rijksuniversiteit groningen

Pas op je tellen!

Naar een didactiek voor combinatoriek

Saskia van Boven, Radboud Docenten Academie
Gerrit Roorda, RUG, Lerarenopleiding

Radboud Universiteit Nijmegen

rijksuniversiteit groningen

Inleiding en aanleiding

- Behoefte om materialen te delen voor vakdidactiek
- Discussie over waarom combinatoriek zo lastig is
- Bestuderen literatuur over het onderwijzen van combinatoriek
- Bestuderen van lesmateriaal (Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde)

Opvallende zaken

- Bij telproblemen is het onmogelijk om aan de hand van één algoritme tot een oplossing te komen
- Probleemoplosvaardigheden nodig (welke?)
- Doorzettingsvermogen nodig
- Lesboeken delen telproblemen op in stukjes met een overzichtelijke aanpak → de keuze van een oplossingsstrategie wordt daarmee 'voorgezegd'
- Juist het beginnen bij het oplossen van een telprobleem is moeilijk

Inhoud workshop

1. Ervaren en observeren (15 minuten)
2. Expliciteren oplossingsstrategieën (10 minuten)
3. Theoretische achtergrond (10 minuten)
4. Verwerkingsopdracht (15 minuten)

In iets andere vorm is dit als college gegeven aan

- Studenten van de ULO (RUG en RU)
- Studenten van de Vakmaster HAN en NHL
- Docenten van DOT en Alumni

1. Ervaren en observeren

1. Ervaren en observeren

- Maak drietallen of viertallen:
  - Twee probleemoplossers
  - Een of twee observatoren
- Los de telproblemen in het tweetal op en denk daarbij hardop, overleg ook hardop, zodat de observatoren het oplossingsproces kunnen volgen

Twee telproblemen, namelijk

1. Logeren bij oma (Batanero, 1997)
2. Sjoelbak (naar Coenen & Timmer, 2016)

2. Expliciteren oplossingsstrategieën

- We inventariseren opvallende zaken in het oplossingsproces

Observatoren:

- Wat hebben jullie de probleemoplossers zien doen?

Probleemoplossers:

- Hoe hebben jullie het ervaren?
- Hoe zeker ben je van je antwoord?

2. Expliciteren oplossingsstrategieën

- Zomaar wat proberen en hopen dat je dan structuur ontdekt
- Je moet iets doen met de getallen uit het probleem
- Het probleem verkleinen (dit kwam overigens nauwelijks voor, behalve bij een groep waar we het sjoelbak probleem hadden aangepast naar 15 stenen)
- Controles uitvoeren (wat ook verassend vaak niet gedaan werd), bijvoorbeeld het probleem op een andere manier nogmaals oplossen en controleren of je op hetzelfde antwoord uitkomt

2. Expliciteren oplossingsstrategieën

- Systematisch uitschrijven
- Schematiseren
- Proberen het probleem te koppelen aan een al bekend probleem (bijvoorbeeld het eierverfprobleem)
- Denken vanuit een telmodel (bijvoorbeeld combinatie) en onderzoeken of het probleem valt op te lossen met dit telmodel

3. Theoretische achtergronden

1. Vier basis telmodellen

2. Verschillende typen telproblemen

3. Theoretische achtergrond: vier basis telmodellen

	Volgorde wel van belang (permutaties)	Volgorde niet van belang (combinaties)
Zonder herhaling	Kies uit 10 films een top 3 Aantal verschillende top 3 $\frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$	Kies uit 10 leerlingen een groepje van 3 Aantal verschillende groepjes $\binom{10}{3} = 120$
Met herhaling	Hoeveel verschillende codes voor een cijferslot van 3 cijfers 10^3 	

Tabel 1 Selectie van *k* objecten uit *n* verschillende objecten

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 307-322.

