Wiskunde op olympisch niveau: iedereen kan het

Birgit van Dalen, Quintijn Puite
Nederlandse Wiskunde Olympiade
NWD, 1–2 februari 2019

Uitwerkingen

Onderstaande opgaven zijn in de workshop aan bod gekomen. De oplossingsstrategie *kleine gevallen* komt bij deze opgaven heel goed van pas. Maak het probleem eens flink kleiner, bekijk bijzondere gevallen en schrijf voorbeelden uit. Het probleem komt dan als vanzelf tot leven, en daarmee ook de handvatten om het algemenere geval op te lossen. In onderstaande uitwerkingen laten we zien hoe dat bij deze opgaven in z'n werk gaat. (Maar probeer het altijd eerst zelf! Heb je tijdens de workshop niet aan alle opgaven gewerkt, lees dan niet de uitwerkingen voordat je zelf serieus met de opgaven aan de slag bent geweest. Zelf oplossen (of deels oplossen) is vele malen leuker dan de oplossing van iemand anders lezen.)
De eerste twee opgaven zijn tijdens de workshop besproken, maar we hebben de uitwerkingen hier nogmaals opgenomen om het nog eens te kunnen nalezen. Daarna volgen de vier opgaven die tijdens de workshop uitgedeeld zijn, maar waarvan de oplossing niet besproken is.

Opgave -1 *Een rij getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ begint met de getallen $a_0 = 2$ en $a_1 = 3$. Vervolgens wordt elk volgend getal a_{n+1} gemaakt uit de vorige twee getallen a_{n-1} en a_n volgens één van de volgende regels:*

$$a_{n+1} = 2a_n \text{ of } a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$

Kan het getal 2019 in de rij voorkomen?

Oplossing De eerste twee termen van de rij liggen vast, maar voor elke volgende term zijn er in principe twee opties. We maken een boomdiagram, dat we hieronder voor het gemak als een tabel weer geven. De bovenste keuze volgt telkens regel $a_{n+1} = 2a_n$ (1), terwijl de onderste juist regel $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ (2) volgt. Dat geeft voor a_3 twee mogelijkheden (6 of 5). In het geval dat $a_3 = 6$ vallen de twee mogelijkheden voor a_4 samen (12 of 12), terwijl in het geval dat $a_3 = 5$ er weer twee echt verschillende mogelijkheden voor a_4 zijn (10 en 9), et cetera.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	3	6	12	24	
				24	
			12	24	
				24	
		5	10	20	
				20	
			9	18	36
					36
				17	34
					33

We zien dat er nogal wat dezelfde getallen in de tabel staan. Het blijkt dat zodra we een keer regel (1) toepassen, regel (1) en (2) vanaf dat moment op hetzelfde neerkomen. Dat kunnen we bewijzen: als $a_{n+1} = 2a_n$ voor zekere n, dan leidt regel (1) tot $a_{n+2} = 2a_{n+1} = 4a_n$, terwijl regel (2) leidt tot $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n = 6a_n - 2a_n = 4a_n$ en dat is hetzelfde. Dus er geldt nu hoe dan ook dat $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ (of we nou regel (1) of regel (2) hebben toegepast). Door dit argument te herhalen zien we dat de rest van de rij nu vastligt en er geldt dat $a_{n+k} = 2^k a_n$ voor alle k.
Als we vanaf het begin echter alsmaar regel (2) toepassen, krijgen we volgens onze tabel de rij $2, 3, 5, 9, 17, 33, \ldots$. Zien we hier een regelmaat in? Ja, dit zijn tweemachten plus één, bijvoorbeeld $a_6 = 33 = 2^5 + 1$. We kunnen nagaan dat voor $n = 1, 2, \ldots, 6$ geldt dat $a_n = 2^{n-1} + 1$. Zou dat algemeen gelden? Stel $a_n = 2^{n-1} + 1$ en $a_{n-1} = 2^{n-2} + 1$ en we passen dan regel (2) toe, dan vinden we dat

