

Wiskunde op olympisch niveau: iedereen kan het



Birgit van Dalen, Quintijn Puite
Nederlandse Wiskunde Olympiade
NWD, 1–2 februari 2019

Opgave 1.

Je wil een rij van 1000 getallen opschrijven, allemaal breuken of gehele getallen. De rij moet voldoen aan de volgende eigenschappen:

- Het eerste getal is geheel of het laatste getal is geheel (of allebei).
- De eerste twee getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste twee getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).
- De eerste drie getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste drie getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).
- ...
- De eerste 500 getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel of de laatste 500 getallen zijn bij elkaar opgeteld geheel (of allebei).

Je probeert zo min mogelijk gehele getallen te gebruiken. Hoeveel gehele getallen heb je minimaal nodig in je rij om aan alle eigenschappen te voldoen?

Opgave 2.

Een *zaagtandgetal* is een positief geheel getal met de volgende eigenschap: van elk drietal cijfers naast elkaar is het middelste cijfer ófwel groter dan zijn twee buurcijfers ófwel kleiner dan zijn twee buurcijfers. De getallen 352723 en 314 zijn bijvoorbeeld zaagtandgetallen, maar 3422 en 1243 niet. Hoeveel zaagtandgetallen van acht cijfers lang zijn er waarvan elk cijfer een 1, een 2 of een 3 is?

Opgave 3.

Simon heeft 2017 blauwe blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Hij heeft ook 2017 gele blokjes die genummerd zijn van 1 tot en met 2017. Simon wil zijn 4034 blokjes op een rij leggen. Hij wil dat zó doen dat voor elke $k = 1, 2, \dots, 2017$ aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- links van het blauwe blokje met nummer k liggen k of meer gele blokjes;
- rechts van het gele blokje met nummer k liggen k of minder blauwe blokjes.

Bepaal alle mogelijke nummers van het 1000e blokje van links in de rij.

Opgave 4.

Vind voor elk positief geheel getal n twee positieve gehele getallen a en b waarvoor geldt

$$1 + \frac{3}{n} = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right).$$