Oplossing: Logeren bij oma

1. Uitschrijven

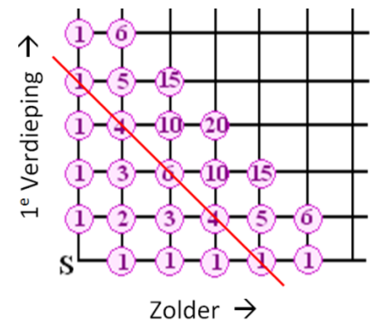
ZOLDER	ABCD	ABC	ABD	ACD	BCD	AB	AC	AD	BC	BD	CD	D	C	B	A	__
1e VERD	__	D	C	B	A	CD	BD	BC	AD	AC	AB	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD

2. Verkort uitschrijven

4 zolder	1
3 zolder + 1 verdieping	4
2 zolder + 2 verdieping	6
1 zolder + 3 verdieping	4
0 zolder + 4 verdieping	1

3. Met combinaties of een rooster

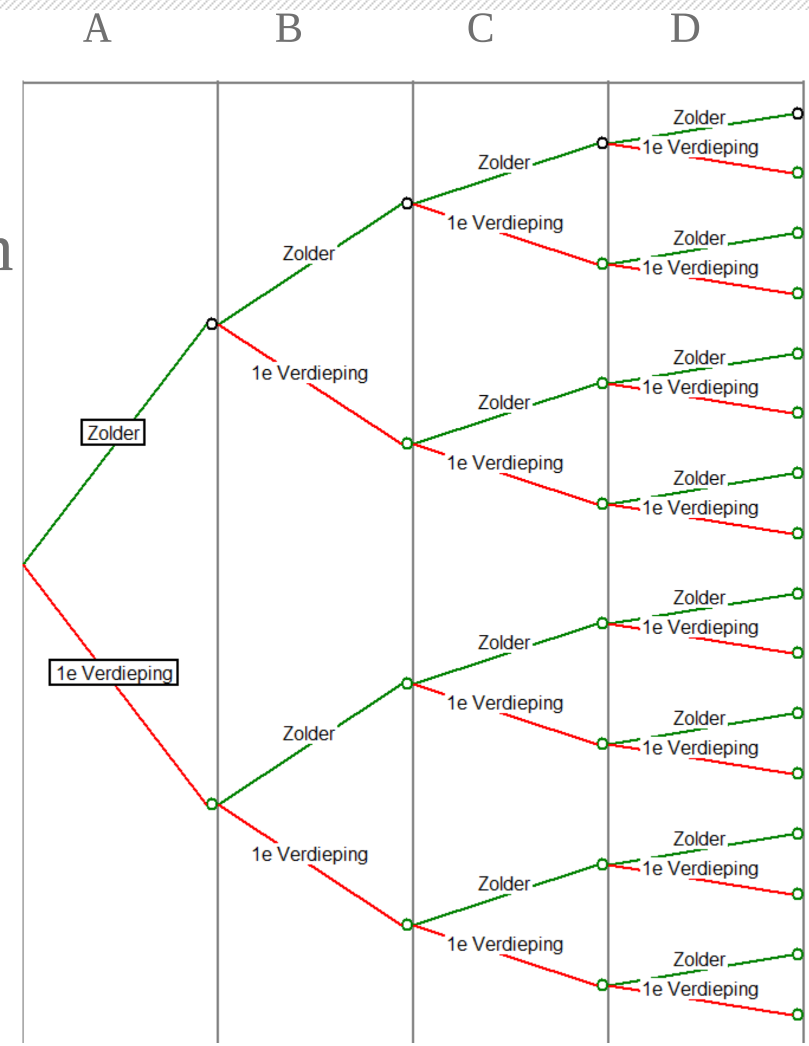
$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$$



