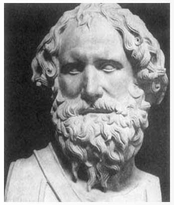
Wanneer cilinders elkaar ontmoeten

Michel Roelens
UC Leuven-Limburg Lerarenopleiding
Maria-Boodschaplyceum Brussel
Redactie **UITWISKELING** (al geabonneerd?)

Wanneer cilinders elkaar ontmoeten

1. De schouw van mijn collega Kristof

2. De Methode van onze collega Archimedes



3. Het lichaam van onze collega 牟合方蓋

Eerste deel

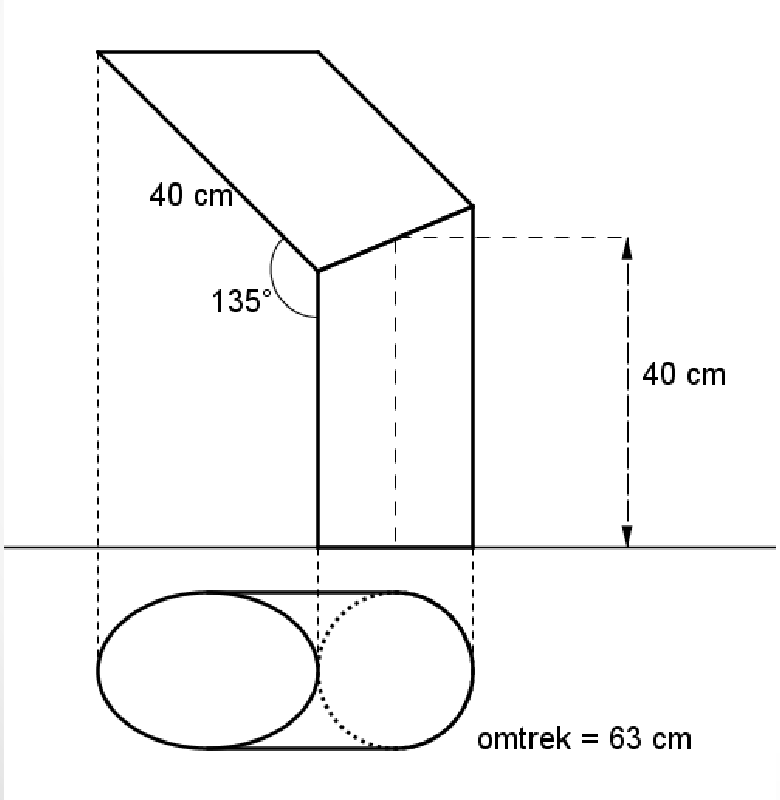
De schouw van mijn collega

De schouw van mijn collega

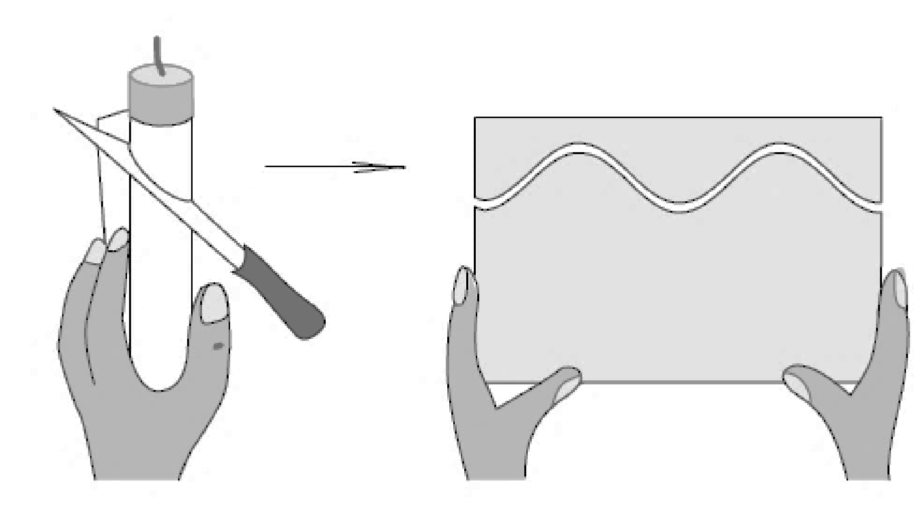
Zijn schouwpijp bedekken: twee cilinders die een hoek vormen van 135°.

De schouw van mijn collega

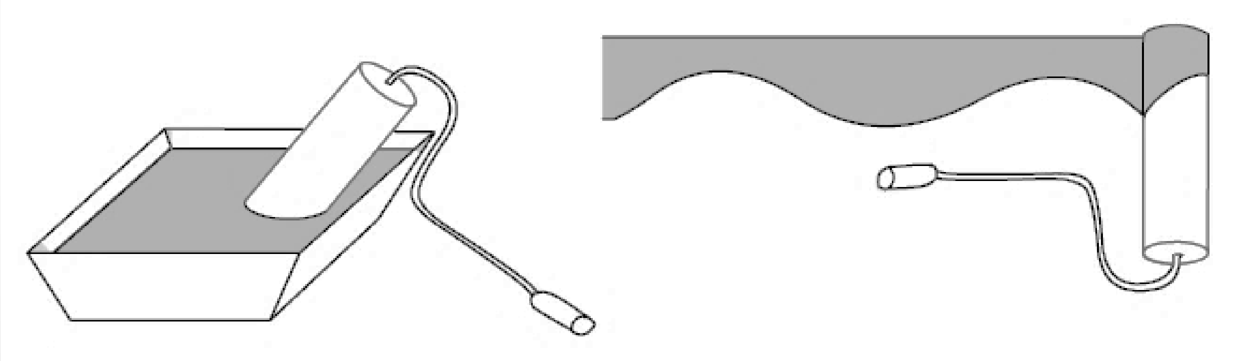
Dit zijn de gegevens



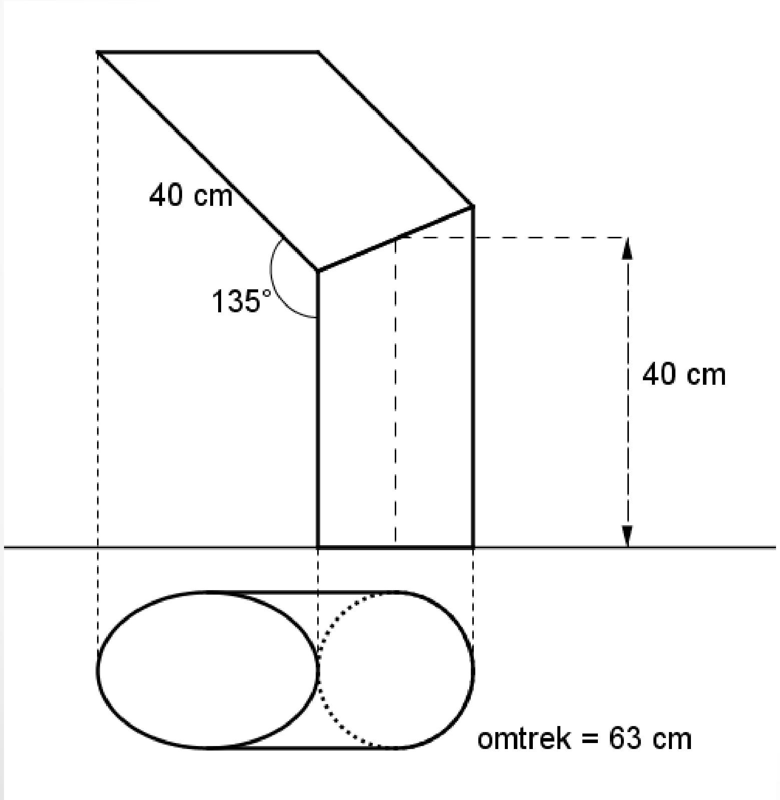
Ontwikkeling van een vlakke doorsnede van een cilinder



Een sinusoïde!



De schouw van mijn collega



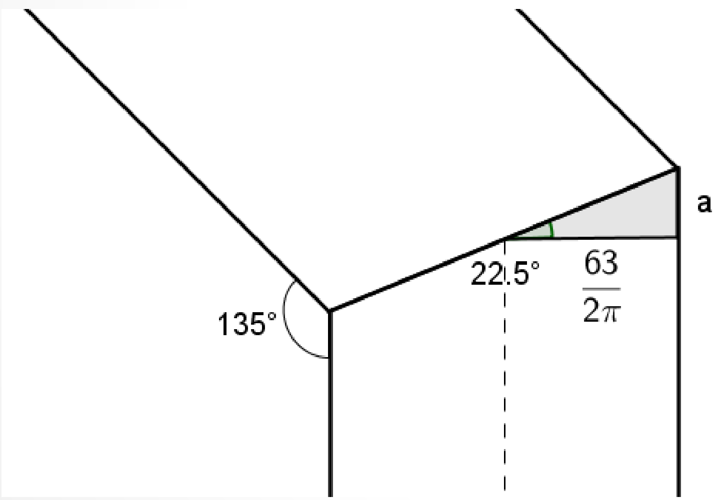
$$y = a\ \cos bx + d$$

$$d = 40$$

$$b = \frac{2\pi}{63}$$

$$a =$$

De schouw van mijn collega

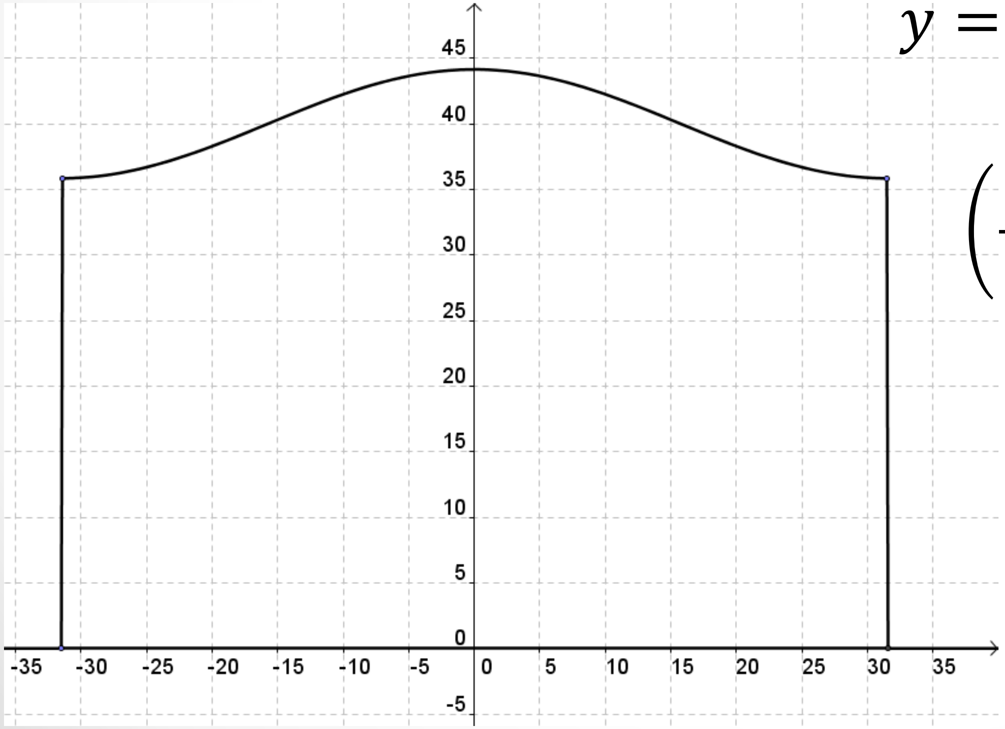


$$a = \frac{63}{2\pi} \tan 22{,}5°$$

straal

De schouw van mijn collega

Ik heb de cilinder opengesneden in het laagste punt van zijn cilindersnede.



