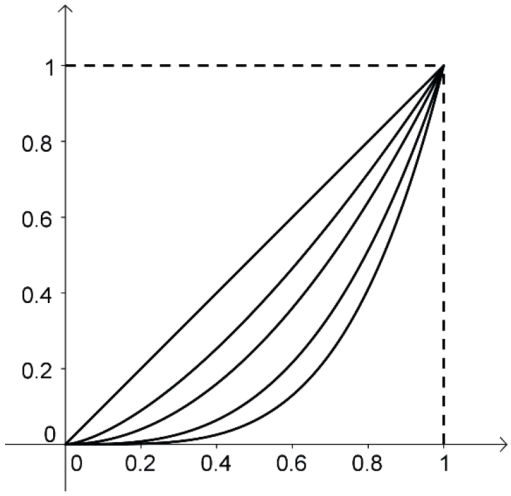
In de voorgaande opgave zijn we op zoek gegaan naar eigenschappen waar een functie aan moet voldoen opdat haar grafiek (op het interval $[0,\ 1]$) een Lorenzkromme zou kunnen zijn. Zo'n functie zullen we gemakkelijkheidshalve een Lorenzfunctie noemen. We zetten alles nu op een rijtje. We zullen werken met functies die gedefinieerd zijn op het gesloten interval $[0,\ 1]$. Verder zullen we ervan uitgaan dat ze twee keer afleidbaar zijn in het open interval $]0,\ 1[$ (d.w.z. dat de eerste en tweede afgeleide bestaan in alle punten van dat open interval).

4. Vul de volgende definitie aan: een functie $f$ die gedefinieerd is op het gesloten interval $[0,\ 1]$ en twee keer afleidbaar is in het open interval $]0,\ 1[$, is een Lorenzfunctie als en slechts als …

   *…* $f(0) = 0, f(1) = 1$ *en* $f(x) \leq x$, $f'(x) \geq 0$ *en* $f''(x) \geq 0$ *voor alle* $x$ *in* $]0,\ 1[$. *We hebben de ongelijkheid tussen $f(x)$ en $x$ opgenomen in de definitie hoewel hij eigenlijk uit de andere voorwaarden volgt. Het is een afweging: het bewijs is haalbaar voor 6u-leerlingen, maar ook weer niet heel eenvoudig en het leidt hier misschien teveel af van de essentie van het verhaal. We geven hier de voornaamste stappen. Definieer de functie* $g(x) = f(x) - x$. *Vertaal de Lorenzfunctievoorwaarden voor $f$ in termen van $g$. Stel dat er een punt $x_0$ bestaat in* $]0,\ 1[$ *zo dat* $f(x_0) > x_0$. *Gebruik de middelwaardestelling van Lagrange voor de functie $g$ op de intervallen* $[0,\ x_0]$ *en* $[x_0, 1]$. *Op die manier vind je in het eerste interval een punt waar de afgeleide van $g$ positief is en in het tweede interval een punt waar de afgeleide van $g$ negatief is. Dit is in strijd met de voorwaarde dat* $f''(x) \geq 0$ *en dus ook* $g''(x) \geq 0$ *voor alle $x$ in* $]0, 1[$.

5. Zoek eenvoudige functies die aan deze voorwaarden voldoen.

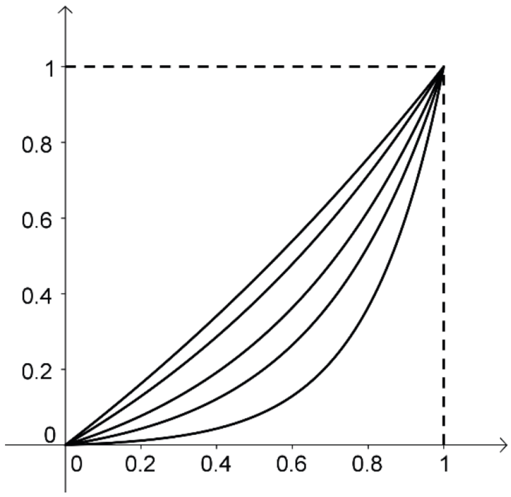
   *De leerlingen zouden hier zeker de functies van de vorm* $f(x) = x^a$, *met* $a \geq 1$, *moeten vinden. Merk op dat we hier niet één (of enkele) functie(s) geven, maar een hele verzameling van functies, met een parameter erin. De onderstaande figuur toont grafieken van enkele van deze functies. De bijbehorende waarde voor de parameter a zijn* 1, 1,5, 2, 3 *en* 4 *(van 'boven' naar 'beneden').*




In de volgende opgave kijken we naar een verzameling van functies die je misschien wel, maar misschien ook niet gevonden hebt in de vorige opgave.