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 3a_n - 2a_{n-1} \\
&= 3(2^{n-1} + 1) - 2(2^{n-2} + 1) \\
&= 3 \cdot 2^{n-1} + 3 - 2^{n-1} - 2 \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} + 1 \\
&= 2^n + 1
\end{aligned}$$

wat aantoont dat de formule $a_n = 2^{n-1} + 1$ blijft gelden. Maar zodra er een keer regel (1) wordt toegepast, krijgen we $a_{n+k} = 2^k a_n = 2^k(2^{n-1} + 1)$.
Kunnen we op deze manier op het getal 2019 uitkomen? Allereerst is 2019 niet even, dus het zou dan in de rij $2, 3, 5, 9, 17, 33, \ldots$ moeten voorkomen. Maar het is ook geen tweemacht plus één; de dichtsbijzijnde getallen van die vorm zijn $2^{10} + 1 = 1025$ en $2^{11} + 1 = 2049$. We concluderen dat 2019 nooit kan voorkomen in de rij. $\square$

Opgave 0 *De getallen 1 tot en met 12 worden in een rijtje achter elkaar gezet. Het aantal manieren waarop dit kan is* $12 \times 11 \times 10 \times \ldots \times 1$. *We eisen dat er in zo'n rijtje precies één getal staat dat kleiner is dan het getal dat er direct aan voorafgaat. Hoeveel van de* $12 \times 11 \times 10 \times \ldots \times 1$ *rijtjes voldoen aan deze eis?*

Oplossing Rijtjes die voldoen aan de eis noemen we voor het gemak even *goede* rijtjes. Een voorbeeld is $1, 4, 6, 8, 10, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12$: elk element is groter dan zijn voorganger, behalve het getal 2 dat kleiner is dan zijn voorganger, dus dit is inderdaad een goed rijtje. Geven we tussen de elementen van de rij door middel van ongelijkheidstekens aan of er sprake is van een toename of een afname, dan krijgen we

$$1 < 4 < 6 < 8 < 10 > 2 < 3 < 5 < 7 < 9 < 11 < 12.$$

Een rijtje voldoet aan de eis precies dan als precies één van deze ongelijkheidstekens het $>$-teken is.
De 12 in de opgave lijkt tamelijk willekeurig. Laten we deze vervangen door N en dan eerst eens kijken wat het antwoord is voor kleinere waarden van N. Neem bijvoorbeeld $N = 3$. Er zijn $3! = 6$ rijtjes, die we systematisch opschrijven met ongelijkheidstekens tussen de elementen:

$$\begin{array}{ccc}
1 < 2 < 3 & 2 > 1 < 3 & 3 > 1 < 2 \\
1 < 3 > 2 & 2 < 3 > 1 & 3 > 2 > 1
\end{array}$$

We zien dat op het eerste en laatste rijtje na, alle rijtjes voldoen. Schrijven we M voor het aantal rijtjes dat voldoet, dan zien we dus dat $M = 4$.
Voor $N = 4$ maken we de volgende tabel van alle mogelijke rijtjes-met-ongelijkheidstekens.

$1 < 2 < 3 < 4$ (0)	$2 > 1 < 3 < 4$ (1)	$3 > 1 < 2 < 4$ (1)	$4 > 1 < 2 < 3$ (1)
$1 < 2 < 4 > 3$ (1)	$2 > 1 < 4 > 3$ (2)	$3 > 1 < 4 > 2$ (2)	$4 > 1 < 3 > 2$ (2)
$1 < 3 > 2 < 4$ (1)	$2 < 3 > 1 < 4$ (1)	$3 > 2 > 1 < 4$ (2)	$4 > 2 > 1 < 3$ (2)
$1 < 3 < 4 > 2$ (1)	$2 < 3 < 4 > 1$ (1)	$3 > 2 < 4 > 1$ (2)	$4 > 2 < 3 > 1$ (2)
$1 < 4 > 2 < 3$ (1)	$2 < 4 > 1 < 3$ (1)	$3 < 4 > 1 < 2$ (1)	$4 > 3 > 1 < 2$ (2)
$1 < 4 > 3 > 2$ (2)	$2 < 4 > 3 > 1$ (2)	$3 < 4 > 2 > 1$ (2)	$4 > 3 > 2 > 1$ (3)

