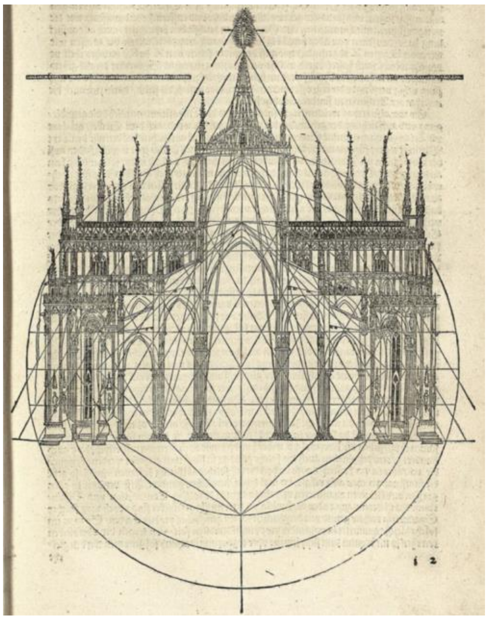
De bouw van kathedralen

Van ongeveer 1050 tot 1400 was er een explosie in de bouw van kathedralen.
De kathedraal van Amiëns is gebouwd van 1220 tot 1280. Men heeft er dus 60 jaar over gedaan. Niet verwonderlijk als je bedenkt dat alles handwerk was.

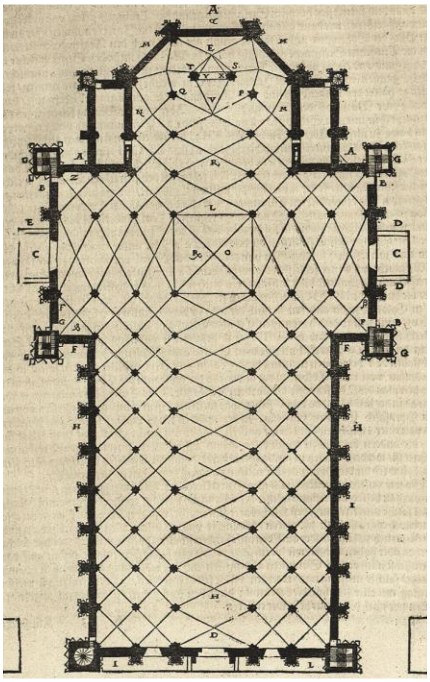


Omdat perkament heel duur was, werden ontwerpen voor de kathedraal getekend op een gipsvloer. De passer was daarbij het belangrijkste instrument.

Afbeelding uit de Vitruvius-Teutsch, een Duitse vertaling uit 1548.

In die tijd was de architect ook de bouwmeester, een man die hoog in aanzien stond. Bron van zijn kennis was het handboek van Vitruvius, *De Architectura*, vlak voor het begin van onze jaartelling geschreven.

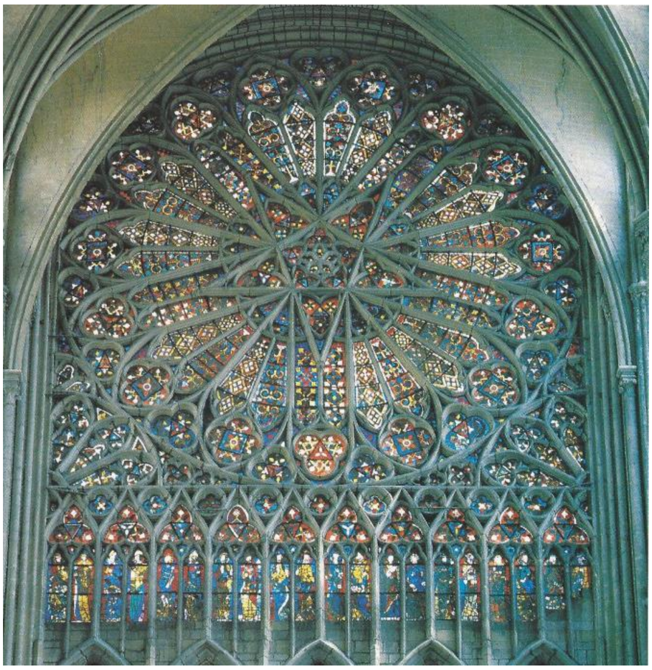
Voor de mensen in de middeleeuwen, grotendeels ongeletterd, was de kathedraal een boek in steen en glas (Victor Hugo), dat de boodschap van het Christendom in symbolen en beelden overbracht.
In die symboliek speelden de getallen 3, 4 en 5 een grote rol.



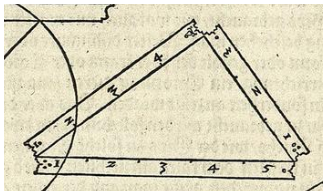
3 – drieëenheid, de hemel, het geestelijke
4 – de vier windstreken, de aarde, het materiële (mater)
5 – het universum, het wezenlijke (de quintessence!)

Uitgangspunt van de Dom van Milaan bijvoorbeeld (1386 -) is het vierkant. Daarna is zowel de triangulatuur als de kwadratuur duidelijk te zien.

