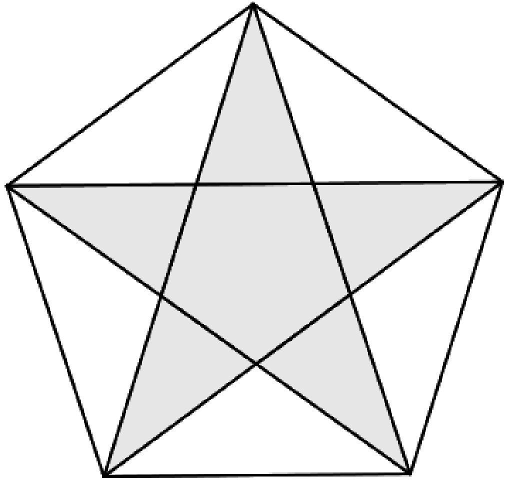
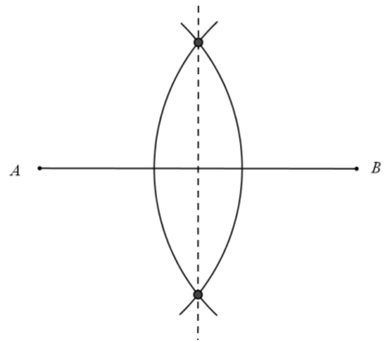
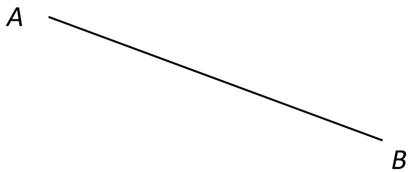
Spelen met passer en liniaal - werkboek



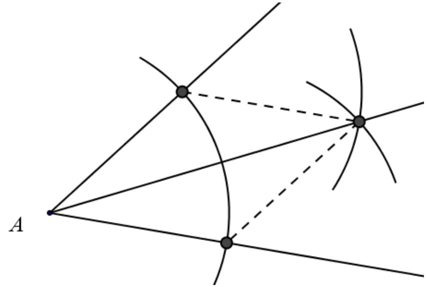
Basisconstructie 1: het midden van een lijnstuk (de middelloodlijn)

Gegeven: lijnstuk *AB.*
Gevraagd: het midden van lijnstuk *AB*.
Instructie
Teken $\odot(A, r)$ en $\odot(B, r)$ met $r > \frac{1}{2} AB$.
De lijn door de snijpunten van de cirkels snijdt lijnstuk *AB* in het midden *M*.





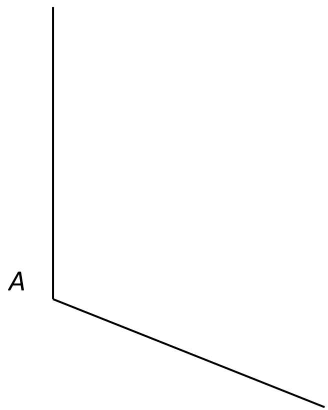
Basisconstructie 2: de bissectrice



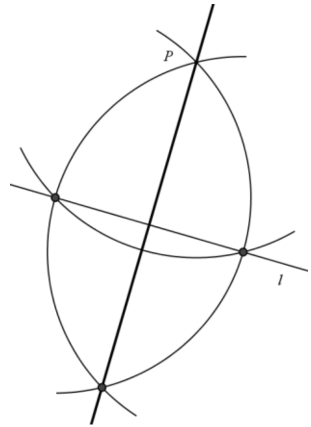
Gegeven: hoek *A*.
Gevraagd: de bissectrice (deellijn) van hoek *A*.
Oplossing

⊙(*A*, *r*) - neem *r* minstens 2 cm - snijdt de benen van de hoek in *P* en *Q*.

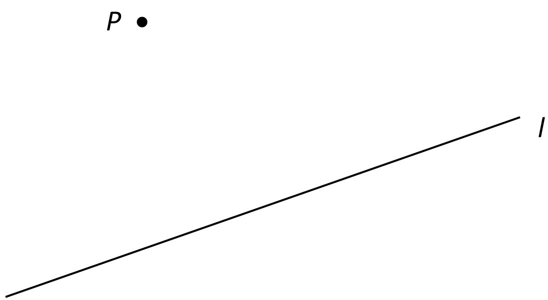
⊙ (*P*, *r*) en ⊙ (*Q*, *r*) snijden elkaar in (*A* en) *R*. Trek de lijn *AR*.



Basisconstructie 3: loodlijn vanuit punt *P* op lijn *l*, *P* niet op *l*.