$$y = \frac{63}{2\pi} \tan 22{,}5° \cos \frac{2\,\pi x}{63} + 40$$

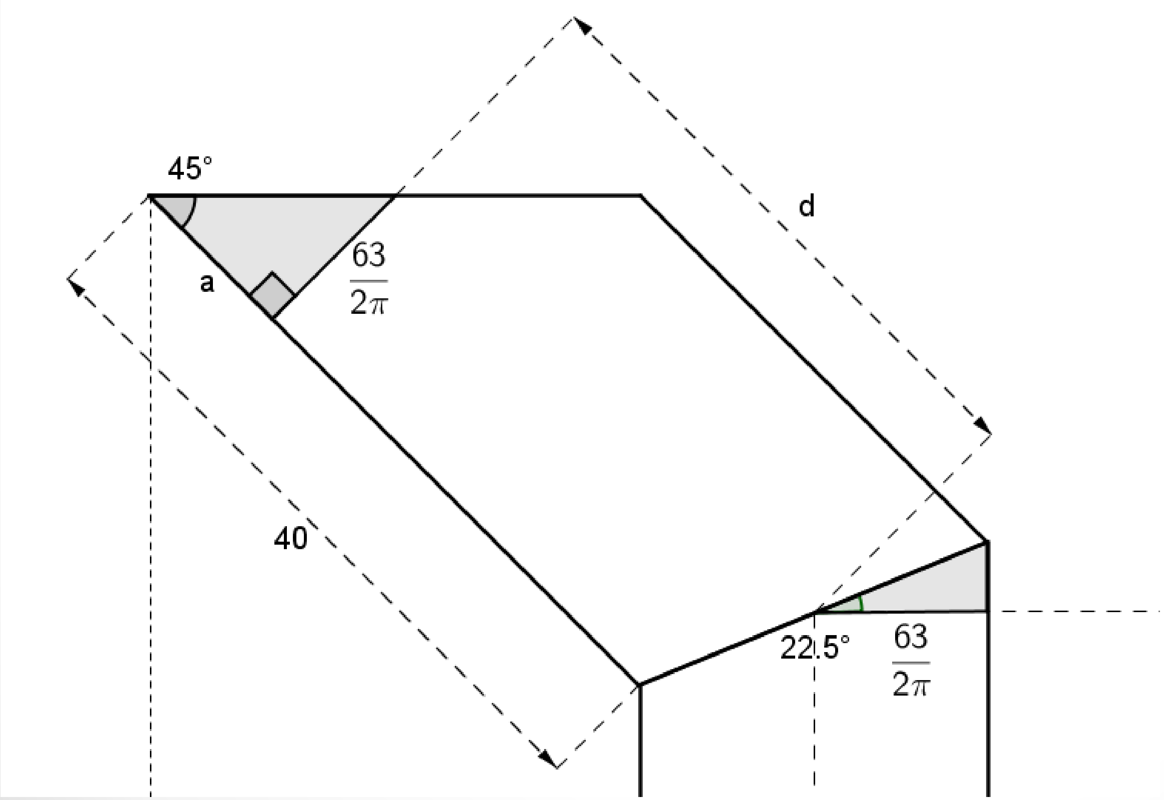
$$\left(-\frac{63}{2} \le x \le \frac{63}{2} \quad \text{in centimeter} \right).$$

Voor de wortelvirtuozen:

$$\tan 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$$

De schouw van mijn collega

$$d = 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi}\tan 22{,}5°.$$

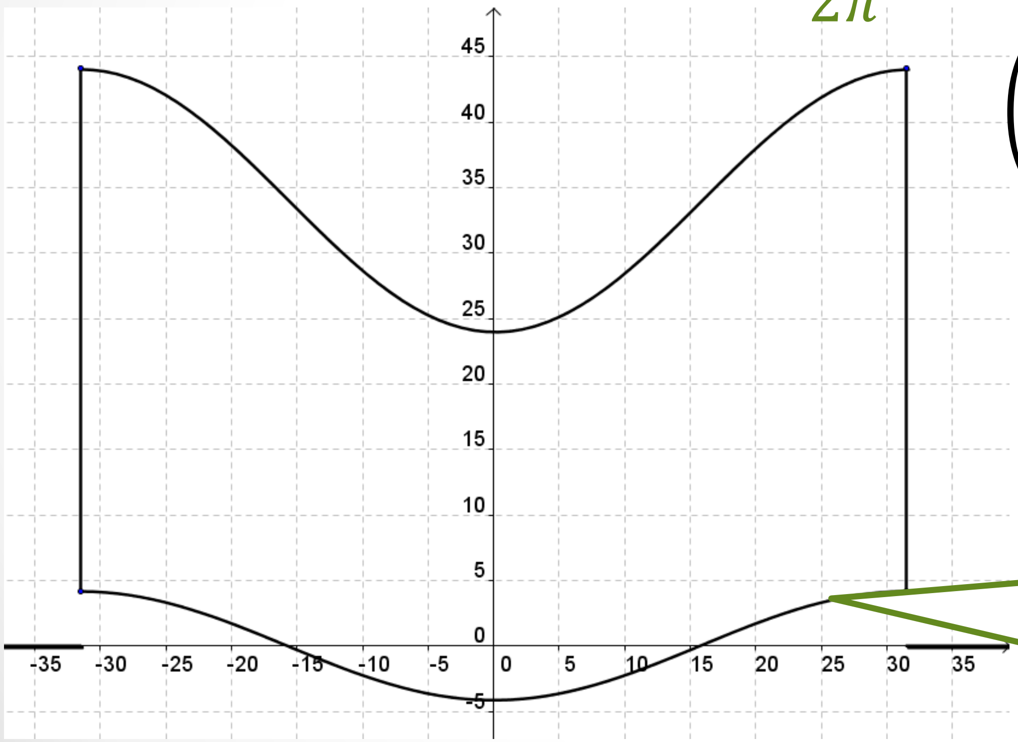


De schouw van mijn collega

Het bovenste stuk:

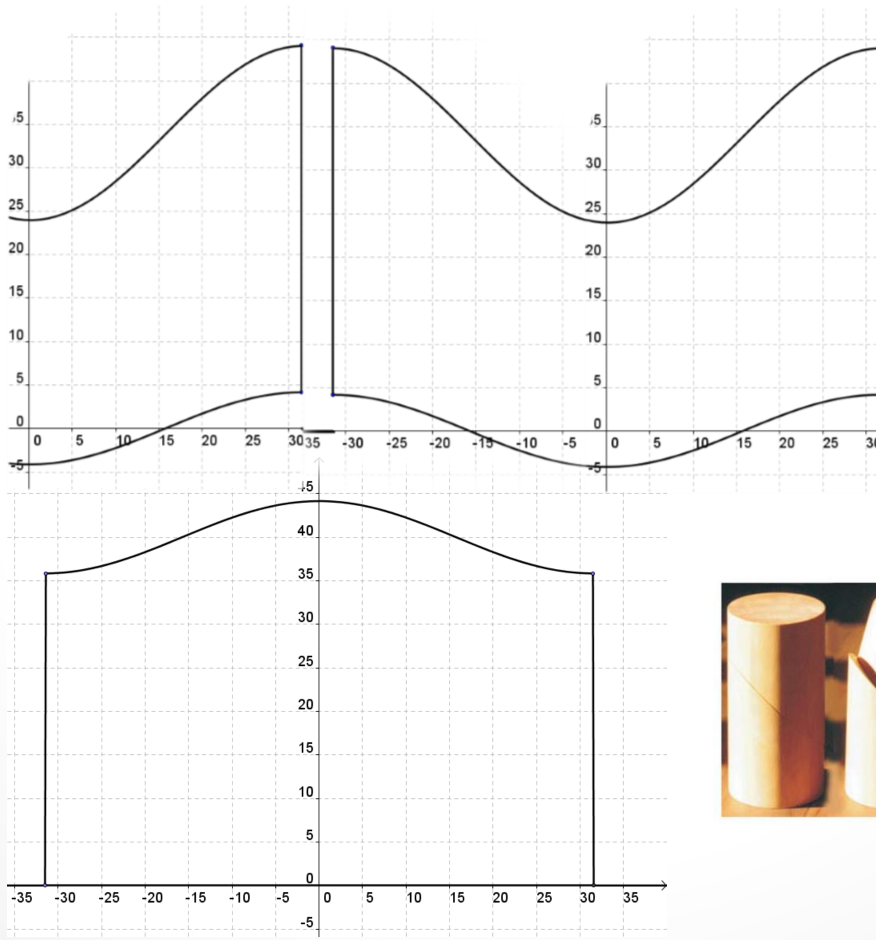
$$y = -\frac{63}{2\pi}\cos\frac{2\,\pi x}{63} + 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi}\tan 22{,}5°$$