Achter elk rijtje staat het aantal $>$-tekens in dat rijtje. Er geldt nu blijkbaar dat $M = 11$. Het is nog niet direct duidelijk waar dit getal vandaan komt, maar misschien helpt het om de rijtjes op een andere manier te sorteren. Hierboven zijn ze gesorteerd op het begingetal, maar we zouden ze ook kunnen sorteren op de plek van het $>$-teken (en dan alleen de rijtes die voldoen). Dan krijgen we dit:

$2 > 1 < 3 < 4$	$1 < 3 > 2 < 4$	$1 < 2 < 4 > 3$
$3 > 1 < 2 < 4$	$1 < 4 > 2 < 3$	$1 < 3 < 4 > 2$
$4 > 1 < 2 < 3$	$2 < 3 > 1 < 4$	$2 < 3 < 4 > 1$
	$2 < 4 > 1 < 3$	
	$3 < 4 > 1 < 2$	

Nu ontstaan er wel patronen. Zo zien we in de eerste kolom (de rijtjes met het $>$-teken op de eerste plaats) dat het eerste getal in het rijtje bij alle drie verschillend is. Waarom is dat? Waarom zouden er bijvoorbeeld niet twee verschillende rijtjes die beginnen met $3 > \ldots$ kunnen bestaan? Omdat de volgorde van de overige drie getallen al vast ligt, want daar mogen alleen maar $<$-tekens tussen. De overige getallen moeten dus wel in oplopende volgorde staan. In de middelste kolom hebben we dus ook steeds verschillende tweetallen getallen links van het $>$-teken: die moeten zelf in oplopende volgorde staan en de twee getallen die dan juist rechts komen, moeten ook in oplopende volgorde staan. Dus als we twee getallen uitkiezen om links te staan, dan ligt het rijtje verder helemaal vast. Maar waarom zijn er dan niet 6 rijtjes in de middelste kolom, want je kunt toch op 6 manieren twee getallen uit vier kiezen? Er is blijkbaar geen rijtje dat begint met $1 < 2 > \ldots$. Ah, dat is ook logisch, want als je 1 en 2 links zet en 3 en 4 rechts, dan wordt het $1 < 2 < 3 < 4$ en daar staat helemaal geen $>$-teken in. Net zo goed valt in de eerste kolom het rijtje met de 1 links weg, en in de tweede kolom het rijtje met 1, 2 en 3 links.
Om het patroon mooier te maken, zou je dus eigenlijk in elke kolom nog het rijtje $1 < 2 < 3 < 4$ moeten toevoegen, ook al is dat een rijtje dat niet voldoet. Dan staan er $4+6+4 = 14$ rijtjes. Dit herkennen we als getallen uit de driehoek van Pascal: $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3} = 2^4-2$. Die 2^4-2 kunnen we ook op een andere manier beredeneren: we willen steeds een groepje getallen uitkiezen om links van het $>$-teken te staan. Daarbij kunnen we elk getal *wel* of *niet* kiezen. Dat geeft 2^4 mogelijkheden, waarbij ook de mogelijkheid zit om geen enkel getal te kiezen of juist alle getallen te kiezen; die laatste twee zijn in ons verhaal geen geschikte opties. Dus dat geeft $2^4 - 2$ mogelijkheden.
We hebben nu genoeg informatie om de berekening voor algemene N te gaan doen. Want ook daar geldt: zodra je gekozen hebt welke getallen er links van het $>$-teken komen, ligt het rijtje

helemaal vast. En met dezelfde redenering zien we dat dat op $2^N - 2$ manieren kan. Nu moeten we nog tellen hoeveel rijtjes $1 < 2 < 3 < \ldots < N$ hierbij zitten, want die voldoen eigenlijk niet. Dit gebeurt een keer als we één getal kiezen voor het linkerdeel (namelijk als we het getal 1 kiezen), een keer als we twee getallen kiezen (namelijk als we precies 1 en 2 kiezen), een keer als we drie getallen kiezen, enzovoorts. De laatste keer dat dit gebeurt, is als we 1 tot en met $N-1$ kiezen om links van het $>$-teken te staan. In totaal krijgen we dus $N - 1$ keer het rijtje $1 < 2 < 3 < \ldots < N$. We concluderen dat het totaal aantal rijtjes dat voldoet, gelijk is aan $M = 2^N - 2 - (N - 1)$, oftewel $M = 2^N - (N + 1)$. Voor $N = 3$ geeft dit $M = 4$ en voor $N = 4$ geeft dit $M = 11$, precies zoals we met de hand al gevonden hadden.
Het antwoord op het oorspronkelijke probleem is het bijzondere geval $N = 12$ van dit algemene verhaal. We concluderen dat er $2^{12} - 13$ rijtjes zijn die voldoen. □