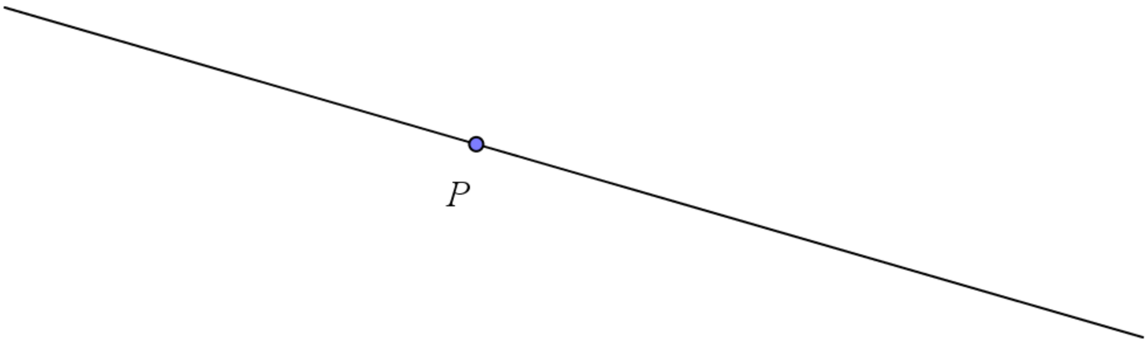


Gegeven: lijn *l* en punt *P* niet op *l*.
Gevraagd: de loodlijn uit *P* op *l*.
Oplossing
⊙(*P*, *r*), met *r* groter dan de afstand van *P* tot *l,* snijdt *l* in *Q* en *R*.
⊙ (*Q*,*QP*) en ⊙ (*R*, *RP*) snijden elkaar in (*P* en) *S*. Trek de lijn *PS*.



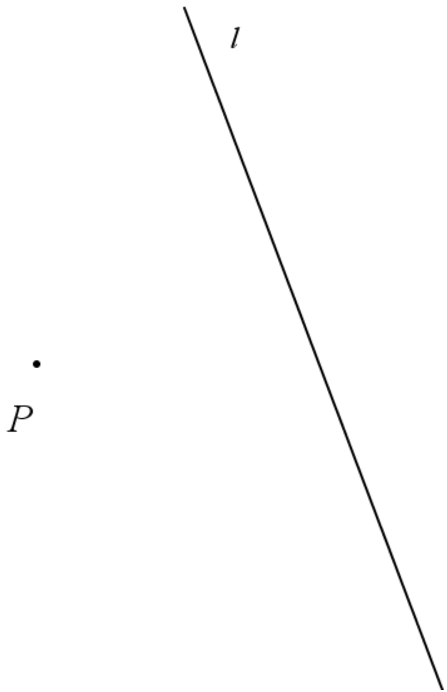
Extra 1

Construeer een loodlijn uit *P* op *l*, *P* op *l*.

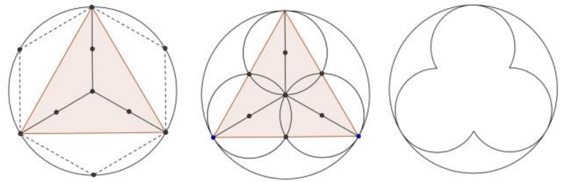


Extra 2

Spiegel punt *P* in lijn *l*.
Gebruik uitsluitend de passer.



Constructie drie-venster



Gegeven: cirkel met middelpunt *M* en straal *r*.
Gevraagd: klavertje drie in de cirkel.
Oplossing
Construeer eerst een regelmatige zeshoek:
Kies een punt *A* op de cirkel.

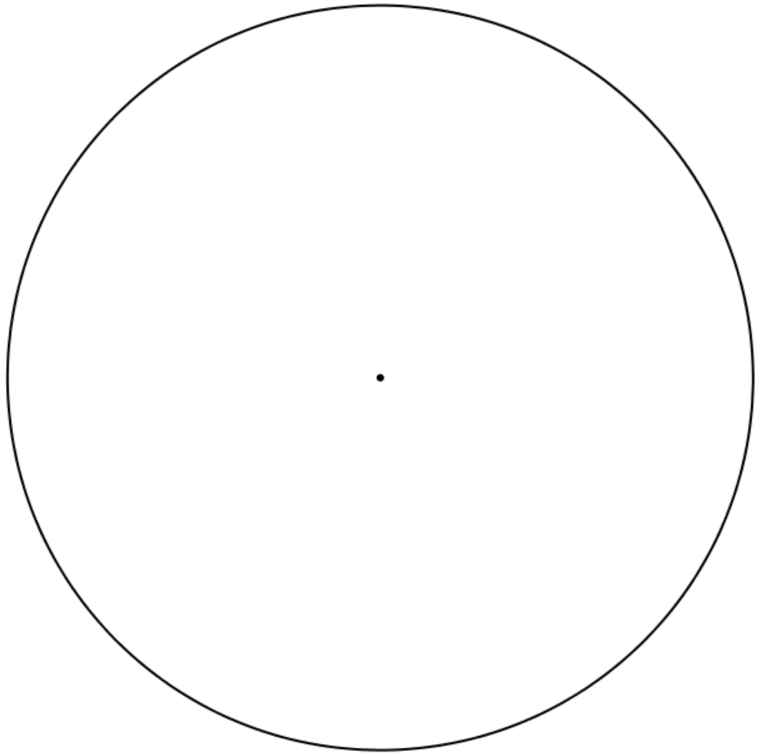
$\odot$ (*A*, *r*) snijdt $\odot$ (*M*, *r*) in *B* en *C*.

