

Ten geleide

De volgende slides zijn gebruikt bij de presentatie over het gebruik van het programma Surfer, te downloaden en installeren vanaf de Imaginary website:

<https://imaginary.org/program/surfer>

Download ook het bestand SurferModellenNWD2018.txt van de NWD-site. Daarin staan de formules van de behandelde oppervlakken. Die kunt u kopiëren/plakken naar de invoer van het Surferprogramma (vergeet niet eventueel de knop 'Colours' in te drukken). De letters bij de formules in dit bestand komen overeen met de letters van de formules in de presentatie.

Veel plezier!

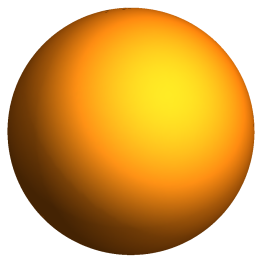
Frits Beukers (f.beukers@uu.nl)

Boetseren met oppervlakken

Frits Beukers

NWD, 3 februari 2018

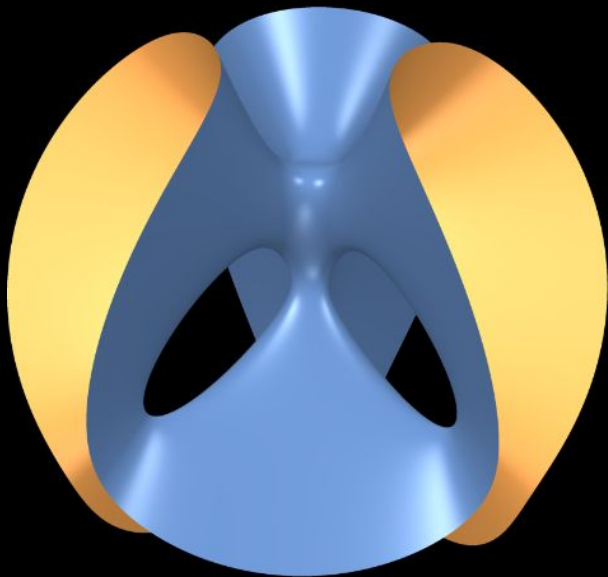
Bol



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Cubisch oppervlak van Clebsch

$$648x^2y - 216y^3 + 27z - 216x^2z - 216y^2z + 108z^2 + 113z^3 = 0$$





Basisobjecten

Tweebladige hyperboloïde:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \quad (\text{a})$$

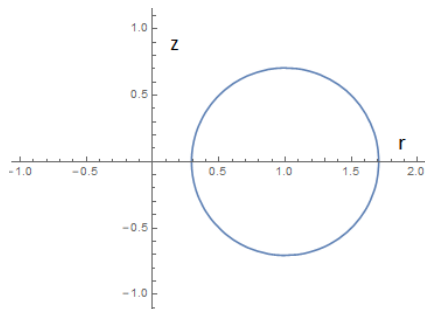
Eenbladige hyperboloïde:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad (\text{b})$$

Kegel:

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{c})$$

Torus



$$(r - 1)^2 + z^2 - a^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 + z^2 - a^2 = 0$$

Vervang r door $\sqrt{x^2 + y^2}$,

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 + 1 - a^2 = 0$$

Breng de wortel naar rechts en kwadrateer,

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1 - a^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0 \quad (d)$$

Combineren en gladstrijken

Neem de twee bollen

- $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2 = 0.$
- $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2 = 0.$

Vergelijking voor de twee bollen tegelijk,

$$((x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2)((x + 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2) = 0$$

Gladstrijken: vervang 0 door a .

$$((x - 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2)((x + 1)^2 + y^2 + z^2 - 1/2) = a \quad (e)$$

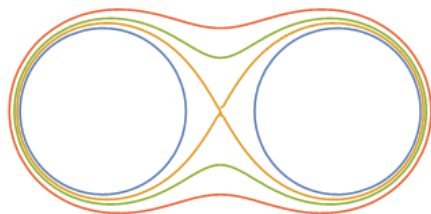
Niveaulijnen

Analogon in het vlak, twee cirkels

$$(x - 1)^2 + y^2 - 1/2 = 0, \quad (x + 1)^2 + y^2 - 1/2 = 0.$$

Neem product en vervang 0 door a ,

$$((x - 1)^2 + y^2 - 1/2) ((x + 1)^2 + y^2 - 1/2) = a$$



$$\text{—} \quad \left((x - 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) \left((x + 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\text{—} \quad \left((x - 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) \left((x + 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) = 0.25$$

$$\text{—} \quad \left((x - 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) \left((x + 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) = 0.5$$

$$\text{—} \quad \left((x - 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) \left((x + 1)^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right) = 1$$

Spookoppervlakken

Bekijk de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en de "bol"
 $(x - 1/2)^2 + y^2 + z^2 = 0$ samen,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)((x - 1/2)^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Gladstrijken:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)((x - 0.5)^2 + y^2 + z^2) = a \quad (f)$$

Niveaulijnen (bis)

Analogon in het vlak, "cirkels"

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad (x - 0.5)^2 + y^2 = 0.$$

Neem product en vervang 0 door a ,

$$(x^2 + y^2 - 1) ((x - 0.5)^2 + y^2) = a$$



- $((x - 0.5)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -0.5$
- $((x - 0.5)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -0.2$
- $((x - 0.5)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -0.05$
- $((x - 0.5)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -0.0338$
- $((x - 0.5)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

Opblazen van krommen

Bekijk de doorsnijding van $xyz = 0$ en $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

(h)

Vergelijking:

$$(xyz)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0$$

Opblazen: 0 vervangen door $a > 0$.

$$(xyz)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = a \quad \text{(i)}$$

Alien

Bekijk de doorsnijding van Quaste

$$\begin{aligned}f &= 8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 \\ &+ 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 \\ &- 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 \\ &- 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0\end{aligned}$$

en Helix

$$g = 6x^2 - 2x^4 - y^2z^2 = 0$$

Opblazen:

$$f^2 + g^2 = a \tag{j}$$

Opblazen van oppervlakken

Start met $f(x, y, z)^2 = 0$.