Opgave 1 *Je wil een rij van 1000 getallen opschrijven, allemaal breuken of gehele getallen. De rij moet voldoen aan de volgende eigenschappen:*

- *Het eerste getal is geheel of het laatste getal is geheel (of allebei).*
- *De eerste twee getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste twee getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).*
- *De eerste drie getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste drie getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).*
- *...*
- *De eerste 500 getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste 500 getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).*

Je probeert zo min mogelijk gehele getallen te gebruiken. Hoeveel gehele getallen heb je minimaal nodig in je rij om aan alle eigenschappen te voldoen?

Oplossing Met alle 1000 getallen geheel wordt zeker aan de voorwaarden voldaan. En met 500 ook nog wel: kies bijvoorbeeld de eerste 500 getallen geheel; dan geldt dat de eerste k getallen bij elkaar opgeteld geheel zijn voor alle $1 \leq k \leq 500$. Maar het kan vast met nog minder gehele getallen...
Om hier achter te komen, bekijken we eerst veel kleinere gevallen van ditzelfde probleem. Niet een rij van 1000 getallen, maar rijen van 2, 4 of 6 getallen.
Bekijken we rijen van 2 getallen, dan is de enige voorwaarde dat het eerste of het laatste getal geheel moet zijn. Dus we hebben dan in ieder geval één geheel getal. De rij $1, \frac{1}{2}$ voldoet aan de voorwaarde, dus met één geheel getal lukt het ook echt. Het antwoord is nu dus dat 1 het gevraagde minimale aantal gehele getallen is dat je nodig hebt.
Bekijken we rijen van 4 getallen, dan zijn er twee voorwaarden: het eerste of het vierde getal is geheel (dus we hebben op zijn minst één geheel getal), en het eerste en het tweede of het derde en het vierde zijn bij elkaar opgeteld geheel. Stel dat we een rij $1, x_2, x_3, x_4$ bekijken, die in ieder geval aan de eerste voorwaarde voldoet, dan moet dus $1 + x_2$ geheel zijn of juist $x_3 + x_4$. Om $1 + x_2$ geheel te krijgen, moet x_2 zelf geheel zijn. Maar om $x_3 + x_4$ geheel te krijgen, hoeven x_3 en x_4 niet geheel te zijn. We kunnen bijvoorbeeld de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ nemen; die voldoet aan beide voorwaarden: x_1 is geheel en $x_3 + x_4$ is geheel.
Voor rijen van 6 getallen zien we dat $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ voldoet: er geldt dat x_1 geheel is, verder $x_5 + x_6$ en ten slotte ook $x_1 + x_2 + x_3$. En voor rijen van 8 getallen voldoet $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Het moge

duidelijk zijn dat de rij bestaande uit één 1 en vervolgens 999 maal de breuk $\frac{1}{2}$ aan de 500 voorwaarden van het oorspronkelijke probleem voldoet: het eerste getal is geheel, de laatste twee bij elkaar zijn geheel, de eerste drie bij elkaar zijn geheel, et cetera. Omdat je wegens de eerste voorwaarde sowieso minstens één geheel getal nodig hebt en er een rijtje is dat aan alle voorwaarden voldoet met maar één geheel getal, is het antwoord dus dat je minimaal één geheel getal nodig hebt maar meer ook niet! □