$\odot$ (*B*, *r*) snijdt $\odot$ (*M*, *r*) in (*A* en) *D*.

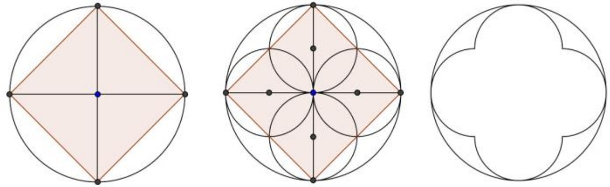
$\odot$ (*C*, *r*) snijdt $\odot$ (*M*, *r*) in (*A* en) *E*.

$\odot$ (*D*, *r*) snijdt $\odot$ (*M*, *r*) in (*B* en) *F*.

Construeer de middens *P, Q* en *R* van de lijnstukken *MA*, *MD* en *ME*.
Teken de cirkels (*P*, *PM*), (*Q*, *QM*) en (*R*, *RM*).
Vlak overbodige lijnstukken en bogen uit.

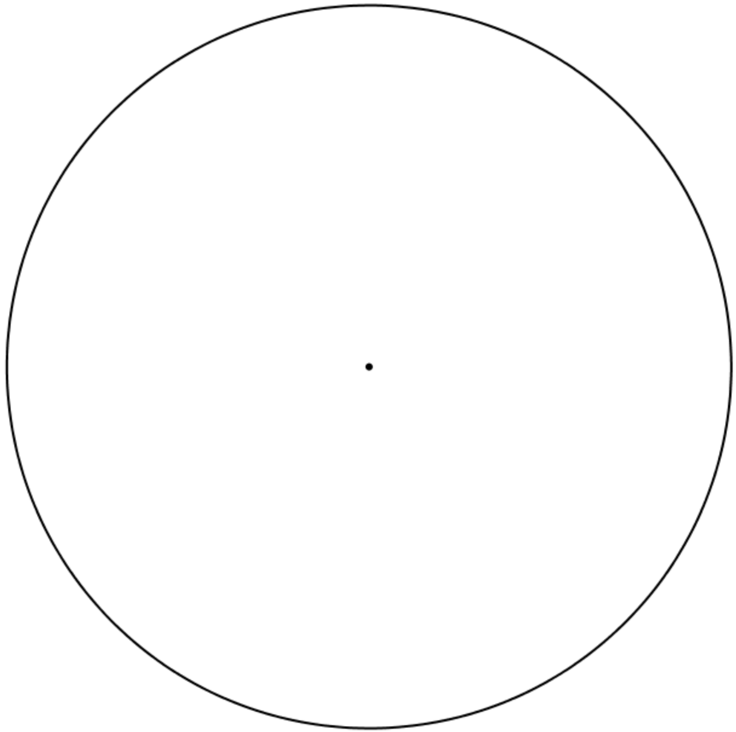


Constructie vier-venster (1)

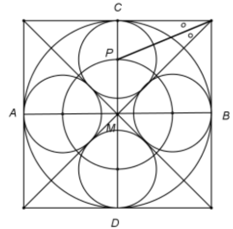


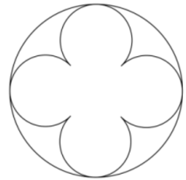
Gegeven: cirkel met middelpunt *M* en straal *r*.
Gevraagd: klavertje vier in de cirkel.
Oplossing

Teken een middellijn *AB*.
De middelloodlijn van lijnstuk *AB* (**B1**) snijdt de cirkel in *C* en *D*.
Construeer het midden *P* van lijnstuk *MA* (**B1**).
⊙ (*M*, *MP*) geeft de middens *Q*, *R* en *S* van de lijnstukken *MB, MC* en *MD*.
Teken de cirkels (*P*, *PM*), (*Q*, *QM*), (*R*, *RM*) en (*S*, *SM*).
Vlak overbodige lijnstukken en bogen uit.