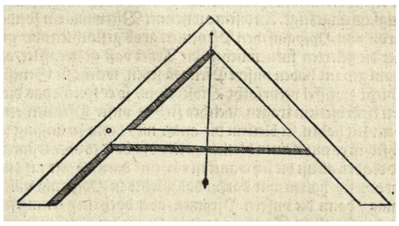
Wij gaan terug naar de kathedraal van Amiëns en concentreren ons op het roosvenster in de Noordgevel.



In dat roosvenster zie je centraal een vijfpuntige ster (pentagram) met de punt naar beneden. Om die ster zie je afwisselend drie- en viertallige figuren.



Om de figuren te construeren werd een cementen vloer gelegd waarin die figuren getekend werden. Van oudsher gebruikte men voor de constructie van meetkundige figuren alleen passer en liniaal. In de bouw werd voor de loodrechte stand gebruik gemaakt van een winkelhaak. De zijden van de winkelhaak waren vaak in de verhouding 3 : 4, de lengten van de zijden van de beroemde Pythagoreïsche driehoek 3, 4, 5.

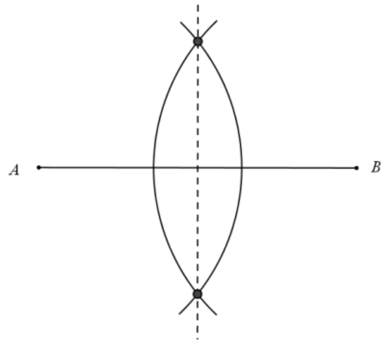


Voor het waterpassen gebruikte men een zogenaamde libel.

Basisconstructies

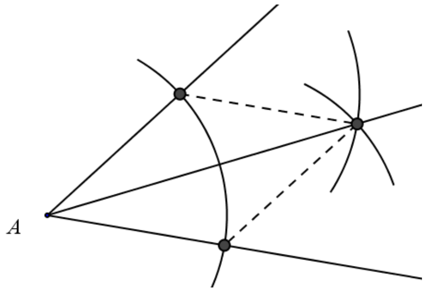
De basisconstructies vind je al in de *Elementen* van de Griekse wiskundige *Euclides* (300 v. Chr.), boek 1, stelling 9 – 12). Hier volgen ze (wat afwijkend van Euclides).

1. Het midden van een lijnstuk



► Teken twee cirkels met gelijke straal, één met middelpunt *A* en één met middelpunt *B*.
De verbindingslijn van de snijpunten is de *middelloodlijn* van lijnstuk *AB*.

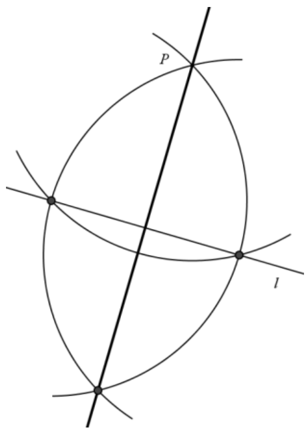
2. De bissectrice (deellijn).



► Teken een cirkel met middelpunt *A*. Deze snijdt de benen van de hoek in *P* en *Q*.

▷ Teken met middelpunten *P* en *Q* twee cirkels met dezelfde straal als de eerste cirkel.
Deze snijden elkaar in *R*.
AR is de bissectrice van hoek *A*.

3. Een loodlijn vanuit punt P op lijn l, P niet op *l*.

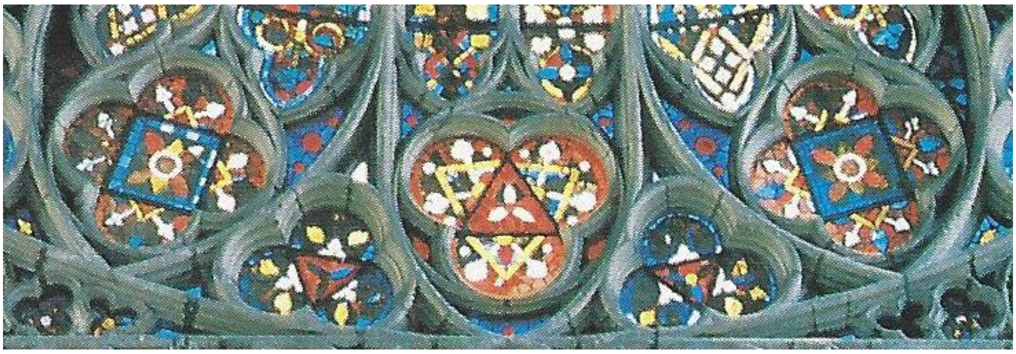


► Teken een cirkel met middelpunt *P* die *l* snijdt in *Q* en *R*.

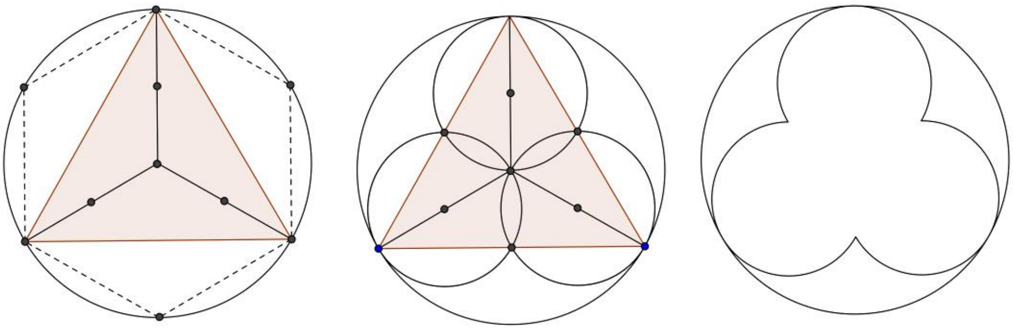
▷ Teken twee cirkels met middelpunten *Q* en *R* die door *P* gaan.
Behalve in *P* snijden ze elkaar ook in *S*.
De lijn *PS* is de gevraagde loodlijn.