Opgave 2 *Een* zaagtandgetal *is een positief geheel getal met de volgende eigenschap: van elk drietal cijfers naast elkaar is het middelste cijfer ófwel groter dan zijn twee buurcijfers ófwel kleiner dan zijn twee buurcijfers. De getallen 352723 en 314 zijn bijvoorbeeld zaagtandgetallen, maar 3422 en 1243 niet. Hoeveel zaagtandgetallen van acht cijfers lang zijn er waarvan elk cijfer een 1, een 2 of een 3 is?*

Oplossing We schrijven eerst maar eens de zaagtandgetallen uit van lengte 3, waarvan elk cijfer een 1, een 2 of een 3 is. Dat zijn

$$1-2-1 \qquad 1-3-1 \qquad 1-3-2 \qquad 2-3-1 \qquad 2-3-2$$

en de symmetrische tegenhangers

$$3-2-3 \qquad 3-1-3 \qquad 3-1-2 \qquad 2-1-3 \qquad 2-1-2$$

We kunnen ook goed beredeneren dat dit ze allemaal zijn: in het geval dat het middelste cijfer groter is dan zijn buurgetallen (noem dit type laag – hoog – laag) , dan is dat middelste cijfer minstens 2. Als het 2 is, is er voor de buurgetallen maar één optie (1 en 1); als het 3 is zijn er $2 \times 2 = 4$ opties. Zo vinden we de eerste 5 zaagtandgetallen. We schrijven a_n voor het aantal zaagtandgetallen van lengte n van een bepaald type (laag – hoog – laag – ... of juist hoog – laag – hoog – ...), dus $a_3 = 5$.
De zaagtandgetallen van lengte 4 van het type laag – hoog – laag – hoog zijn

$$1-2-1-2 \qquad 1-3-1-2 \qquad 1-2-1-3 \qquad 1-3-1-3$$

$$1-3-2-3 \qquad 2-3-1-2 \qquad 2-3-1-3 \qquad 2-3-2-3$$

Ook hiervan is het duidelijk dat dit ze allemaal zijn: als de twee lage getallen 1 en 1 zijn, heb je vier mogelijkheden (zie de bovenste rij); als de twee lage getallen 1, 2; 2, 1 of 2, 2 zijn heb je respectievelijk 1, 2 en 1 mogelijkheid. Dit zijn er samen acht, dus $a_4 = 8$. (En uiteraard zijn er nóg acht zaagtandgetallen van lengte 4 maar dan van het type hoog – laag – hoog – laag.)
Wat ons nu opvalt (met dank aan het uitwerken van deze kleine gevallen!) is dat van deze acht er vijf met een 1 beginnen, terwijl ook $a_3 = 5$. Zou dat met elkaar te maken hebben? Ja: als je die eerste 1 weglaat, hou je uiteraard een zaagtandgetal van lengte 3 over, en als je omgekeerd een willekeurig zaagtandgetal van lengte 3 neemt van type hoog – laag – hoog kun je daar altijd een 1 voor zetten en dan heb je een zaagtandgetal van lengte 4 (van type laag – hoog – laag – hoog). De overige drie zaagtandgetallen uit onze tabel beginnen juist met een 2. Daarna moet wel een 3 komen, maar daarna mag weer een willekeurig rijtje van type laag – hoog komen: 1 - 2; 1 - 3 of 2 - 3. Schrijven we dus $a_2 = 3$, dan vinden we dat $a_4 = a_3 + a_2$.
Dit resultaat geldt algemener: bekijken we zaagtandgetallen van lengte n van een bepaald type (zeg laag – hoog – laag – ...), dan kun je die krijgen door een 1 te kiezen voor het eerste lage

getal gevolgd door een willekeurig zaagtandgetal van lengte $n-1$ van type hoog – laag – hoog – …, of door een 2 te kiezen, dan een 3, en dan een willekeurig zaagtand getal van lengte $n-2$ van type laag – hoog – laag – …. Dat wil zeggen dat $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, dus $a_5 = 8 + 5 = 13$, $a_6 = 13 + 8 = 21$, $a_7 = 21 + 13 = 34$ en $a_8 = 34 + 21 = 55$. We concluderen dat er in totaal 110 zaagtandgetallen van lengte 8 zijn. □

Opgave 3 *Simon heeft 2017 blauwe blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Hij heeft ook 2017 gele blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Simon wil zijn 4034 blokjes op een rij leggen. Hij wil dat zó doen dat voor elke* $k = 1, 2, \dots, 2017$ *aan de volgende voorwaarden is voldaan:*

- *links van het blauwe blokje met nummer k liggen k of meer gele blokjes;*
- *rechts van het gele blokje met nummer k liggen k of minder blauwe blokjes.*

Bepaal alle mogelijke nummers van het 1000e blokje van links in de rij.