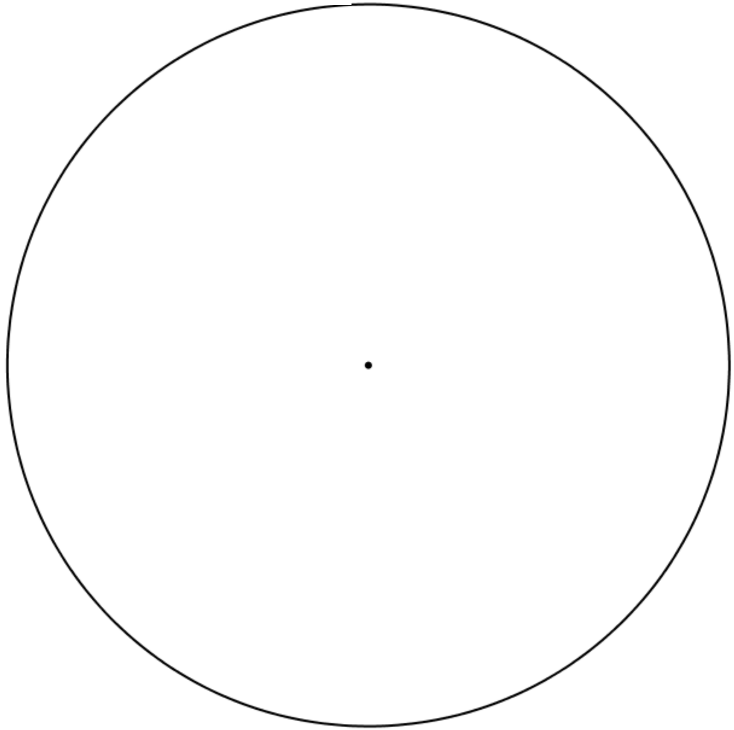
Constructie vier-venster (2)



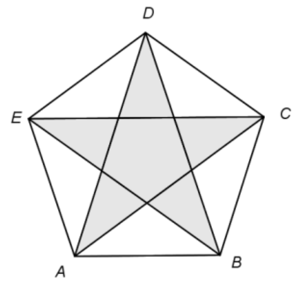


Gegeven: cirkel met middelpunt *M* en straal *r*.
Gevraagd: klavertje vier in de cirkel.

Oplossing
Teken een middellijn *AB.* De middelloodlijn van lijnstuk *AB* (**B1**) snijdt de cirkel in *C* en *D*.
De hoekpunten van het omgeschreven vierkant zijn snijpunten van de cirkels ⊙(*A*, *r*), ⊙ (*B*, *r*), ⊙ (*C*, *r*) en ⊙ (*D*, *r*). De diagonalen maken met de zijden acht hoeken.
De bissectrice (**B2**) van een hoek tussen een diagonaal en een zijde (in de figuur rechtsboven) snijdt *CD* in *P*.
⊙ (*M*, *MP*) geeft drie andere snijpunten met *AB* en *CD*.
De cirkels met deze punten als middelpunt en straal *PC* vormen de bladen van het klavertje vier.



Het pentagram, stap 1: de gulden driehoek

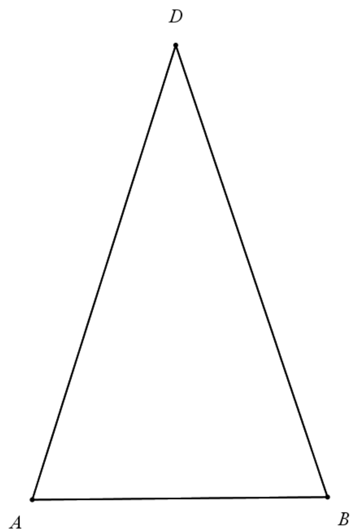


Het pentagram wordt gevormd door de diagonalen van een regelmatige vijfhoek (pentagon).

Gegeven: driehoek *ABD* (de gulden driehoek.
Construeer het pentagram.

Bereken de hoeken van driehoek *ABD*.

Hint:
Het pentagon kan worden opgesplitst in drie driehoeken. Hoeveel graden zijn de hoeken van het pentagon samen?
Hoe groot is één hoek van het pentagon?



Het pentagram, stap 2: de gulden snede

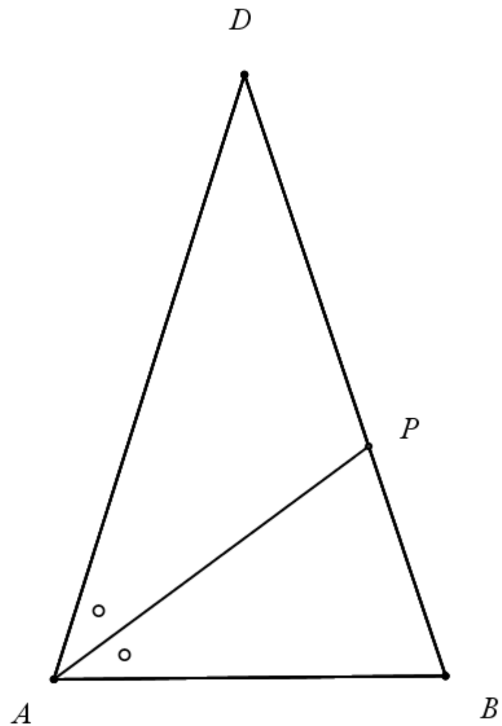
De bissectrice van hoek A snijdt zijde BD in P.
Bereken de hoeken van driehoek ABP.
Welke lijnstukken zijn even lang?