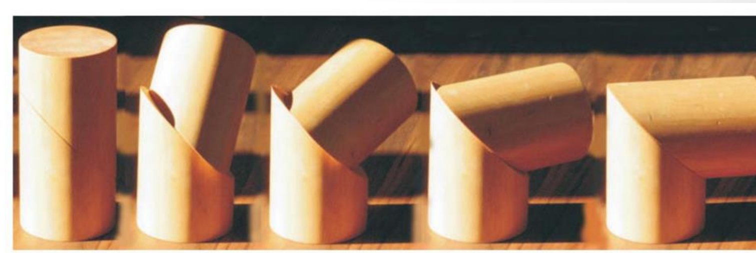
$$\left(-\frac{63}{2} \leq x \leq \frac{63}{2}\right).$$



Het tegengestelde van daarjuist, zonder de constante term

De schouw van mijn collega





De schouw van mijn collega

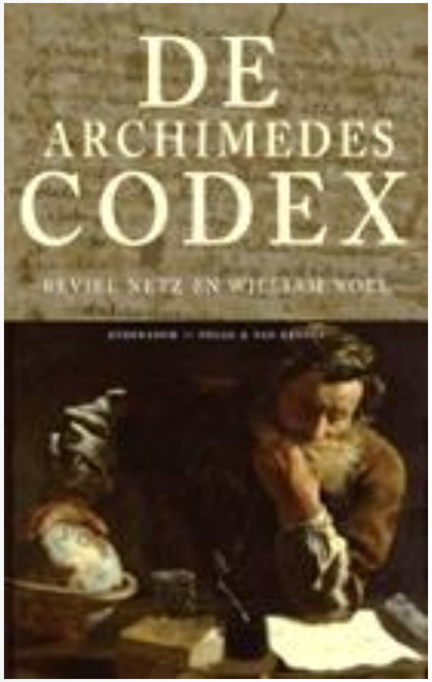
Maar...

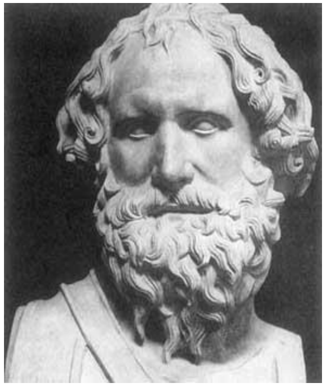
Tweede deel

Onze collega Archimedes

De Methode

(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος)





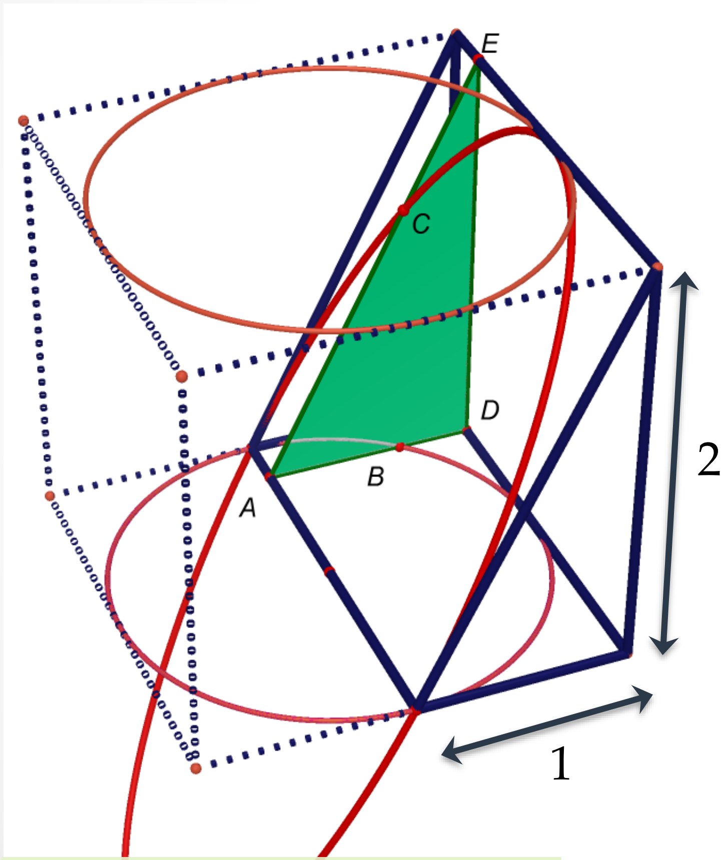
Brief aan Eratosthenes in Codex C

- ontdekt in 1906 (palimpsest)
- Bestudeerd door Heiberg
- gestolen
- verkocht in 1998 aan Mister B voor $ 2 200 000

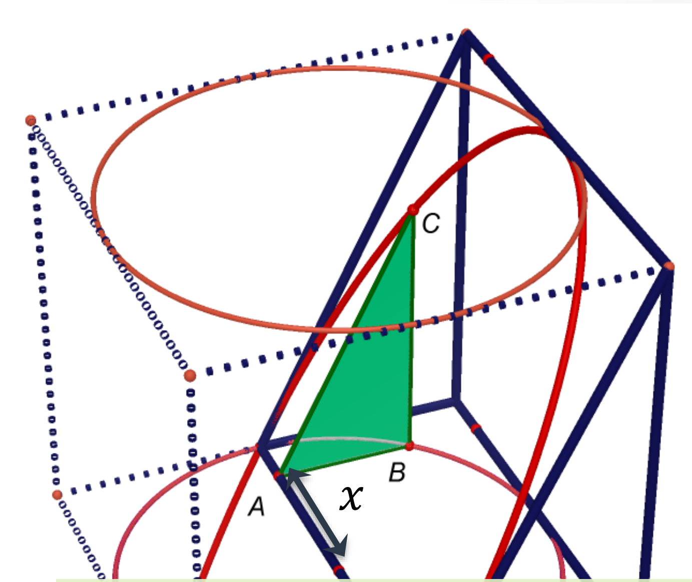
De Methode

(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος)

Volume van een cilindersegment



$\mathrm{A}(ADE) = 1$

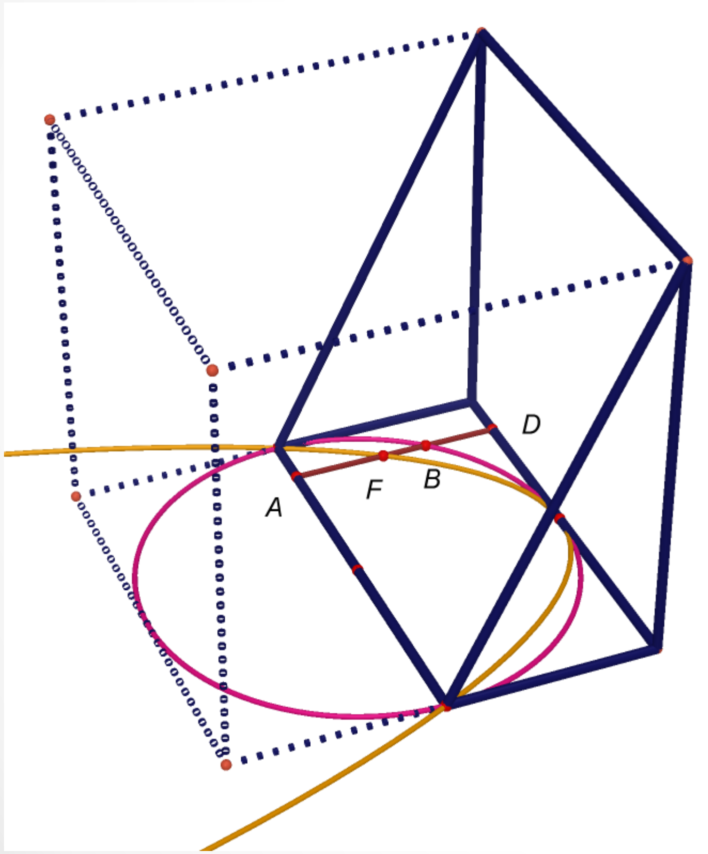


$|AB| = \sqrt{1 - x^2}$

$|BC| = 2\sqrt{1 - x^2}$

$\mathrm{A}(ABC) = 1 - x^2$

Volume van een cilindersegment



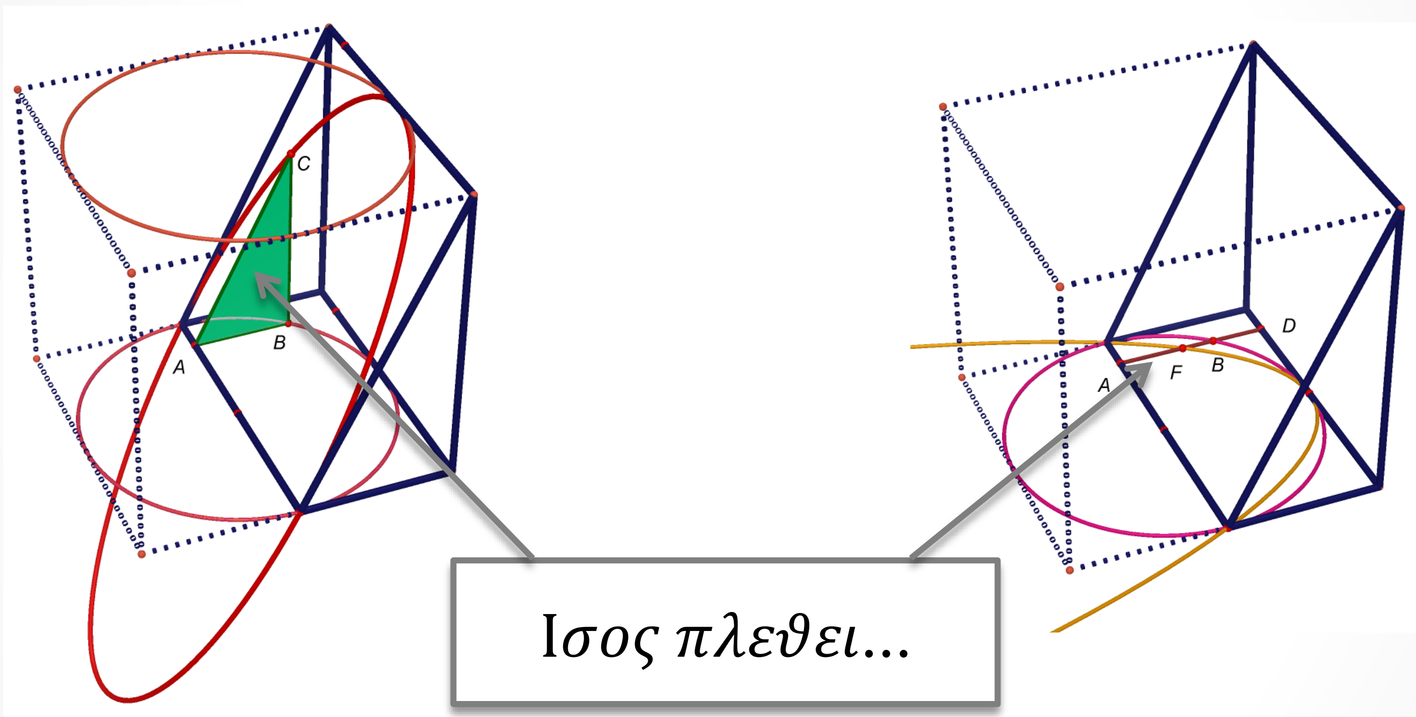
$$\frac{\mathrm{A}(ABC)}{\mathrm{A}(ADE)} = \frac{1 - x^2}{1} = \frac{|AF|}{|AD|}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{V(cilindersegment)}}{\mathrm{V(prisma)}}$$