Zoals de bouwlieden voor de loodrechte stand de winkelhaak gebruikten, gebruiken we bij de volgende constructies voor de loodrechte stand vaak de geodriehoek.

Roosvenster Amiëns, detail

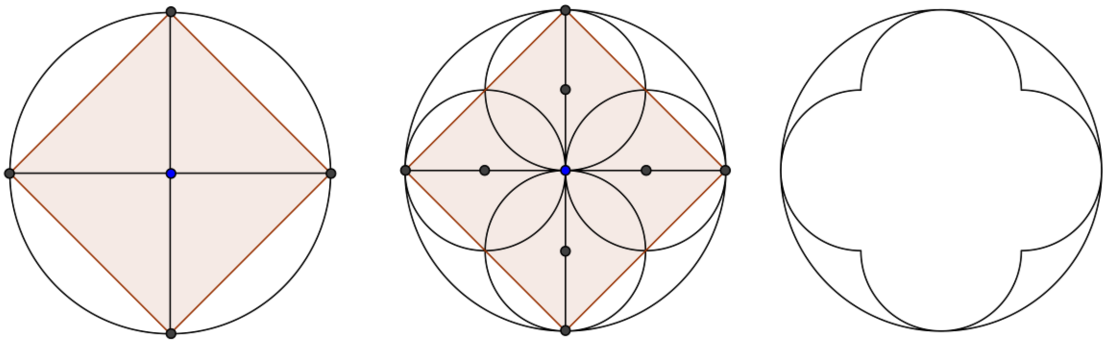


Constructie drie-venster



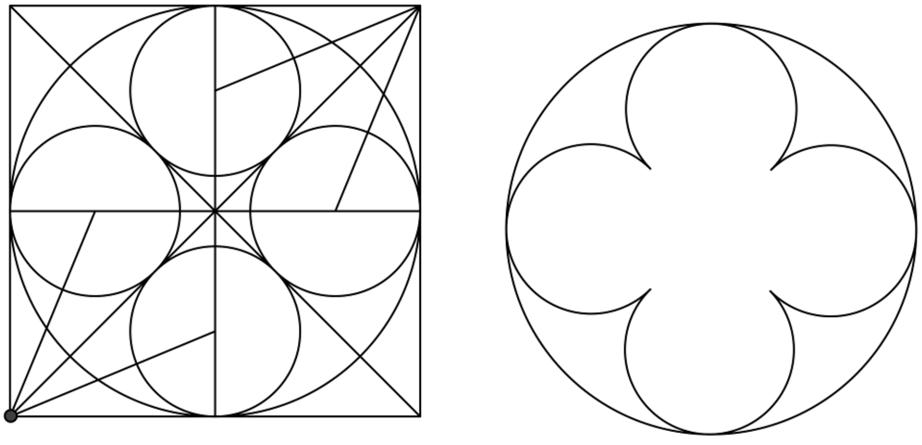
- ► Teken een cirkel en pas daarop zes keer de straal af. Dat geeft een zeshoek.
- ▷ Verbind de punten om en om, dan krijg je een gelijkzijdige driehoek.
- ▷ Construeer de middens van de verbindingslijnstukken van de hoekpunten met het middelpunt.
- ▷ Teken drie cirkels zoals aangegeven in de middelste figuur.
- ▷ Vlak alles uit wat je niet nodig hebt.

Constructie vier-venster



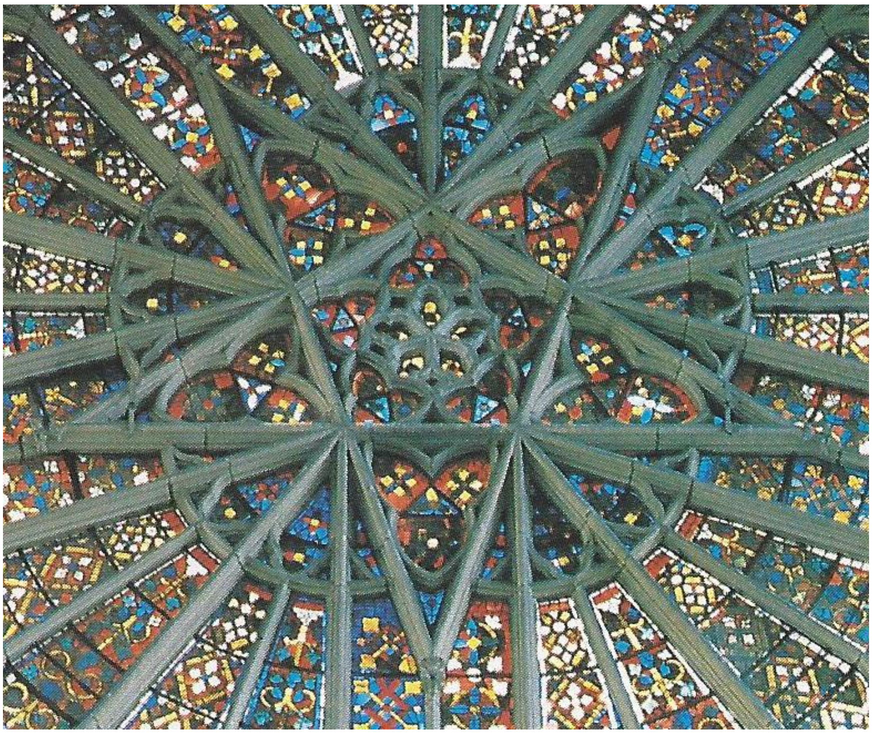
- ► Trek in de cirkel twee middellijnen loodrecht op elkaar. Dat geeft een vierkant.
- ▷ Construeer de middens van de lijnstukken van de verbindingslijnstukken van de hoekpunten met het middelpunt.
- ▷ Trek de cirkels zoals aangegeven in de middelste figuur.
- ▷ Vlak alles uit wat je niet nodig hebt.