De driehoeken ABP en DAB zijn gelijkvormig,
dus $BD : AB = AB : BP$ of ook, omdat $AB = AP = PD$:
$BD : PD = PD : BP$.

Je kunt het ook zo zeggen:
Punt P verdeelt het lijnstuk BD in twee stukken zo dat
hele lijnstuk (BD) : *grootste stuk* (PD) =
grootste stuk (PD) : *kleinste stuk* (BP)

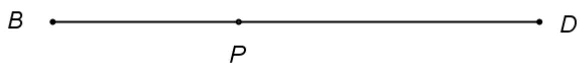
Zo'n verdeling heet de *gulden snede*.

Conclusie:
Als je de gulden snede van een lijnstuk kunt construeren,
kun je ook een pentagram construeren.



Het pentagram, stap 3: gulden snede gegeven

Gegeven is lijnstuk *BD* met daarop een punt *P*, dat lijnstuk *BD* verdeelt volgens de gulden snede.
Construeer driehoek *ABD,* de regelmatige vijfhoek en het pentagram.



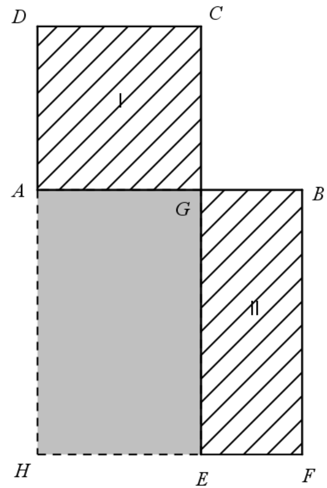
Een intermezzo: Hoe kwam Euclides aan de constructie van de gulden snede?

Als *G* lijnstuk *AB* verdeelt volgens de gulden snede, moet dus gelden *AB* : *AG* = *AG* : *GB*.

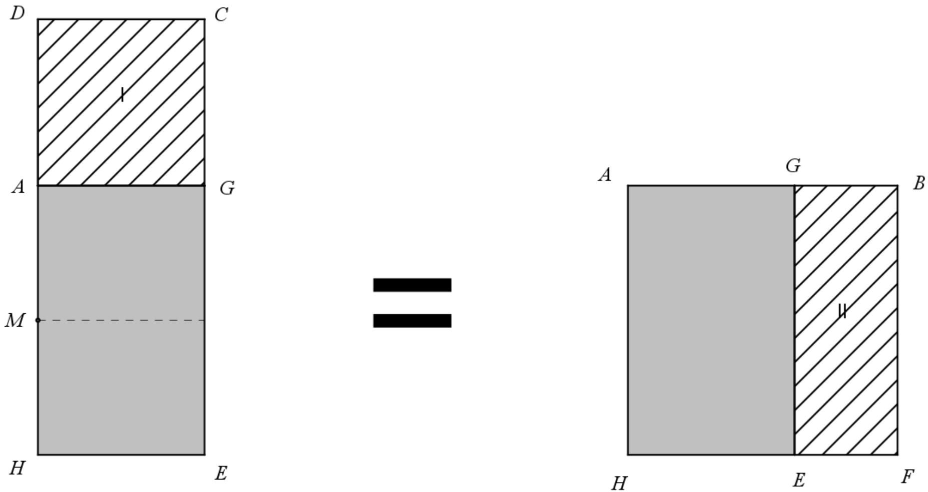
Anders geschreven: $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$ of ook $AG^2 = AB \cdot GB$.

De oude Grieken vatten zo'n formule op als een gelijkheid van oppervlakten: een vierkant met zijde *AG* heeft dezelfde oppervlakte als een rechthoek met zijden *AB* en *GB*.