6. Alle exponentiële functies $f(x) = e^{kx}$, met $k > 0$ (of als je ze liever in een andere vorm ziet: $f(x) = A^x$, met $A > 1$), voldoen aan de voorwaarde voor de afgeleide en de tweede afgeleide, maar hebben niet de juiste functiewaarde in 0 en 1. Dat kun je verhelpen door de grafiek te verschuiven en verticaal te vermenigvuldigen. Vind hiermee een verzameling van Lorenzfuncties.

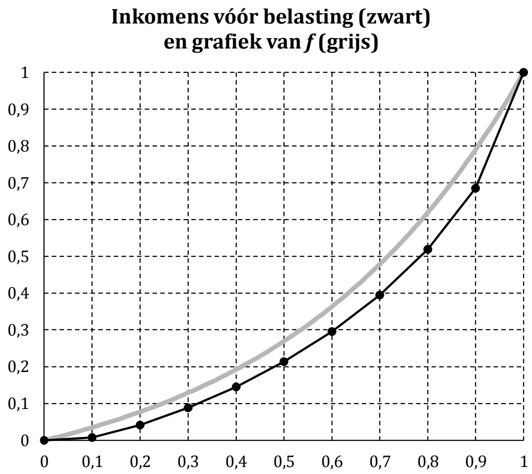
   *Je vindt* $f(x) = \frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$*, met* $k > 0$*. Een equivalente vorm is* $f(x) = \frac{A^x-1}{A-1}$*, met* $A > 1$*. Ook van deze functies tonen we enkele grafieken (met parameterwaarden* 0,5*,* 1*,* 2*,* 3 *en* 5 *voor* $k$*, weer van 'boven' naar 'beneden').*

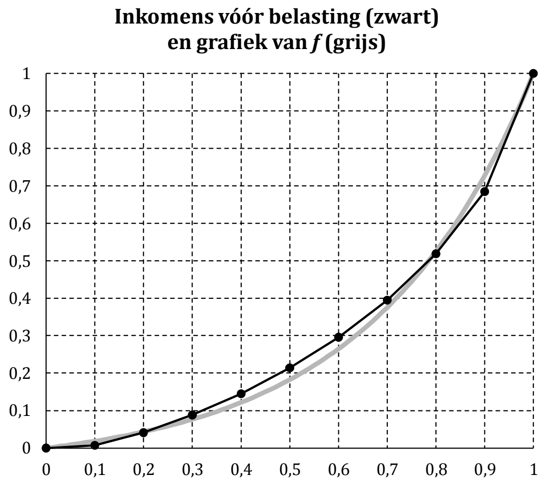



We hebben hiermee de eerste stap gezet in de zoektocht naar een functie waarvan de grafiek de gegeven Lorenzkromme goed benadert. We hebben namelijk een verzameling van functies gevonden die dienst kan doen. In opgave 5 heb je ongetwijfeld zelf nog andere types van functies gevonden die we zouden kunnen gebruiken. Uit die verschillende types kiezen we er dus één uit. We zullen hier met name verder werken met de functies uit opgave 6.

Voor elke waarde van de parameter $k$ krijgen we een Lorenzfunctie. We zetten nu de tweede stap: we zoeken die waarde voor de parameter $k$ die de grafiek oplevert die het beste aansluit bij de veelhoekslijn.

De vraag is daarbij natuurlijk wat dat 'best aansluiten bij' precies betekent. Via grafische inspectie kom je al een heel eind. Zo kun je in de onderstaande figuren bijvoorbeeld duidelijk zien dat $k = 3$ (rechts) een beter resultaat oplevert dan $k = 2$ (links).




In de toegepaste wiskunde gaat men verder dan deze grafische aanpak en wordt het volgende criterium vaak gebruikt. Je hebt het misschien al eerder ontmoet als je lineaire regressie bestudeerd hebt. We leggen het criterium onmiddellijk uit aan de hand van ons voorbeeld:

- Maak voor elk van de elf $x$-waarden die gebruikt werden voor de veelhoekslijn het verschil tussen enerzijds de $y$-waarde uit de tabel en anderzijds de $y$-waarde volgens de voorgestelde functie.
- Kwadrateer deze verschillen en tel ze op.
- Deze som hangt af van de waarde van $k$. Kies die waarde van $k$ waarvoor deze som minimaal is.

Voor $k = 2$ vind je een som van 0,041 480. Voor $k = 3$ is de som veel kleiner: 0,004 995. Dit bevestigt onze visuele inspectie. De parameterwaarde $k = 2{,}9$ scoort met een som van 0,0043 161 nog net iets beter voor het criterium. De grafiek voor deze parameterwaarde vind je in het begin van deze werktekst. Dit is immers de functie waarmee we deze werktekst begonnen zijn. We hebben hiermee verklaard hoe we aan deze functie gekomen zijn.