Als je de middelpunten van de kleine cirkels niet in het midden van de verbindingslijnstukken neemt, maar iets meer naar de rand van de grote cirkel, krijg je een figuur die wat meer op een klavertje vier lijkt.



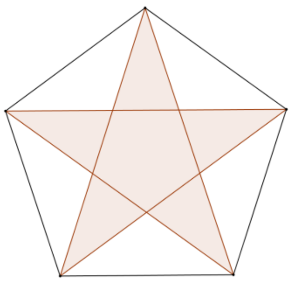
- ► Teken in de uiteinden van de twee middellijnen loodlijnen. Dat geeft een vierkant om de cirkel heen. (Je kunt de hoekpunten van het omgeschreven vierkant ook vinden door cirkels te tekenen met als middelpunt de eindpunten van de twee middellijnen en de straal van de gegeven cirkel).
- ▷ Trek de diagonalen. Bij de hoekpunten krijg je nu hoeken van 45°.
- ▷ Deel die hoeken middendoor (constructie bissectrice).
- ▷ Teken de vier cirkels die raken aan de diagonalen en de zijden van het grote vierkant.
- ▷ Vlak uit wat je niet nodig hebt.

De Vijfhoek



Waren de constructies van het drievenster en het viervenster betrekkelijk eenvoudig en konden ze door gewone bouwlieden worden gemaakt, de constructie van de vijfhoek was voorbehouden aan de bouwmeester en enkele vertrouwelingen.

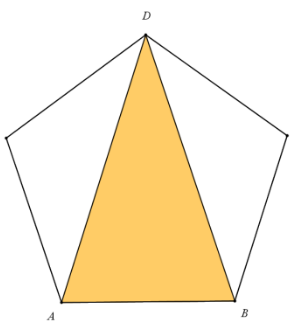
1^e^ stap



Een pentagram krijg je door in een regelmatige vijfhoek alle diagonalen te trekken.

We zijn dus klaar als we weten hoe we een regelmatige vijfhoek kunnen construeren.

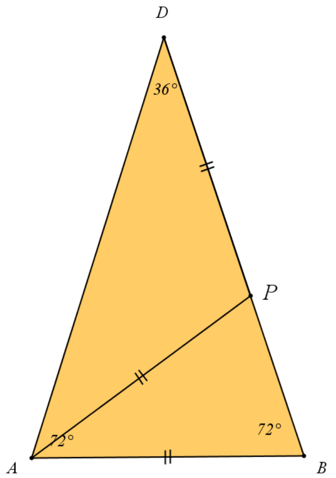
2^e^ stap

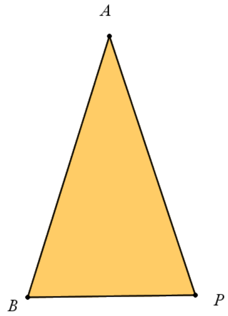


Als je driehoek *ABD* kunt construeren, ben je klaar:
De drie cirkels met middelpunten *A*, *B* en *D* en staal *AB* geven dan de twee resterende hoekpunten van de vijfhoek.

De hoeken van de drie driehoeken samen zijn 3 × 180° = 540°.
Elke hoek van de regelmatige vijfhoek is 540° : 5 = 108°.
In de linker gelijkbenige driehoek is de top 108°. De twee basis hoeken zijn dus 36°. Analoog voor de rechter driehoek.
De tophoek van de middelste driehoek is 108° – 36° – 36° = 36°.
De basishoeken zijn dan elk 72°

3^e stap
Trek in driehoek *ABD* de bissectrice uit hoek *A*.





In driehoek *BPA* is hoek *A* 36°, hoek *B* is 72°, dus ook hoek *P* is 72°.
Omdat de driehoeken *DAB* en *ABP* dezelfde hoeken hebben zijn zij gelijkvormig.
Bovendien is ook driehoek *APD* gelijkbenig, dus *AB* = *AP* = *PD*.

4^e stap
We onderzoeken waar punt *P* op lijnstuk *BD* ligt.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken *DAB* en *ABP* volgt dat *AD* : *AB* = *AB* : *BP*.
Anders geschreven: $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BP}$ en ook $\frac{BD}{PD} = \frac{PD}{BP}$.