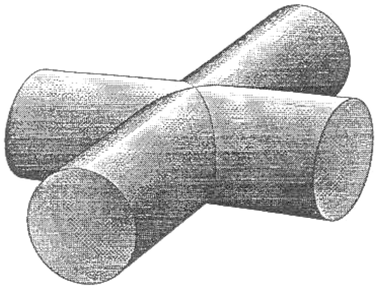
$$= \frac{\mathrm{A(paraboolsegment)}}{\mathrm{A(rechthoek)}} = \frac{2}{3}$$

Resultaat uit "De kwadratuur van de parabool"

Volume van een cilindersegment



Integralen avant-la-lettre? Kardinaalgetallen avant-la-lettre?



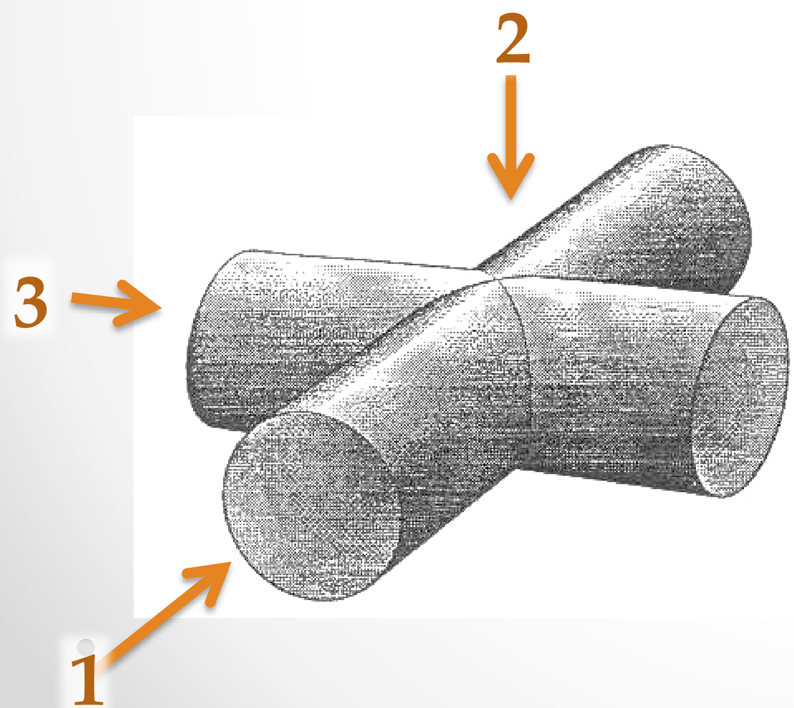
Derde deel

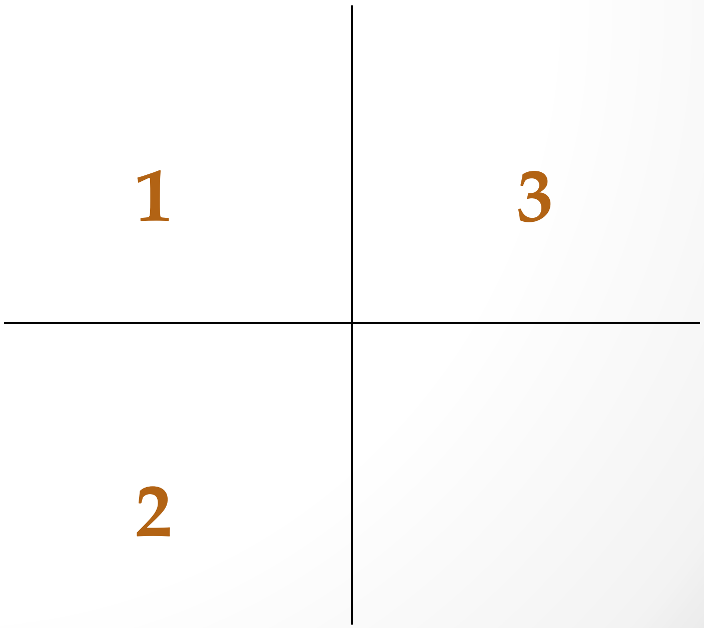
Het lichaam van onze collega 牟合方蓋

Doorsnede van twee cilinders

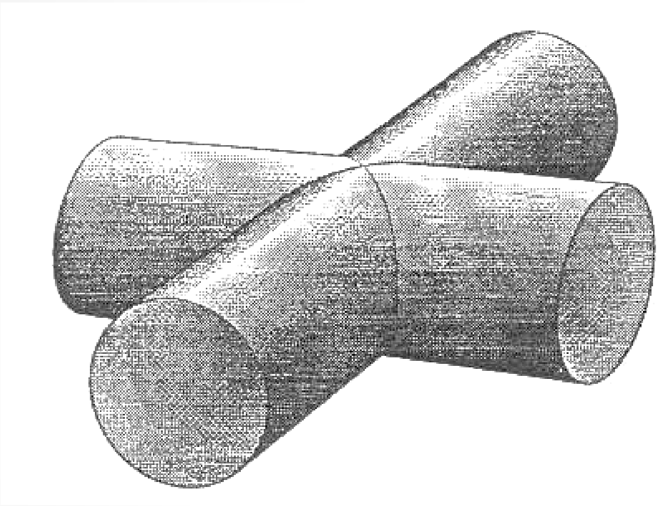
De doorsnede van twee cilinders met gelijke stralen en waarvan de assen elkaar loodrecht snijden

- Welke vorm hebben de ‘ribben’?
- Teken de loodrechte projecties





Doorsnede van twee cilinders



Ribben?

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ (x - y)(x + y) = 0 \end{cases}$$

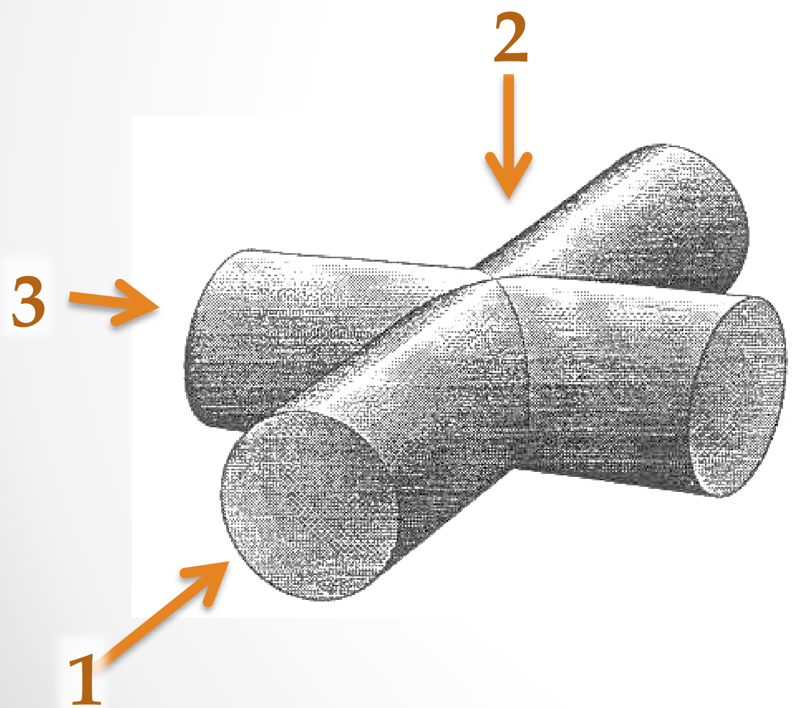
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x - y = 0 \ \vee \ x + y = 0 \end{cases}$$

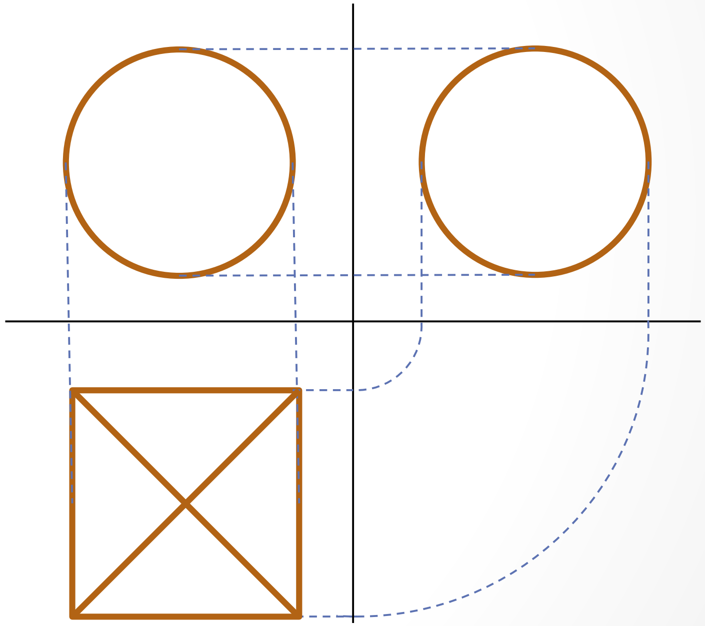
Of meteen, vanwege de symmetrie

Twee ellipsen; verhouding van de assen: $\sqrt{2}$ (excentriciteit: $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Doorsnede van twee cilinders