Oplossing Dit is op het eerste gezicht een nogal gecompliceerd probleem met maar liefst 4034 eisen over de volgorde van de blokjes. Maar het zal vast niet wezenlijk veranderen als we hier een kleinere versie van maken, zoals een versie met 10 blauwe en 10 gele blokjes. Het is misschien niet meteen duidelijk hoe we dan het getal 1000 uit de opdracht moeten mee veranderen, maar ook dit lijkt een vrij willekeurig getal. Blijkbaar ligt de volgorde vast of is daar in ieder geval iets zinnigs over te zeggen, waardoor we dus de vraag kunnen beantwoorden welke mogelijkheden er zijn voor het 1e blokje, het 2e blokje, et cetera tot en met het 4034e blokje.
Laten we beginnen met het kleinste kleine geval: één blauw blokje B1 en één geel blokje G1. De eerste eis zegt: links van B1 liggen één of meer gele blokjes. Dan moet de volgorde wel G1, B1 zijn. Aan de tweede eis, dat rechts van G1 hooguit één blauw blokje ligt, is meteen ook voldaan.
We gaan naar het volgende kleine geval: twee blauwe blokjes B1 en B2, en twee gele blokjes G1 en G2, met de eisen dat links van B1 minstens één geel blokje ligt, links van B2 minstens twee gele blokjes, rechts van G1 hooguit één blauw blokje en rechts van G2 hooguit twee blauwe blokjes. Wegens de eerste twee eisen over B1 en B2 zien we dat er voor hun plaats ten op zicht van de twee gele blokjes het volgende geldt. Noem de twee gele blokjes van links naar rechts Ga en Gb (over de nummers op deze twee blokjes gaan we pas later nadenken), dan zit B1 dus rechts van Ga en B2 dus zelfs rechts van Gb. De opties zijn dus Ga, B1, Gb, B2 of Ga, Gb, B1, B2 of Ga, Gb, B2, B1. Maar rechts van G1 mag hooguit één blauw blokje liggen, dus de laatste twee opties vallen af. We houden over dat de blokjes in de volgorde Ga, B1, Gb, B2 liggen en dat Gb wel G1 moet zijn, dus G2, B1, G1, B2.
Voor het geval van drie blauwe en drie gele blokjes, krijgen we de volgorde Ga, B1→, Gb, B2→, Gc, B3, waarbij de pijltjes aangeven dat die blauwe blokjes in principe ook nog verder naar rechts kunnen liggen als we alleen naar de eisen voor B1, B2 en B3 kijken. Maar rechts van G1 mag maar hooguit één blauw blokje liggen, dus Gc is G1, en B1 en B2 mogen niet over G1 heen schuiven: Ga, B1→, Gb, B2, G1, B3. En rechts van G2 mogen maar hooguit twee blauwe blokjes liggen; G2 kan dus nooit op de plek Ga staan maar moet wel Gb zijn: Ga, B1→, G2, B2, G1, B3. Ten slotte kan B1 toch ook niet verder naar rechts, dus de volgorde ligt helemaal vast: G3, B1, G2, B2, G1, B3.
Dit generaliseert naar het geval uit de vraagstelling. We vinden dan de volgorde G2017, B1, G2016, B2, G2015, B3, et cetera. We zien dat het 2e blokje B1 is, het 4e blokje B2, et cetera. Het 1000e

blokje is dus B500; kortom, 500 is het enig mogelijke nummer op het 1000e blokje. $\square$