Je kunt het ook zo zeggen:
Punt *P* verdeelt het lijnstuk *BC* in twee stukken zo dat
hele lijnstuk : *grootste stuk* = *grootste stuk* : *kleinste stuk*

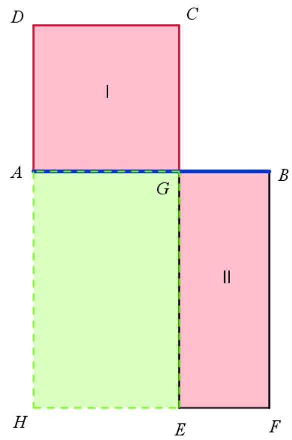
Die verdeling heet de *gulden snede*.

(Fra Filippo Lippi, De annunciatie)

5^e^ stap

Hoe verdeel je een lijnstuk in de gulden snede?
We gaan uit van lijnstuk *AB* met daarop een punt *G* dat lijnstuk *AB* in twee stukken verdeelt volgens de gulden snede.

Er geldt dus $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$ of ook $AG^2 = AB \times GB$

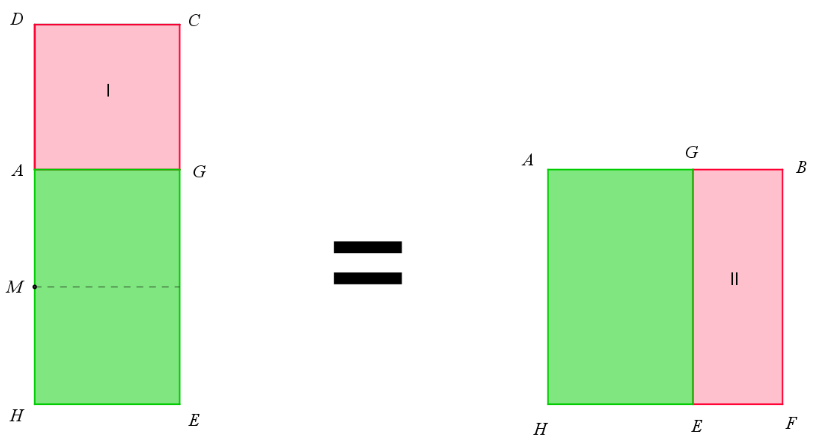


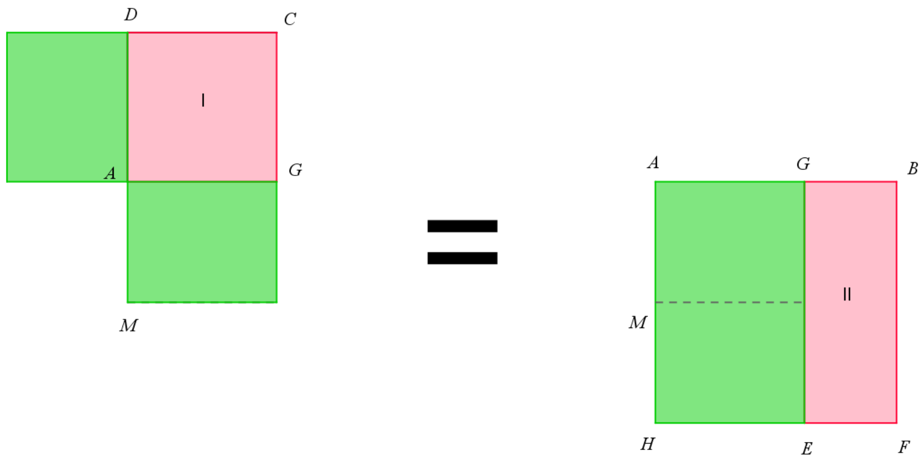
De oude Grieken vatten zo'n formule op als een gelijkheid van oppervlakten: het vierkant met zijde *AG* heeft dezelfde oppervlakte als een rechthoek met zijden *AB* en *GB*.

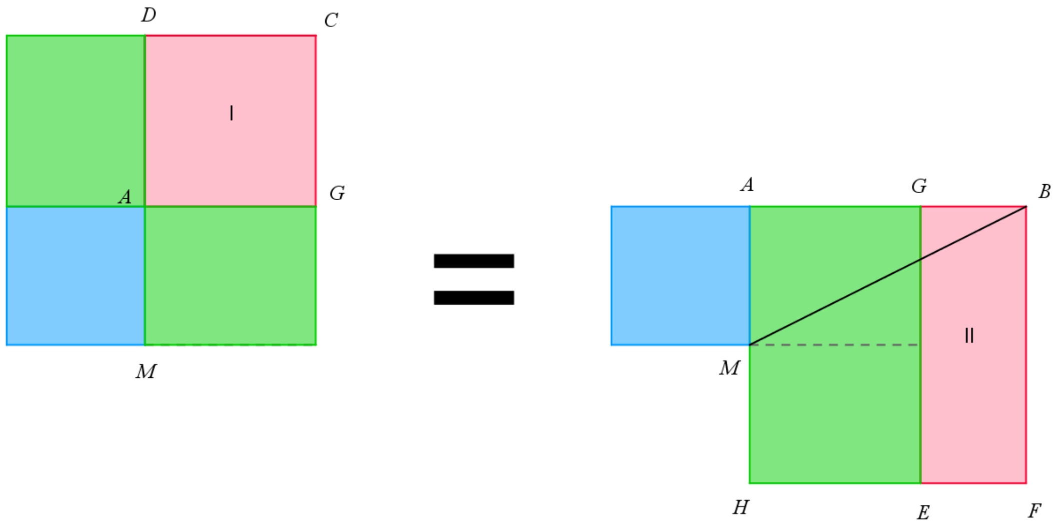
In de figuur: I = II

Onderstaande plaatjes geven een reconstructie van de manier waarop Euclides de constructie van de gulden snede behandelt.