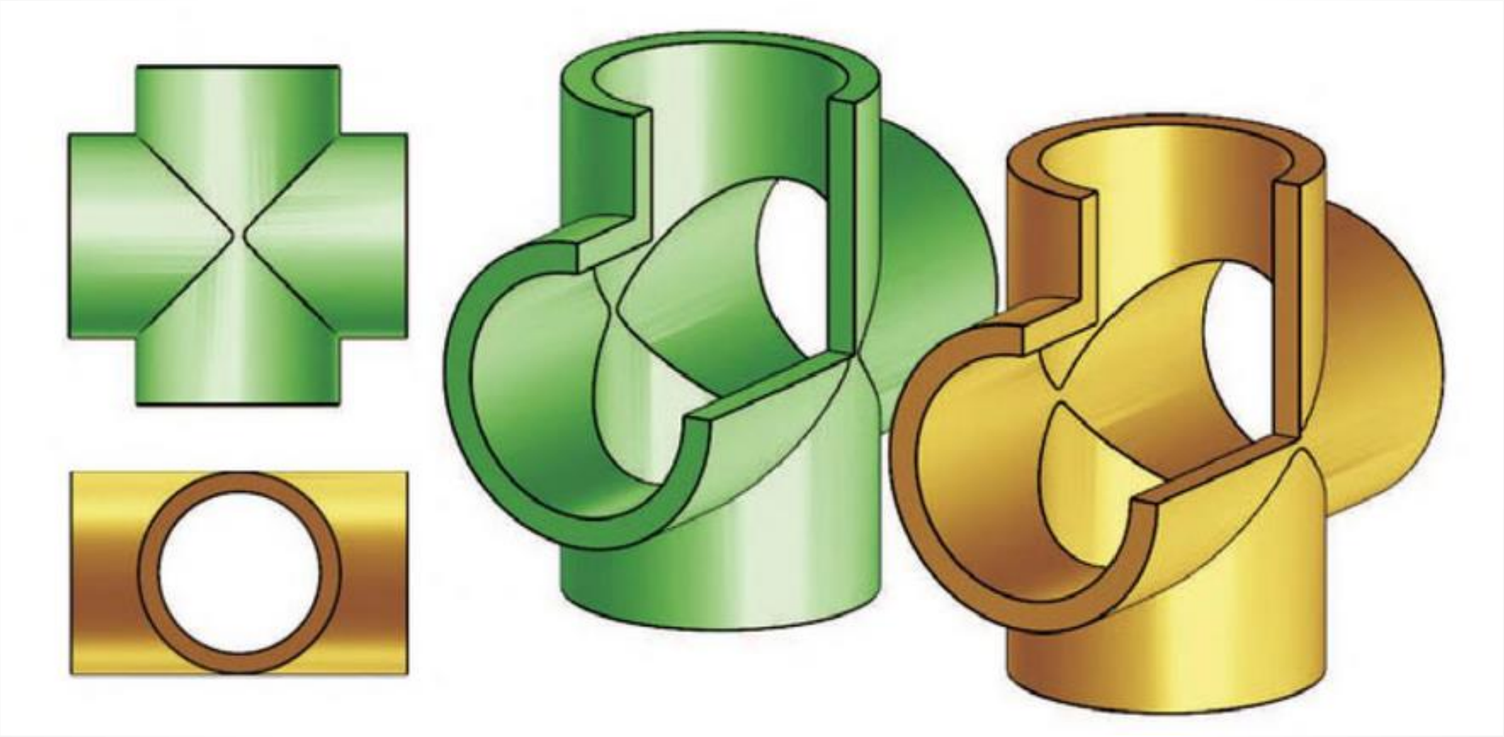
Loodrechte projecties



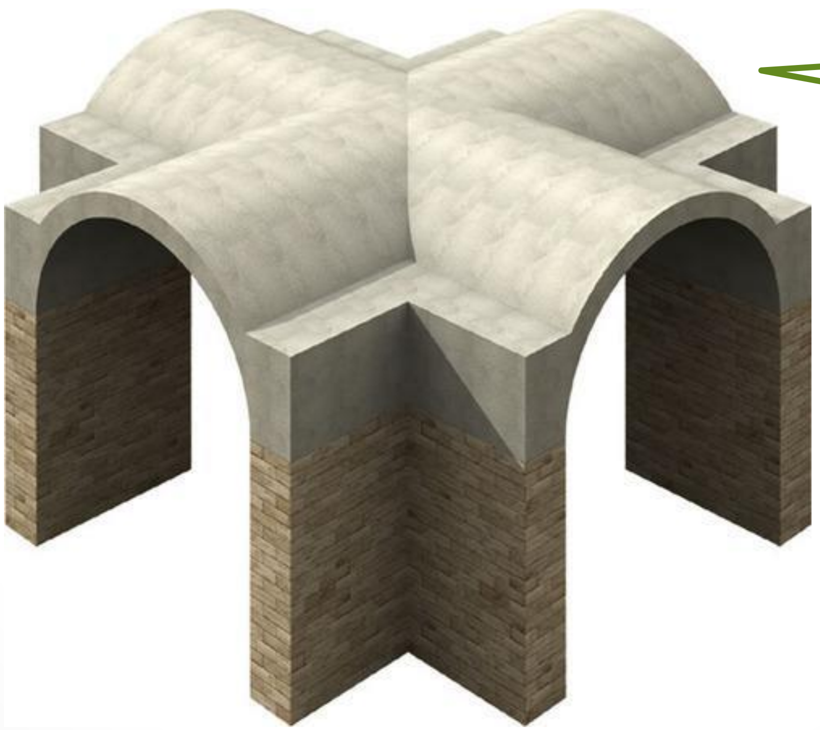


It takes an unusual gift of imagination to visualize this shape clearly. (Strogatz)

Doorsnede van twee cilinders

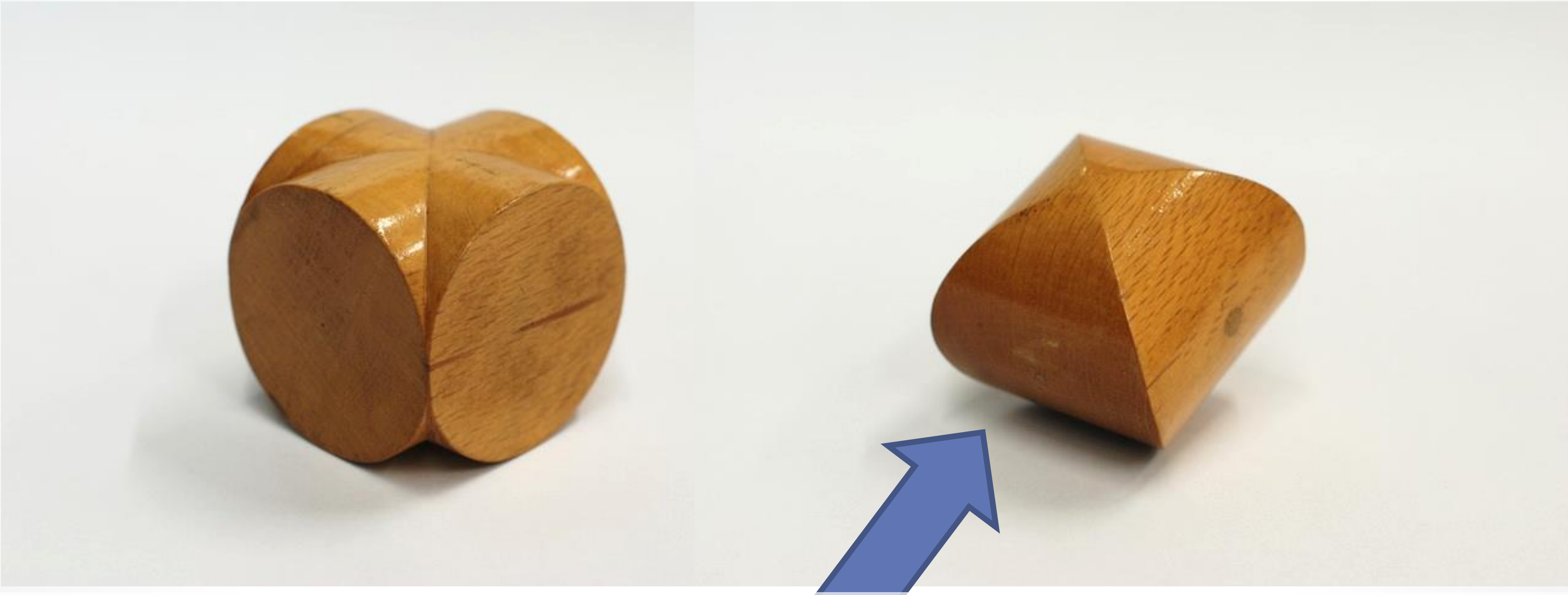


Doorsnede van twee cilinders



Kruisgewelf

Doorsnede van twee cilinders



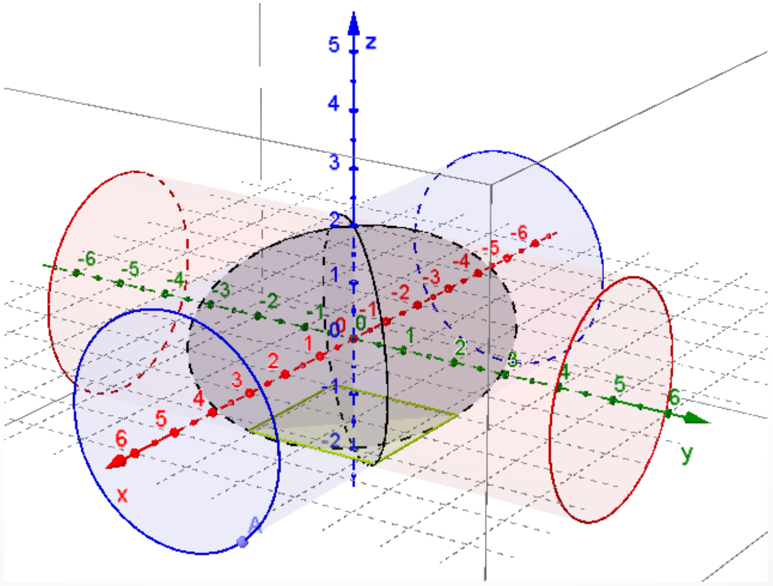
Bicilinder; lichaam van Steinmetz; equidomoïde; vogelkooi

C.P. Steinmetz
1865-1923

Volume van de bicilinder

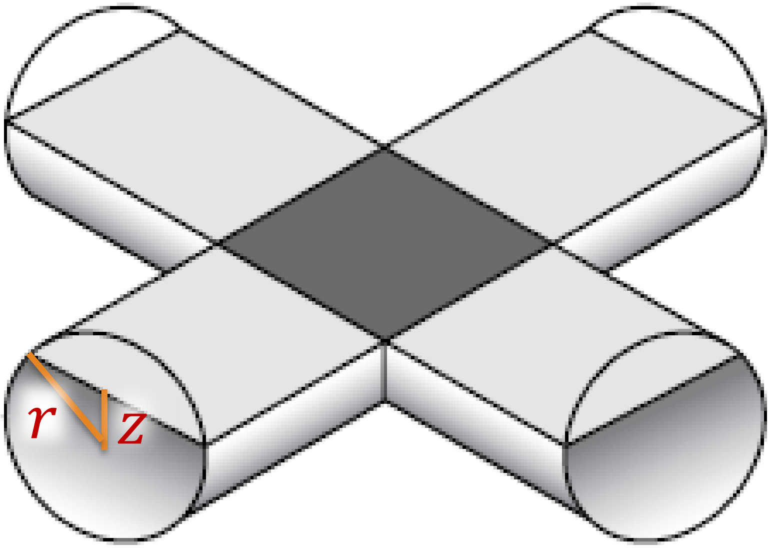
Bereken het volume (in functie van de straal r).