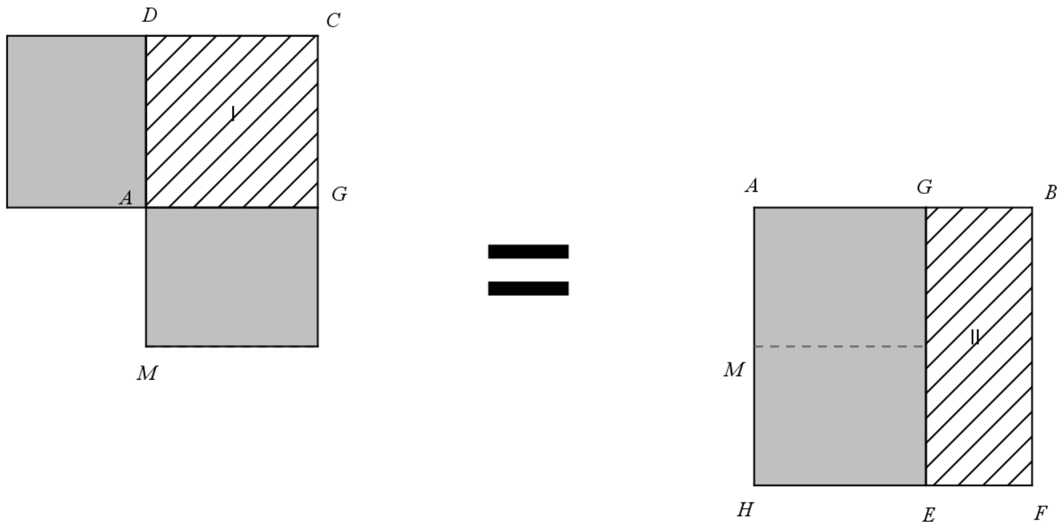
Zetten we vierkanten op *AB* en *AG*, dan is I gelijk aan II.
Immers *BF* = *AB*.

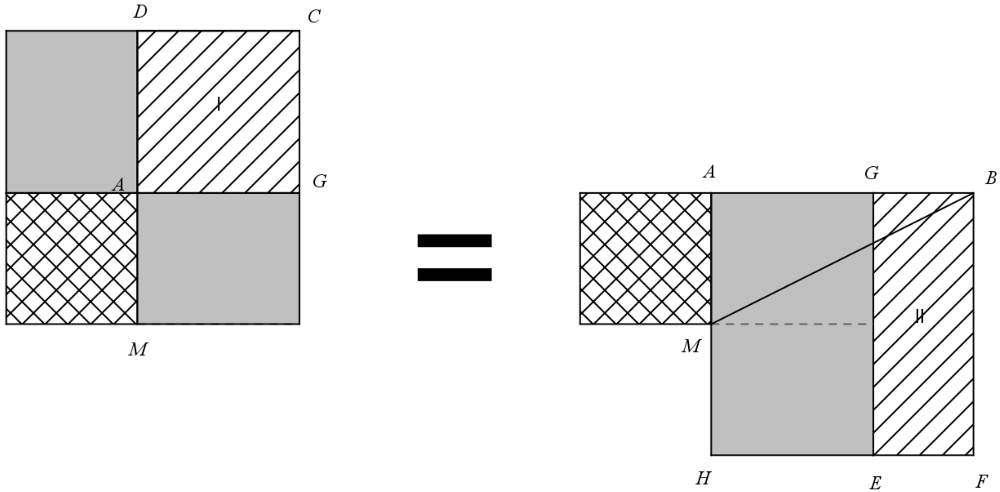


Dus geldt ook



We delen de grijze rechthoek middendoor en plakken de helft tegen de zijde *AD*.


D
C
I
A
G
M
A
G
B
M
II
H
E
F

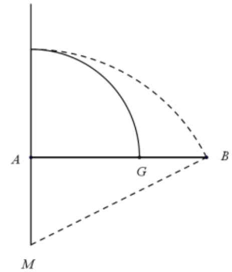


$$MD^2 = AB^2 + AM^2 = MB^2$$

$$MD = MB$$

Het pentagram, stap 4: constructie gulden snede

Verdeel lijnstuk *AB* volgens de gulden snede.

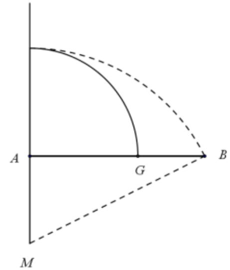


$AM = \frac{1}{2}\ AB$

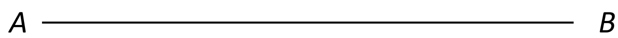
A B

Het pentagram, constructie als de diagonaal gegeven is.

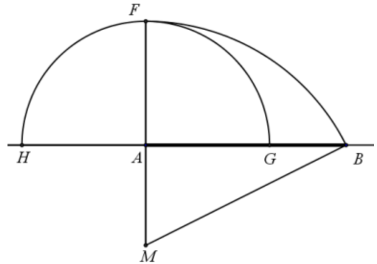
Gegeven: lijnstuk *AB* als diagonaal van het pentagon.
Gevraagd: het pentagram
.



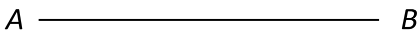
$AM = \frac{1}{2}\ AB$



Het pentagram, constructie als een zijde gegeven is.