M is het midden van *AH*.







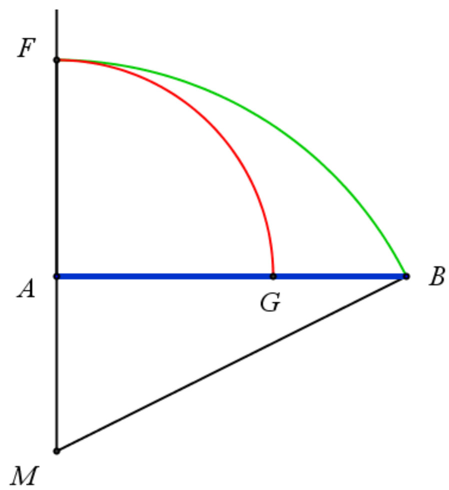
De oppervlakte eerste figuur is MD^2
De oppervlakte van de tweede figuur is $MA^2 + AB^2$

Volgens de stelling van Pythagoras geldt: $MA^2 + AB^2 = MB^2$
De oppervlaktes zijn gelijk, dus $MD^2 = MB^2$, dus $MB = MD$

6^{e} stap
Omdat *MB* bekend is, kunnen we nu de zijde van vierkant I construeren:

1. Teken lijnstuk *AM* loodrecht op lijnstuk *AB* met $AM = \frac{1}{2}AB$.
2. De cirkel met middelpunt *M* en straal *MB* snijdt de lijn door *A* en *M* in *F*.
3. De cirkel met middelpunt *A* en straal *AF* snijdt lijnstuk *AB* in *G*.

(De constructie van Euclides staat in boek VI, stelling 30 van de Elementen.)



Nu we weten hoe we een lijnstuk kunnen verdelen in twee stukken volgens de gulden snede is het probleem van de constructie van het pentagram opgelost:

- Teken een lijnstuk *AB*.
- Verdeel het in twee stukken volgens de gulden snede.
- Construeer een 36-72-72-driehoek.
- Construeer het pentagram.

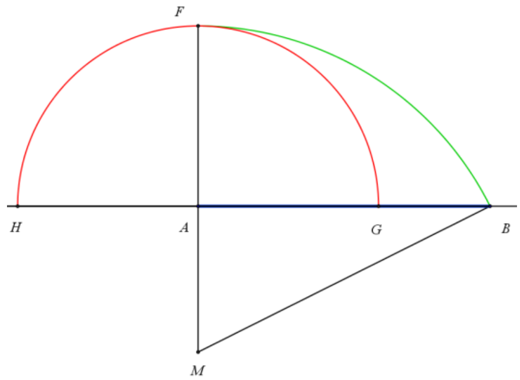
Extra
De constructie van Euclides kun je ook gebruiken om bij een gegeven lijnstuk een lijnstuk te construeren, waarvan dat gegeven lijnstuk het grootste stuk is bij een verdeling volgens de gulden snede. Zo is ook direct een regelmatige vijfhoek met gegeven zijde te construeren:

Constructie:
Gegeven lijnstuk *AB*.

Construeer punt *M*, zo dat $AM \perp AB$, met $AM = \frac{1}{2} AB$

⊙ (*M*, *MB*) snijdt lijn *MA* in *F*.

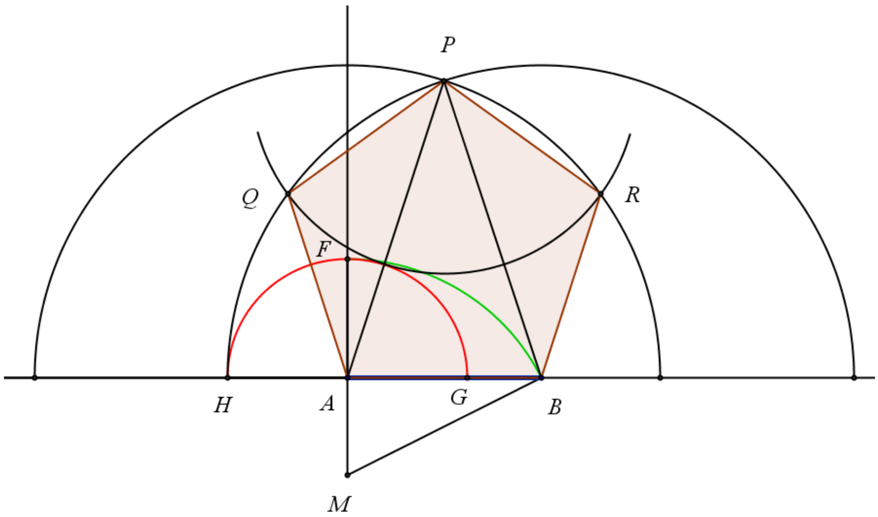
⊙ (*A*, *AF*) snijdt lijn *AB* in *G* en *H*.