- Welke 'sneetjes' hebben de meest toegankelijke vorm?
- Na de berekening: vergelijk met andere volumes



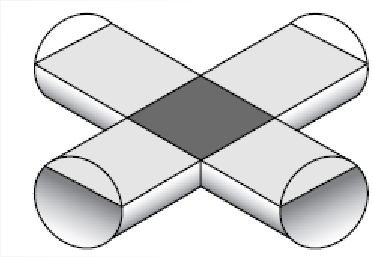
Volume van de bicilinder

De 'horizontale' sneetjes zijn vierkanten!



De zijde van het vierkant op hoogte z is: $2\sqrt{r^2 - z^2}$.

Volume van de bicilinder



$$V = \int_{-r}^{r} \left(2\sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}z$$

$$= 4 \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$= 4 \left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$= 4\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{16r^3}{3} \approx 5{,}33\, r^3$$

Geen π !

Volume van de bicilinder

Vergelijk:

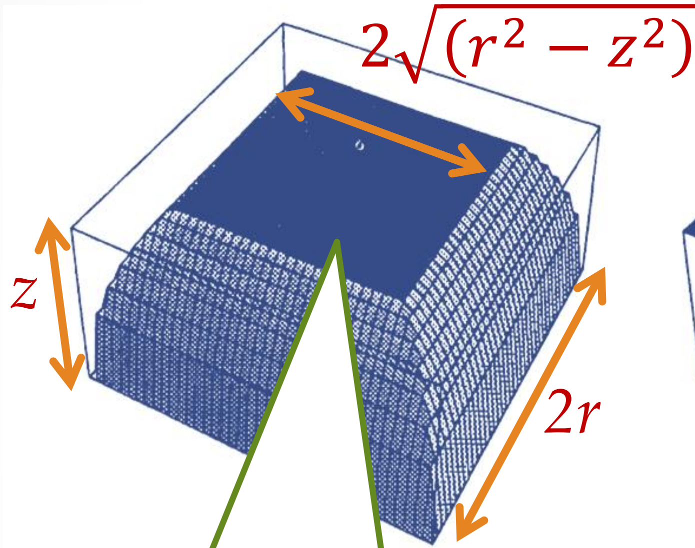
- Omgeschr. kubus: $V = \frac{24}{3} r^3 = 8r^3$
- Bicilinder: $V = \frac{16}{3} r^3 \approx 5{,}33\, r^3$ Gemiddelde
- Ingeschr. bol: $V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4{,}19\, r^3$
- Ingeschr. octaëder: $V = \frac{8}{3} r^3 \approx 2{,}67\, r^3$

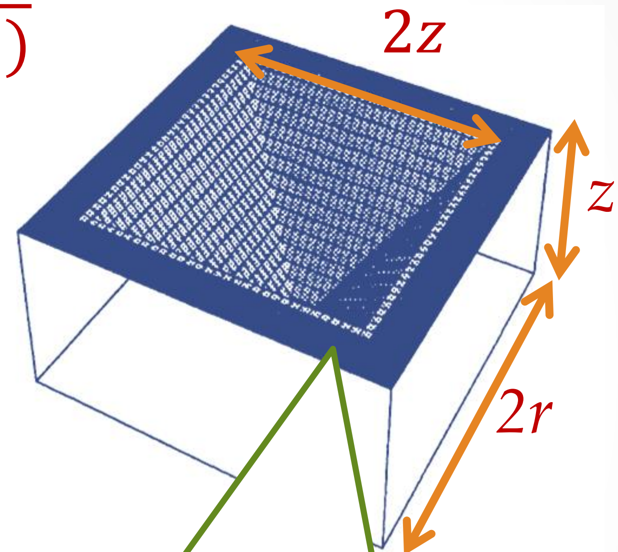
Volume du bicylindre

Vergelijk:

- Omgeschr. kubus: $V = \frac{24}{3}\, r^3 = 8r^3$
- Bicilinder: $V = \frac{16}{3}\, r^3 \approx 5{,}33\, r^3$ $\quad \frac{2}{3}$
- Ingeschr. bol: $V = \frac{4\pi}{3}\, r^3 \approx 4{,}19\, r^3$
- Ingeschr. octaëder: $V = \frac{8}{3}\, r^3 \approx 2{,}67\, r^3$ $\quad \frac{1}{3}$

Volume van de bicilinder





Halve bicilinder doorgesneden op hoogte z

$A = 4(r^2 - z^2)$

Halve kubus min piramide doorgesneden op hoogte z

$A = 4r^2 - 4z^2$

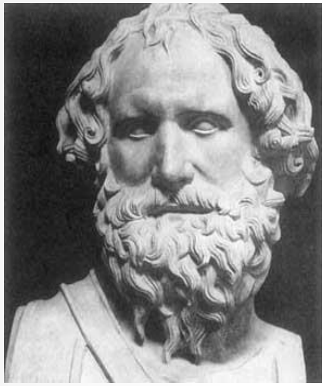
Cavalieri...

Volume van de bicilinder

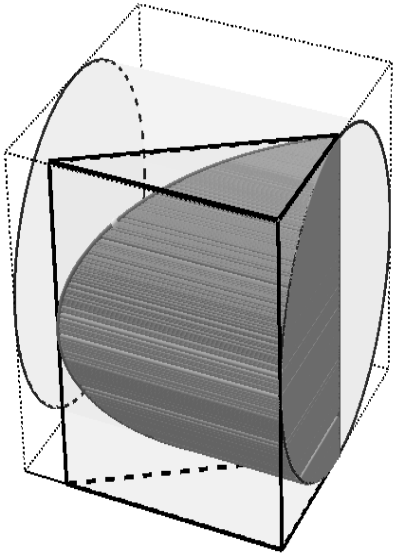
牟合方蓋 (Móuhéfāng gài, letterlijk: dubbel deksel)

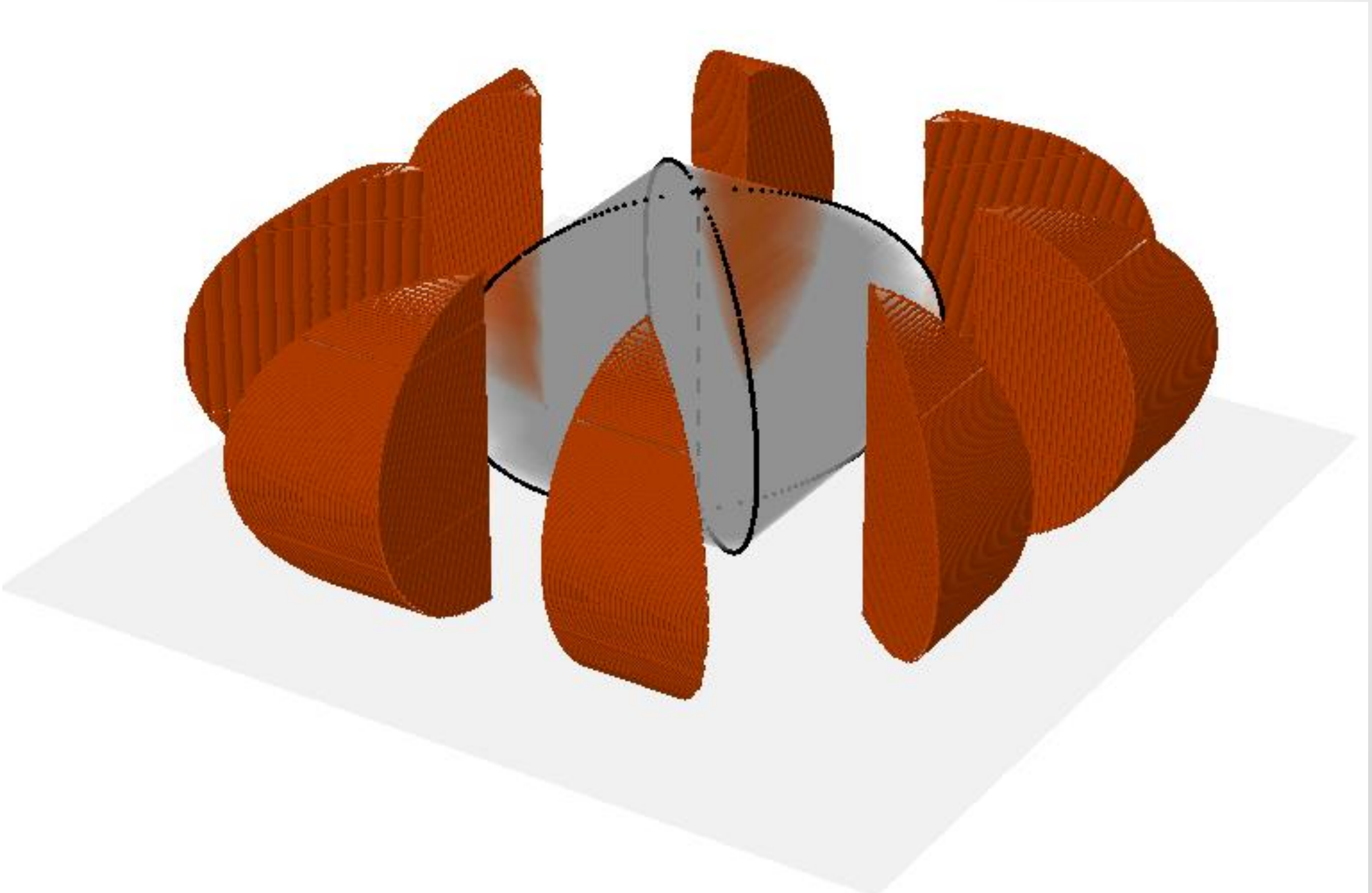
祖沖之 Zu Chongzhi
5de eeuw

Volume van de bicilinder

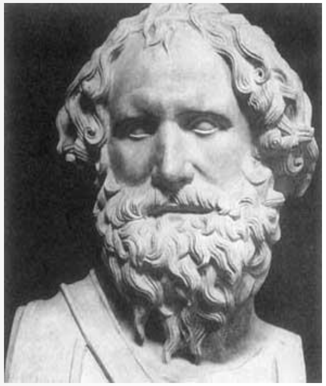


Archimedes





Volume van de bicilinder



Archimedes

$\frac{2}{3}$ van de kubus: Archimedes vermeldt dit in zijn voorwoord op *De Methode*.