Opblazen: $f(x, y, z)^2 = a$.

Maar als $a > 0$ geeft dit $f(x, y, z)^2 - a = 0$ en dus

$$(f(x, y, z) - \sqrt{a})(f(x, y, z) + \sqrt{a}) = 0$$

Idee: maak deformatie afhankelijk van de plaats in de ruimte.

(k)

Bijvoorbeeld:

$$(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 1)^2 = a(z - 0.2) \quad (l)$$

met $a > 0$.

Valentina's theelepel



Uitsnijding van de kegel

We willen van $10z^2 = x^2 + y^2$ het gebied $-0.2 \leq z \leq 0.8$ uitsnijden.

Oplossing:

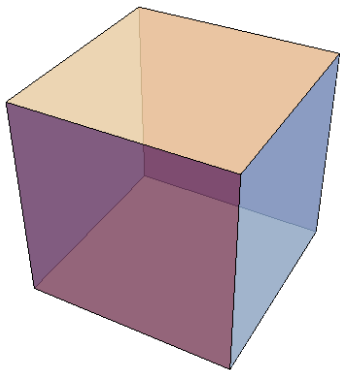
(m)

$$(x^2 + y^2 - 10z^2)^2 + a(z - 0.8)(z + 0.2) = 0 \quad \text{(n)}$$

Valentina's theepot



Kubussymmetrie



Hoekpunten: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Symmetriegroep: Verwisselingen en tekenwisselingen van de xyz -coördinaten, en combinaties daarvan. In totaal 48 symmetrieën.

Invariante polynomen

Invarianten t.a.v. kubussymmetriën:

$$p_2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad p_4 = x^4 + y^4 + z^4, \quad p_6 = x^2 y^2 z^2$$

Stelling

Elk polynoom in x, y, z dat kubussymmetrisch is, heeft de gedaante $F(p_2, p_4, p_6)$.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} & (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\ = & x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) \\ = & 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 \end{aligned}$$

Oppervlakken met kubussymmetrie

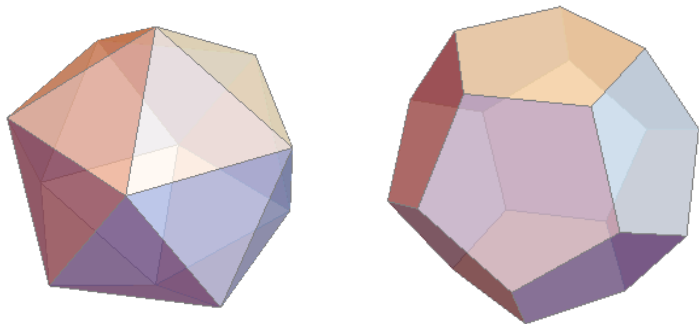
$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \quad (\text{o})$$

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) = 0 \quad (\text{p})$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + a(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) = 0 \quad (\text{q})$$

$$(x + y + z)^2(x + y - z)^2(x - y + z)^2(x - y - z)^2 + a(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \quad (\text{r})$$

Icosaedersymmetrie



Invariante polynomen:

$$q_2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Icosaederinvarianten

$$\begin{aligned}q_6 &= z(2x + z) \\ &\times (x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4 + 2x^3z + 10xy^2z \\ &\quad - x^2z^2 - 5y^2z^2 - 2xz^3 + z^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{10} &= 25x^8y^2 - 100x^6y^4 + 110x^4y^6 - 20x^2y^8 \\ &+ y^{10} + 4x^9z - 32x^7y^2z - 56x^5y^4z + 20xy^8z \\ &- 10x^8z^2 - 40x^6y^2z^2 - 60x^4y^4z^2 - 40x^2y^6z^2 \\ &- 10y^8z^2 - 52x^7z^3 + 468x^5y^2z^3 + 260x^3y^4z^3 \\ &- 260xy^6z^3 + 45x^6z^4 + 135x^4y^2z^4 + 135x^2y^4z^4 \\ &+ 45y^6z^4 + 58x^5z^5 - 580x^3y^2z^5 + 290xy^4z^5 \\ &- 48x^4z^6 - 96x^2y^2z^6 - 48y^4z^6 + 19x^2z^8 + 19y^2z^8 - z^{10}\end{aligned}$$

Icosaedersymmetrische oppervlakken

Zes vlakken:

$$q_6 = 0 \quad (s)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 + aq_6 = 0 \quad (t)$$

$$q_6 + a(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \quad (u)$$

Barth-Sextic:

$$q_6 + (5/4)(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0 \quad (v)$$

$$q_6 + a(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 = 0 \quad (w)$$

Tot slot

EINDE