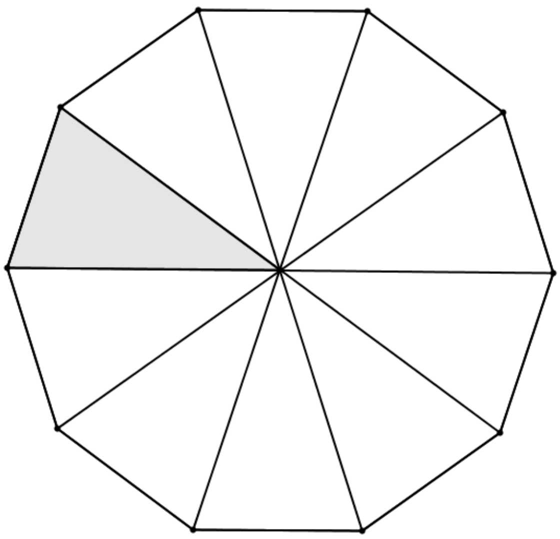
Je weet: $AB : AG = AG : CG$

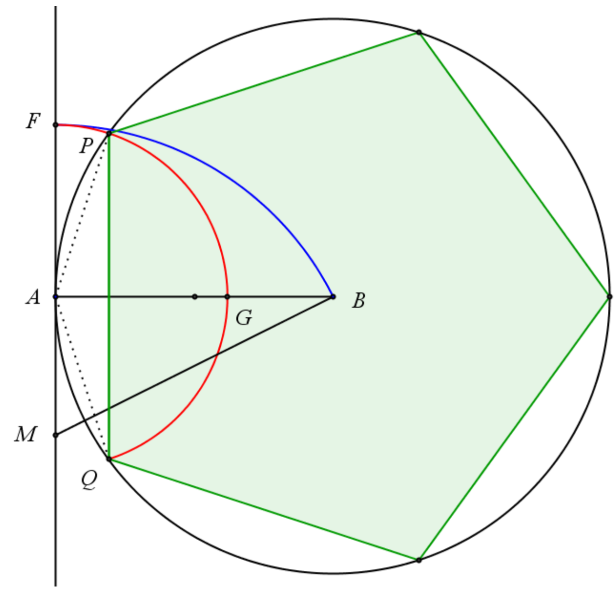
Nu is $AB : AG = AB : AH$, dus is *BH* verdeeld volgens de gulden snede.

Is *AB* het gegeven lijnstuk, dan vind je de diagonaal van de vijfhoek door in bovenstaande constructie het snijpunt *H* te bepalen van de cirkel met middelpunt *A* en straal *AF* met de lijn door *A* en *B*, aan de andere kant van *A*.



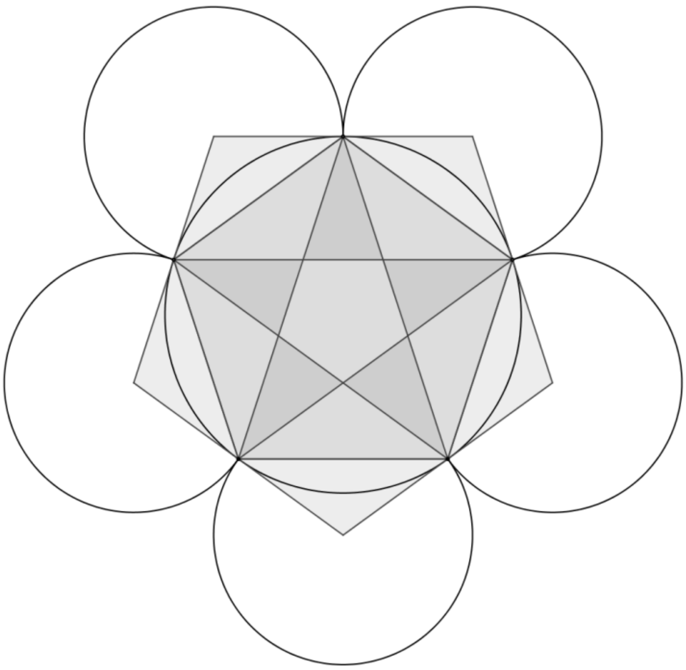
Constructie van een pentagram in een gegeven cirkel.
De grootte van een pentagram is bepaald door de cirkel waarin hij past. Vaak wordt dan ook eerst een cirkel getekend waarin het pentagram moet passen. In dat geval kun je het best eerst een regelmatige tienhoek construeren. Die bestaat immers uit tien 36-72-72 driehoeken.
De grootste zijde is de straal van de cirkel. Dus als je de straal van de cirkel volgens de guldensnede verdeelt, krijg je gelijk de zijde van de tienhoek, in de rechter figuur de lijnstukken *AP* en *AQ*. Lijnstuk *PQ* is dan de zijde van de regelmatige vijfhoek.





Constructie vijf-venster

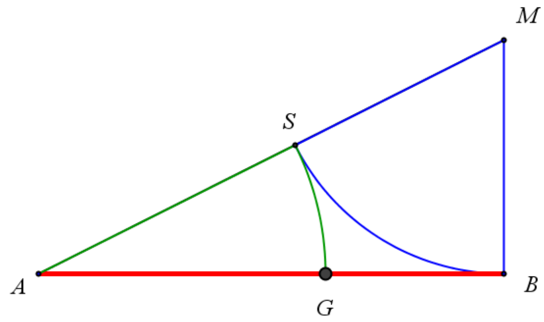
Construeer eerst een regelmatige vijfhoek in een cirkel.
Construeer de omgeschreven vijfhoek van de cirkel door lijnen te trekken loodrecht op de stralen naar de hoekpunten.
Construeer de vijf cirkels met als middelpunten de hoekpunten van de omgeschreven vijfhoek en als straal de halve lengte van een zijde van die vijfhoek.