Zijn bewijs is verloren gegaan.

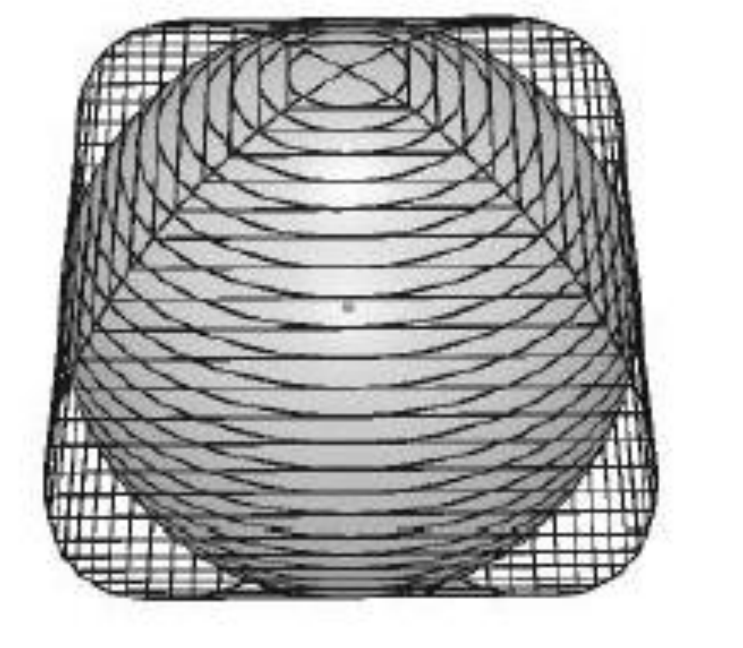
Archimedes merkt op:

In tegenstelling tot bollen, kegels en cilinders, is dit lichaam 'gelijk' aan een veelvlak.

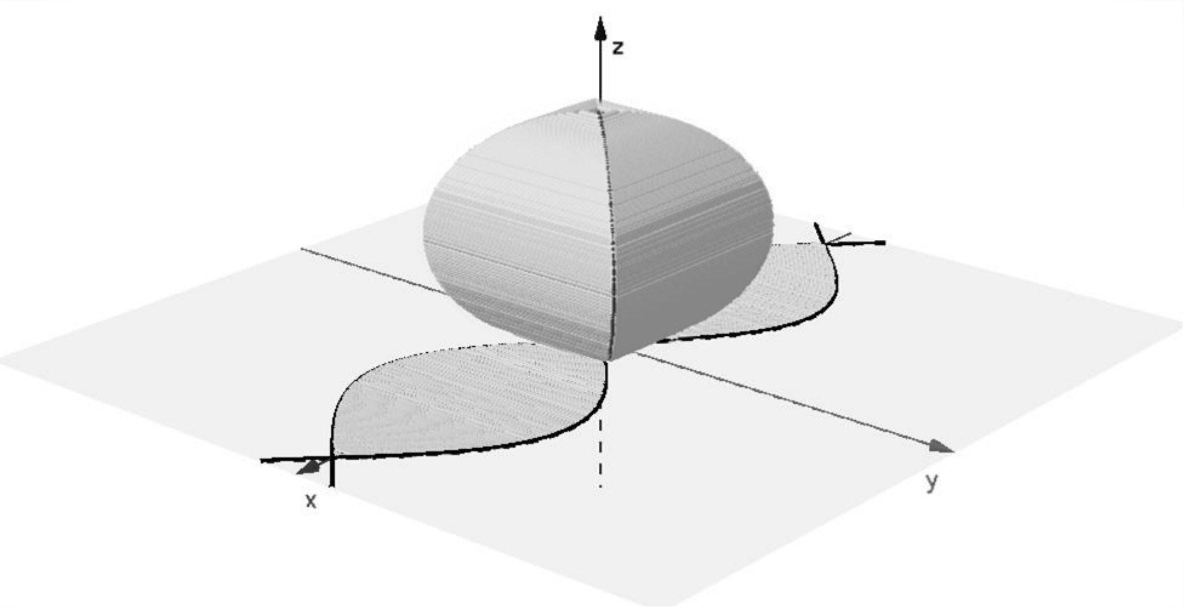
Volume van de bicilinder

刘徽 (Liú Huī, 3de eeuw n.C.), 九章算术 (Jiǔzhāng Suànshù: Negen hoofdstukken van de wiskunst, 2de eeuw v.C.)

bicilinder
→ bol



Oppervlakte van de bicilinder

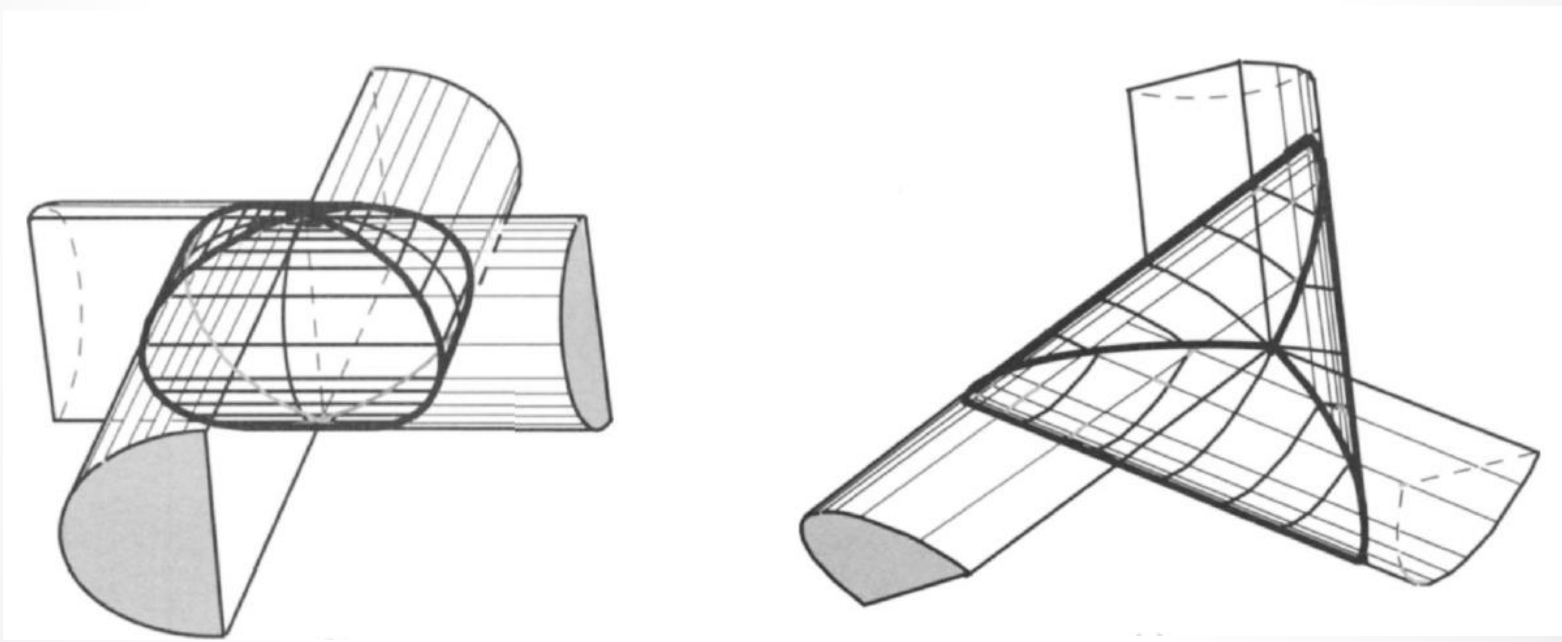


A(bicilinder) $= 16r^2 = \frac{2}{3}$ A(kubus) kwadratuur

V(bicilinder) $= \frac{16}{3}r^3 = \frac{2}{3}$ V(kubus) kubatuur

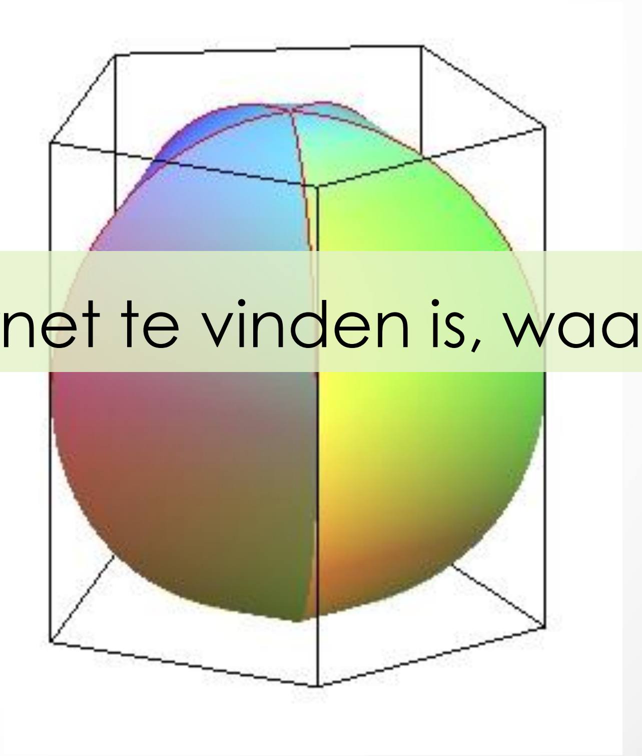
Doorsnede van verschillende horizontale cilinders

"Oneven" veralgemening



Doorsnede van verschillende horizontale cilinders

"De koepel van de kathedraal van Firenze is een halve vijfhoekige equidomoïde." (www.mathcurve.com)



Uiteraard is alles wat op internet te vinden is, waar!