Logeren bij oma

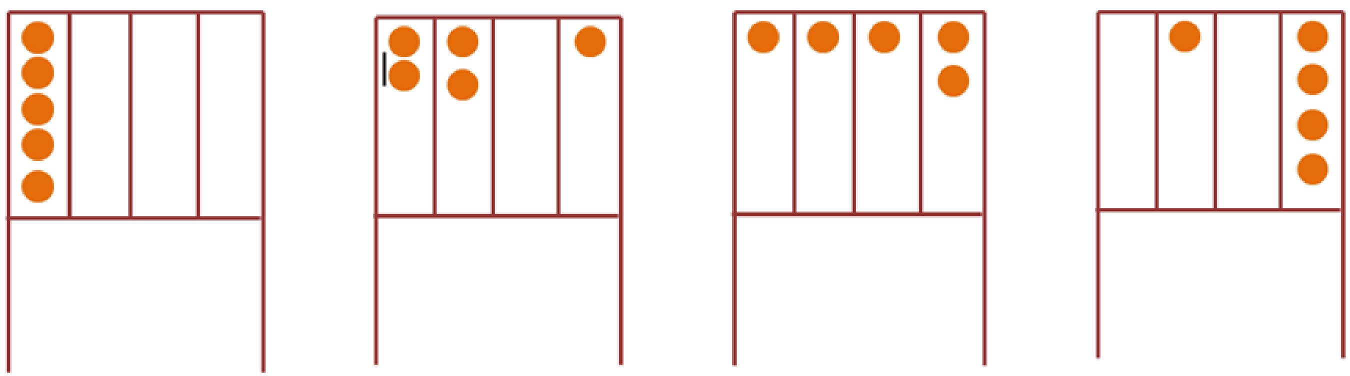
4. Een boomdiagram maken
   en dan tellen

5. Elk kind kan naar zolder
   of naar de 1e verdieping
   Dus $2^4 = 16$



Oplossing: Sjoelbak-herhalingscombinaties

Cruciale stap is om te bedenken dat ook de schotjes van belang zijn in dit telprobleem:

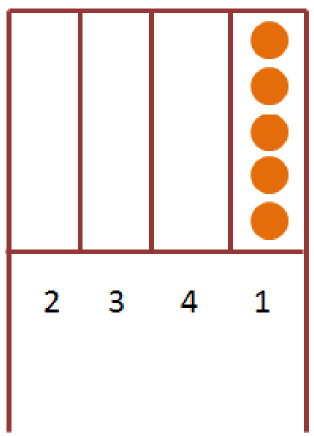


00000| | | 00| 00| |0   0|0|0 |00 |0| |0000

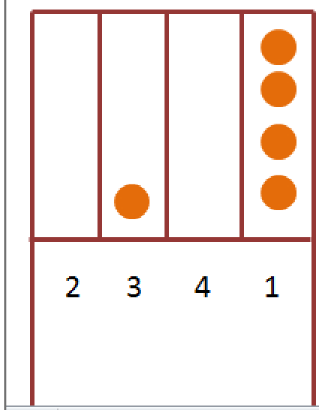
De schotjes verdelen de stenen in groepjes van 0, 1, 2, 3, 4 of 5 stenen
In totaal zijn er dus 8 plaatsen waarover je er 5 stenen moet verdelen, dus het aantal mogelijkheden is 8 boven 5.

Sjoelbak: En wat is nu *n* en wat is *k*?

Mogelijkheden, bijvoorbeeld



11111



11113,
11131,
11311,
13111,
31111

Je kiest uit de vakjes 1,2,3,4, dus n = 4, vijf keuzes k = 5

Dus aantal mogelijkheden $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$

3. Theoretische achtergrond: vier basis telmodellen

	Volgorde wel van belang (permutaties)	Volgorde niet van belang (combinaties)
Zonder herhaling	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\dbinom{n}{k}$
Met herhaling	n^k	$\dbinom{n+k-1}{k}$

Tabel 1 Selectie van *k* objecten uit *n* verschillende objecten

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*(3), 307-322.

3. Theoretische achtergrond: type telproblemen

Batanero (1997) onderscheidt:

Type	Kenmerk	Voorbeeld
Selecties	Selecteer r objecten uit n	Je hebt vijf kinderen en selecteert twee die je mogen helpen. Op hoeveel manieren kun je twee selecteren?
Partities	Verdeel n objecten in twee groepen met r objecten	Jan en Piet hebben vijf grote knikkers van verschillende kleuren. Aan het eind van de dag verdelen ze de knikkers, Jan krijgt er twee, Piet drie. Op hoeveel manieren kan dat, gelet op de kleur?
Distributies	Verdeel r objecten over n	Twee identieke prijzen worden uitgedeeld aan vijf kinderen. Eén kind kan maximaal één prijs krijgen. Op hoeveel manieren kunnen de prijzen verdeeld worden over de kinderen?