Je kunt nog iets beter doen, namelijk de som van hierboven uitdrukken als functie van de parameter $k$ en de optimale waarde bepalen via afleiden naar $k$. Met de computeralgebra van GeoGebra vonden we op die manier 2,87 voor $k$.

7. Een andere verzameling van Lorenzfuncties is $f(x) = x^a$, met $a \geq 1$. Bepaal zelf welke waarde van $a$ de beste benadering oplevert volgens het criterium dat we hierboven besproken hebben. Beperk je tot parameterwaarden met één decimaal.

   *De parameterwaarde $a = 2{,}5$ geeft het beste resultaat.*

Met behulp van een integraal kun je met één berekening de Ginicoëfficiënt bepalen voor alle Lorenzfuncties uit zo'n verzameling. Preciezer uitgedrukt: je kunt een formule vinden die de Ginicoëfficiënt geeft in functie van de parameter.

8. Bereken op die manier de Ginicoëfficiënt voor alle Lorenzfuncties van de vorm $f(x) = x^a$, met $a \geq 1$. Beschrijf hoe de Ginicoëfficiënt verandert in functie van $a$: stijgend of dalend, limiet in oneindig…

   *De Ginicoëfficiënt wordt gegeven door $1 - \frac{2}{a+1}$. De Ginicoëfficiënt stijgt in functie van a: hoe groter a, hoe minder we aftrekken van 1. De limiet als a naar oneindig gaat, is 1. Dat is in overeenstemming met de grafieken die in de oplossing van opgave 5 gegeven zijn.*

9. Bereken ook de Ginicoëfficiënt van de Lorenzfuncties van de vorm $f(x) = \frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$, met $k > 0$. Wat is hier de limiet van de Ginicoëfficiënt als $k$ naar oneindig gaat?

   *We vinden $1 - \frac{2}{k} + \frac{2}{e^k-1}$ voor de Ginicoëfficiënt. Ook nu is de limiet in oneindig gelijk aan 1. De tweede en derde term gaan immers naar 0.*

einde lesactiviteit

Tot slot geven we aantal referenties. De tabel met de inkomens uit de werktekst, maakten we op basis van tabel B1 voor het jaar 2012 van (FOD Economie, 2014). Meer informatie over Lorenz, Gini, Lorenzkrommen en Ginicoëfficiënt vind je (bijvoorbeeld) op Wikipedia (zie bij bronnen voor de url's). We verwezen in de werktekst naar een aantal historische bronnen waarin Lorenz en Gini hun werk publiceerden. Voor Lorenz gaat het over een artikel uit 1905 (Lorenz, 1905). Het artikel is ook nu nog goed leesbaar en het is vrij beschikbaar op het internet. Voor Gini gaat het over een boek (Gini, 1912), een artikel (Gini, 2014) en een recent verschenen gedeeltelijke vertaling hiervan (Gini, 2005).

## Bronnen

Biront, C., Deprez, J. (2012). *Wiskundige begrippen en methoden Deel 2*. Mechelen: Plantyn.

Deprez, J., Laeremans, A. (2014). *Oefeningen Wiskunde voor bedrijfseconomen A.* Brussel: KU Leuven, Campus Brussel.

Deprez, J., Willems, J. (1993) Economische toepassingen in wiskundelessen. *Uitwiskeling 9(3)*, 20-42.

FOD Economie (2014), Fiscale statistiek van de inkomens - 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012.
http://statbel.fgov.be/nl/modules/publications/statistiques/arbeidsmarkt_levensomstandigheden/Statistique_fiscale_des_revenus.jsp, geraadpleegd op 26/02/2015.

Gini, C. (1912). *Variabilità e Mutuabilità. Contributo allo Studio delle Distribuzioni e delle Relazioni Statistiche*. Bologna: C. Cuppini.

Gini, C. (1914). Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri. *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti LXXIII(II)*, 1203–1248.

Gini, C. (2005): On the measurement of concentration and variability of characters. *METRON: International Journal of Statistics LXIII(1)*, 3–38.

Lorenz, M. O. (1905). Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American Statistical Association, Vol. 9 (New Series, No. 70),* 209-219.
http://www.jstor.org/stable/pdf/2276207.pdf

http://en.wikipedia.org/wiki/Max_O._Lorenz (Max O. Lorenz), geraadpleegd op 15/04/2015.

http://en.wikipedia.org/wiki/Corrado_Gini (Corrado Gini), geraadpleegd op 15/04/2015.

http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_curve (Lorenz curve), geraadpleegd op 15/04/2015.

http://en.wikipedia.org/wiki/Gini_coefficient (Gini coefficient), geraadpleegd op 15/04/2015.

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_income_equality (lijst van landen met parameters voor inkomensongelijkheid), geraadpleegd op 15/04/2015.