Opgave 4 *Vind voor elk positief geheel getal n twee positieve gehele getallen a en b waarvoor geldt*

$$1+\frac{3}{n}=\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right).$$

Oplossing Laten we eerst eens kijken of het ons voor $n=1$ lukt. Dan staat er links $1+\frac{3}{1}=4$. Nu is de rechterkant hooguit 4 omdat elk van de factoren hooguit 2 is. Het moet dus wel zo zijn dat $a=1$ en $b=1$.
Voor $n=2$ staat er links $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. Dat willen we graag schrijven als $\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)$. Stel dat we $b=1$ kiezen zodat $1+\frac{1}{b}=2$, zou het dan lukken? Dan moet $1+\frac{1}{a}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}$; ja, dit lukt, neem maar $a=4$. Dus we kunnen nu $(a,b)=(4,1)$ nemen.
We realiseren ons nu dat het eigenlijk handiger is om de vergelijking in breuken-zonder-gehelen te schrijven. Het wordt dan

$$\frac{n}{n}+\frac{3}{n}=\left(\frac{a}{a}+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{b}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

oftewel

$$\frac{n+3}{n}=\left(\frac{a+1}{a}\right)\cdot\left(\frac{b+1}{b}\right).$$

In woorden: we moeten elk breuk waarbij de teller 3 groter is dan de noemer, schrijven als product van twee breuken waarvoor geldt dat de teller precies 1 groter is dan de noemer.
We gaan door waar we gebleven waren. Voor $n=3$ moeten we dus $\frac{6}{3}$ schrijven als zo'n product. Het product $\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{3}$ is wel gelijk aan $\frac{6}{3}$, maar voldoet nog net niet omdat de eerste factor nog niet van de gewenst vorm is. Als we de eerste breuk echter vereenvoudigen, staat hier $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$ en dat voldoet wel. Dus nu kunnen we $(a,b)=(2,3)$ nemen (dit zijn de noemers van de twee breuken uit die laatste schrijfwijze).
Voor $n=4$ moeten we $\frac{7}{4}$ herschrijven. Net als bij $n=3$ zouden we $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{4}$ kunnen proberen, maar helaas lopen we dan vast. Echter $\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{4}$ werkt wel; dit is gelijk aan $\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{2}$, dus neem maar $(a,b)=(6,2)$.
Voor $n=5$ moeten we $\frac{8}{5}$ herschrijven en werkt de aanpak van $n=3$ weer: $\frac{8}{5}=\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}$, dus neem maar $(a,b)=(3,5)$.
En voor $n=6$ werkt de vergelijkbare aanpak als bij $n=4$ beter: $\frac{9}{6}=\frac{9}{8}\cdot\frac{8}{6}=\frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3}$, dus neem maar $(a,b)=(8,3)$.
We zien dat we in al deze gevallen de breuk $\frac{n+3}{n}$ in eerste instantie opsplitsen in $\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$ (als n oneven is) of in $\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+2}{n}$ (als n even is) en vervolgens nog een factor 2 wegstrepen in teller en noemer van een van die twee breuken. Om in het algemeen te laten zien dat dit werkt, maken we daarom ook dit gevalsonderscheid tussen n is oneven en n is even. Daarmee komen we op het volgende algemene bewijs.
Stel n is oneven, zeg $n=2k-1$. Dan staat er links $\frac{n+3}{n}=\frac{2k+2}{2k-1}$. Dit kunnen we herschrijven tot $\frac{2k+2}{2k}\cdot\frac{2k}{2k-1}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{2k}{2k-1}$. In deze laatste schrijfwijze zijn beide factoren van de gewenste vorm, wat aangeeft dat $(a,b)=(k,2k-1)$ inderdaad voldoet.
Stel n is even, zeg $n=2k$. Dan staat er links $\frac{n+3}{n}=\frac{2k+3}{2k}$. Dit kunnen we herschrijven tot $\frac{2k+3}{2k+2}\cdot\frac{2k+2}{2k}=\frac{2k+3}{2k+2}\cdot\frac{k+1}{k}$. In deze laatste schrijfwijze zijn beide factoren weer van de gewenste vorm, wat aangeeft dat $(a,b)=(2k+2,k)$ inderdaad voldoet.
Hiermee is de opgave helemaal opgelost. $\square$