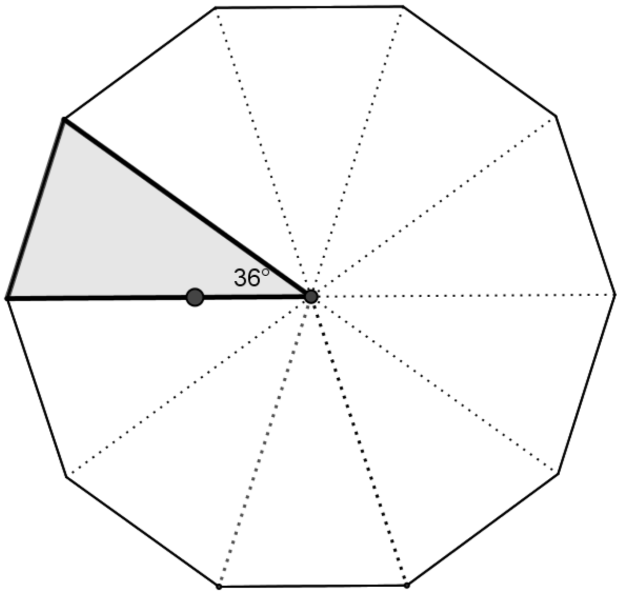


Gegeven: zijde *AB*.
Gevraagd: het pentagram.



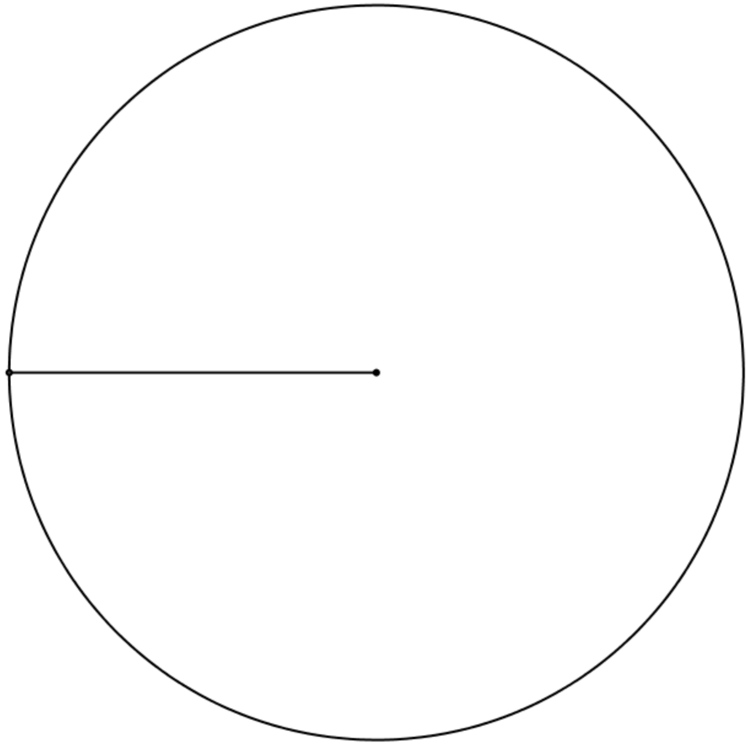
Het pentagram, constructie in een gegeven cirkel (1).

Een regelmatige tienhoek kun je verdelen in tien 36-72-72-driehoeken.
Van zo'n driehoek is kun je de basis vinden door een opstaande zijde te verdelen volgens de gulden snede.