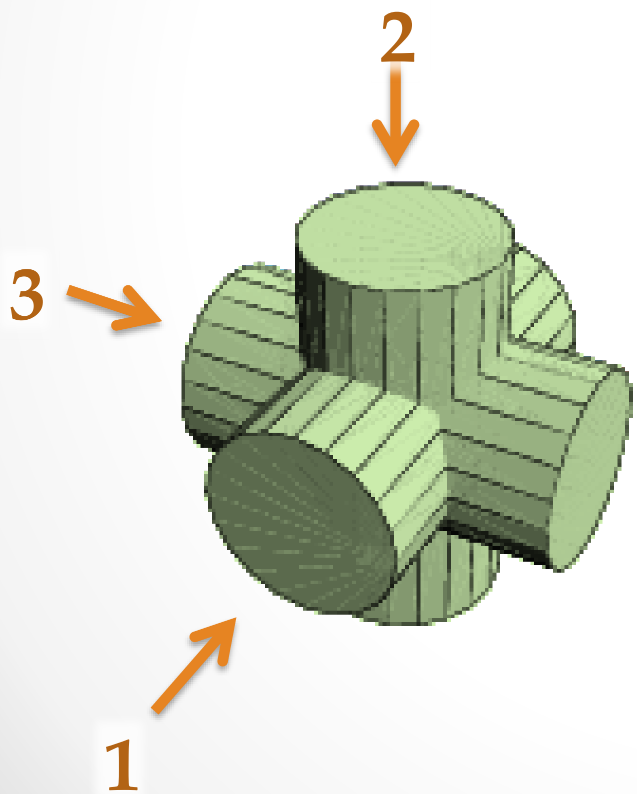
Doorsnede van verschillende horizontale cilinders




Doorsnede van drie loodrechte cilinders

“tricilinder”

Loodrechte projecties? Hoeveel “zijvlakken”?

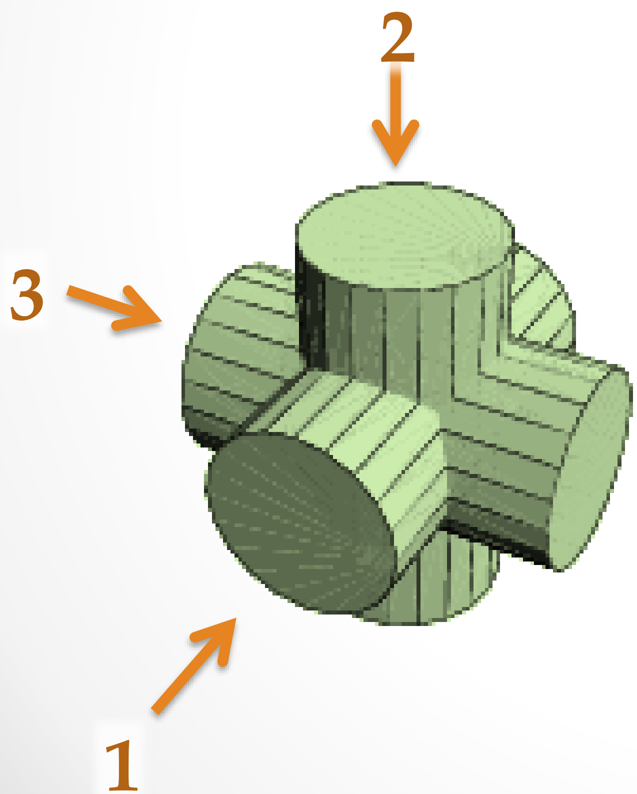


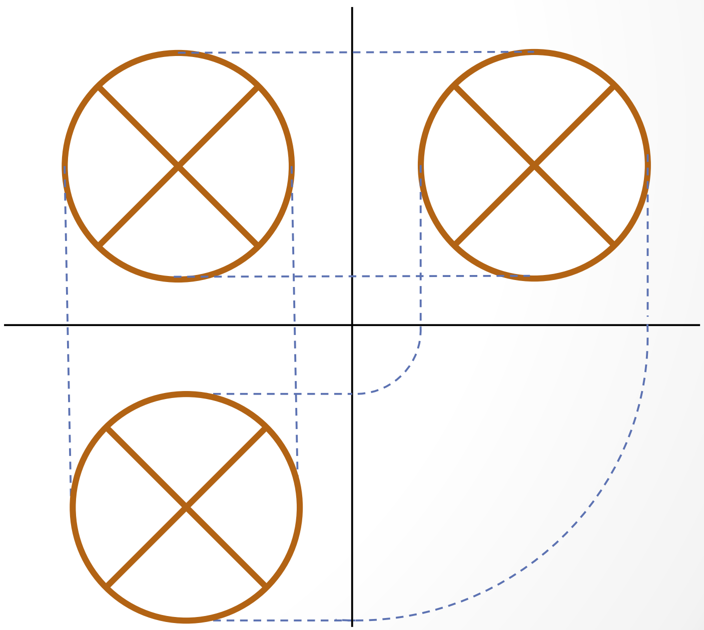
1	3
2	

Doorsnede van drie loodrechte cilinders

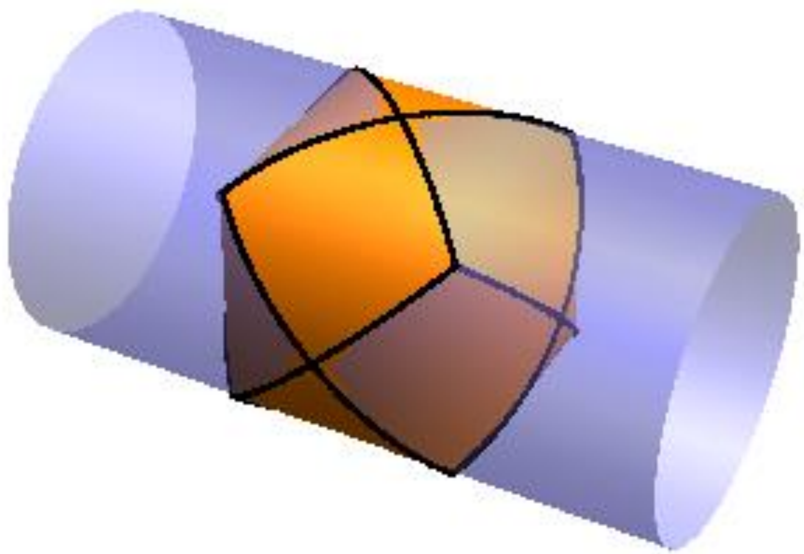
“tricilinder

Loodrechte projecties? Hoeveel “zijvlakken”?

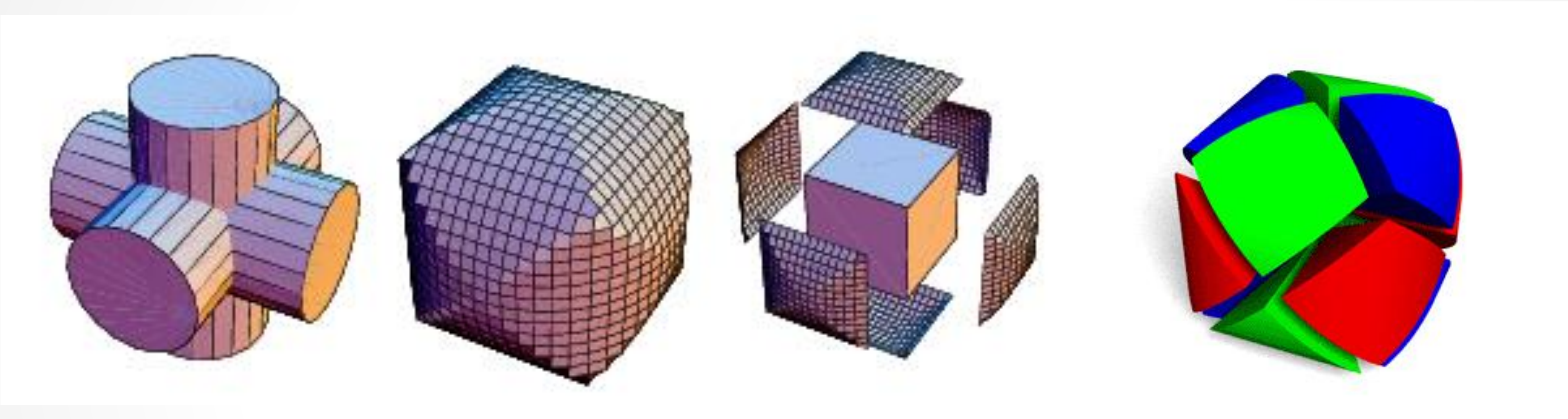




Doorsnede van drie loodrechte cilinders



Doorsnede van drie loodrechte cilinders



Hoekpunten vormen een kubus.

Voor elke ribbe van de kubus een cilindrische ruit.

De ribben zijn stukken ellips

(Gekromd) ruitentwaalfvlak

In de klas?

- Minder routineuze oefening op

$$y = a\sin\big(b\,(x - c)\big) + d$$

- Minder routineuze oefening op volumeberekening met integralen
- Verschillende manieren om een zelfde volume te vinden (met en zonder integralen)
- Combinatie van analyse en ruimtemeetkunde
- **Wiskundig object met een 'geschiedenis'**

Waar vind je de tekst van deze presentatie?

- **Deel 1: Roelens (2013). Ontmoeting van twee cilinders, Uitwiskeling 29/1, 9-12.**
- **Deel 2: Bespreking in *Uitwiskeling 25/4* (2009), 59-65 van het boek Netz, W. Noel (2007). *De Archimedes-codex*.**
- **Deel 3: Roelens, M. (2015). De vogelkooi van Archimedes Zu Chongzhi, Steinmetz en anderen, *Uitwiskeling 31/1* (2015), 8-15**

Bedankt!

Michel.Roelens@ucll.be

www.uitwiskeling.be