Een alternatieve constructie gulden snede

Vaak wordt de gulden snede binnen driehoek *ABM* geconstrueerd. Dat gaat als volgt:

1. Teken $MB = \frac{1}{2}AB$ loodrecht op *AB*.
2. De cirkel met middelpunt *M* en straal *MB* snijdt *AM* in een punt *S*.
3. De cirkel met middelpunt *A* en straal *AS* snijdt *AB* in *G*.



Voor wie wil weten of het klopt:

Noem *GB* = *k(leinste)* en *AG* = *g(rootste)* en *AB* = *h(ele)*. Dan is:
$MS = MB = \frac{1}{2}h$ en $AS = AG = g$

Volgens de stelling van Pythagoras moet gelden: $AM^2 = AB^2 + MB^2$, dus

$(g + \frac{1}{2}h)^2 = h^2 + (\frac{1}{2}h)^2$

$g^2 + gh + \frac{1}{4}h^2 = 1\frac{1}{4}h^2$

$g^2 = h^2 - gh = h(h-g) = hk$

Deel je beide kanten door $k \cdot g$ dan staat er: $\frac{g}{k} = \frac{h}{g}$

Hoe groot is de gulden snede verhouding nu precies?

De verhouding van de lengten van de lijnstukken waarin de gulden snede een lijnstuk verdeelt, wordt vaak aangegeven met de Griekse letter phi φ (of Φ of ϕ), de eerste letter van Phidias, de meest beroemde Griekse beeldhouwer (5^e eeuw voor Christus).
Noem je de lengten van het kleinste, het grootste en het hele lijnstuk respectievelijk *k*, *g* en *h*, dan geldt:

$g = \varphi \cdot k$ en $h = \varphi \cdot g = \varphi \cdot \varphi \cdot k = \varphi^2 \cdot k$
Ook geldt: $h = k + g = k + \varphi \cdot k = k(1 + \varphi)$

Dus $\varphi^2 \cdot k = (1 + \varphi)k$. Deel je beide kanten door *k*, dan vind je: $\boxed{\varphi^2 = 1 + \varphi}$

Nu pakken we de rekenmachine erbij om een getal te zoeken dat bovengenoemde eigenschap heeft: als je het kwadrateert, wordt het precies 1 groter.

getal	*kwadraat*	*getal + 1*
2	4	3
1,5	2,25	2,5
1,6	2,56	2,6
1,61	2,5921	2,61
1,62	2,6244	2,62

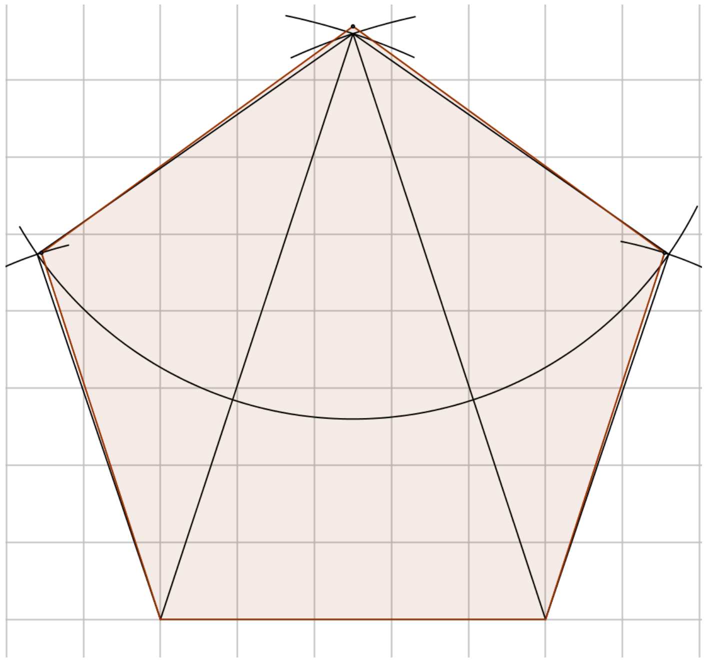
In drie decimalen: $\varphi \approx 1{,}618$ ($\varphi^2 = 2{,}61792$).

De exacte waarde van φ vind je door de vergelijking $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ op te lossen met de abc-formule:

$$\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

In de brugklas

Om leerlingen van de brugklas een pentagram te laten tekenen, laat je (met de passer) een driehoek met zijden 5-8-8 teken. Trek vervolgens cirkels met als middelpunt de hoekpunten van de driehoek en straal 5.



Geraadpleegde literatuur:

Boek 1 van de Elementen van Euclides in de Engelse vertaling door Sir Th.L. Heath.
R. Herz-Fishler: A Mathematical History of the Golden Number,
Dover Publ. New York, 1998

Prof. Ir. M. Gout: De bouw van kathedralen, Meinema, Delft, 1990

Vitruvius, Handboek bouwkunde, vertaald door Ton Peters,
Athenaeum, Polak en Van Gennep, 1997.