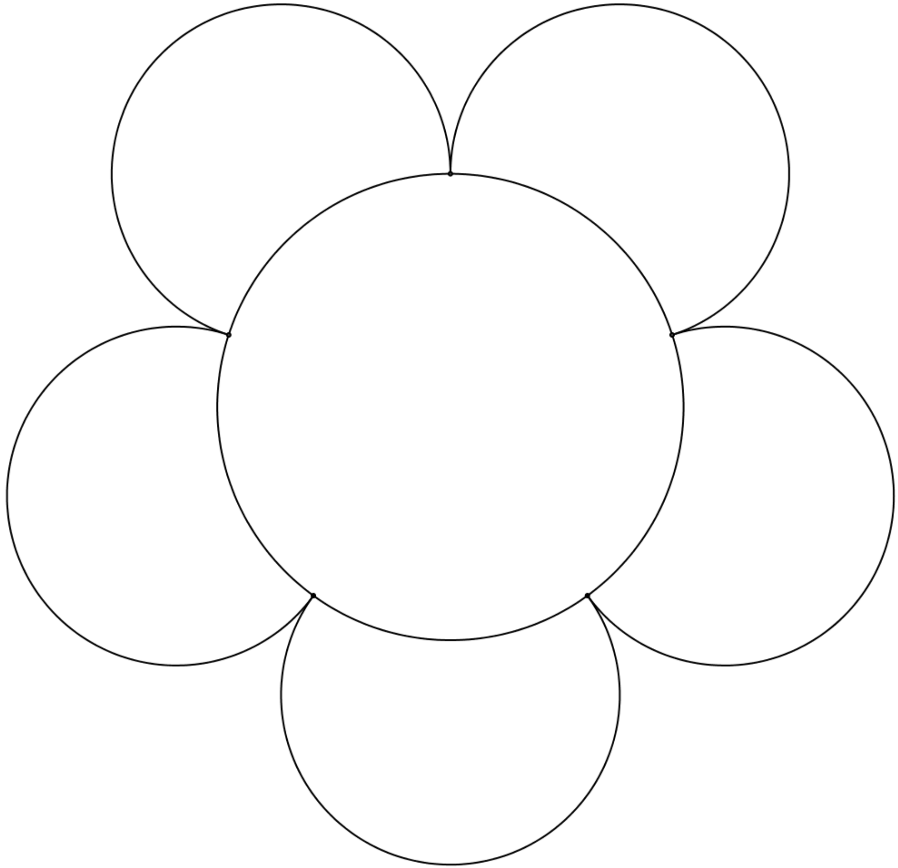


Het pentagram, constructie in een gegeven cirkel (2).

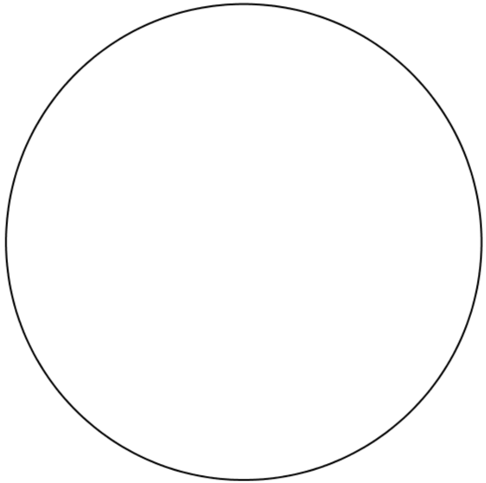
Verdeel de straal volgens de gulden snede.
Pas het grootste deel af op de cirkel.



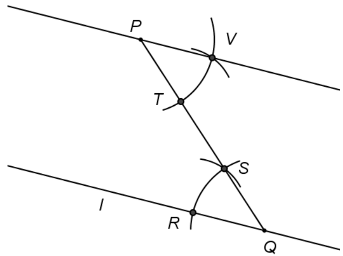
Constructie vijf-venster
(voorbeeld)



Constructie vijf-venster



Toegift 1



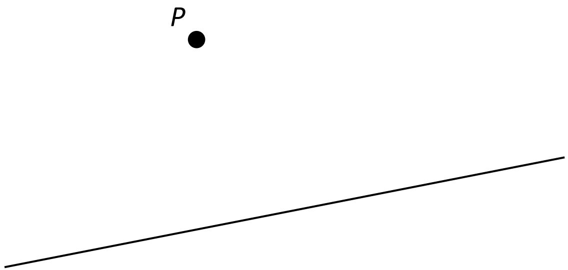
Lijn door een punt *P* evenwijdig aan een gegeven lijn.

Kies een punt *Q* op *l*. Trek lijnstuk *PQ*.

⊙ (*Q*, *r*), *r* kleiner dan de afstand van *P* tot *l*, snijdt *l* in *R* en lijnstuk *PQ* in *S*.

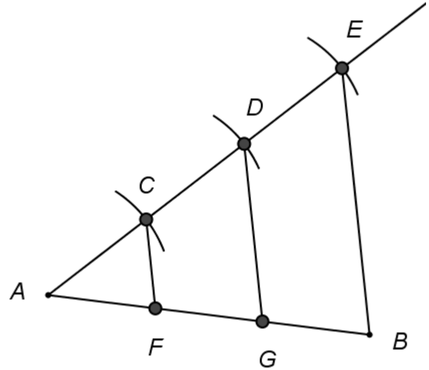
⊙ (*P*, *r*) – zelfde straal! – snijdt lijnstuk *PQ* in *T*.

⊙ (*T*, *RS*) snijdt ⊙ (*P*, *r*) in *V*. Trek de lijn door *P* en *V*.



Toegift 2

Lijnstuk *AB* in drie (4, 5, 6, …) gelijke delen verdelen.
Trek een halve lijn met grenspunt *A.*
Pas met de passer drie gelijke stukken af: *AC*, *CD* en *DE*.
Trek *EB*.
Construeer door *C* en *D* lijnen evenwijdig aan *EB*.
Deze snijden lijnstuk *AB* in *F* en *G*.



Verdeel onderstaand lijnstuk in vijf gelijke delen.