Batanero: Leerlingen scoren het beste op selecties. Daar was in de les ook het meeste aandacht voor.

Timmer & Verhoef (2014) concluderen in een Lesson Study les dat leerlingen zich echt een beeld moeten vormen van de situatie, voordat ze ‘grijpen’ naar snelle formules.

4. Verwerkingsopdracht: de praktijk

› In Getal en Ruimte staat een blokje theorie

> THEORIE A Herhaling, permutaties en combinaties
> Bij het oplossen van telproblemen vraag je jezelf het volgende af:
> - Is de volgorde van belang?
> - Zijn herhalingen toegestaan?
> - Heb je te maken met een permutatie of met een combinatie, of moet je systematisch noteren?
> - Moet je optellen of vermenigvuldigen?

1. Welke vragen heb je jezelf gesteld bij het oplossen van de twee telproblemen?
2. Hoe waardeer je dit theorieblokje?

En dan: De lift

76. *Een kantoorgebouw heeft zes verdiepingen. Op de begane grond stappen 12 personen in de lift. Op hoeveel manieren kunnen ze op de zes verdiepingen uitstappen?*

Een kantoorgebouw heeft zes verdiepingen. Op de begane grond stappen 12 personen in de lift. Op hoeveel manieren kunnen ze op de zes verdiepingen uitstappen?

Waar gaat het eigenlijk om?
Logeren bij oma, of een sjoelbakprobleem?

Tips voor het lesgeven van telproblemen

1. Benadruk het zoekproces! Het probleemoplossen is belangrijker dan het antwoord!
2. Laat leerlingen schematiseren, rijtjes schrijven, visualiseren, ordenen
3. Zorg dat bij verschillende soorten telmodellen herkenning kan plaatsvinden op basis van
   - Tekening, diagram
   - Voorbeeldopdracht
   - Uitgeschreven rijtjes
   - Woorden en begrippen (volgorde(?), permutatie(?), combinatie(?), herhaling(?))

Terug naar het begin

Waarom is lesgeven over combinatoriek zo lastig?

Wat ga je eventueel anders doen na deze workshop?

Welke inzichten neem je mee?

Meer lezen?

- Batanero et al. (1997): Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics 32: 181–199*
- Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 307-322.
- Streefland, L. (1984). Combinatorische telproblemen. Het oefenboek in de bovenbouw van het Wiskobas integratieplan, In Nieuwe Wiskrant 1-12, pp. 183-184.
- Timmer, M. and Verhoef, N.C. (2014) *Combinatoriek: meer dan trucjes*. Euclides, 90 (3). pp. 12-13. ISSN 0165-0394

Logeren bij oma

Vier kinderen, Alice, Bert, Carol, en Diana gaan bij hun oma logeren. Ze heeft twee verschillende slaapkamers beschikbaar (een op de eerste verdieping en een op zolder) waarin ze een of meer kinderen kan laten slapen. Op hoeveel verschillende manieren kan oma de kinderen over de twee slaapkamers verdelen (Ze kan ook alle kinderen in een slaapkamer leggen)? Ze kan bijvoorbeeld Alice, Bert en Carol op de eerste verdieping leggen en Diana op zolder.

(Uit Batanero, 1997)

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

De sjoelbak

In een sjoelbak zitten vier delen waar je de stenen in kan schuiven om punten te verdienen. In een spelletje met 5 stenen komt elke steen in een vak terecht. Hoeveel verschillende situaties kunnen er aan het eind van dit spelletje zijn?

Sjoelbak vervolg

Sjoelbak:
5 keer kiezen (k=5) uit de nummers 1,2,3,4 (n=4).

Een nummer mag opnieuw gekozen worden dus
Herhaling toegestaan

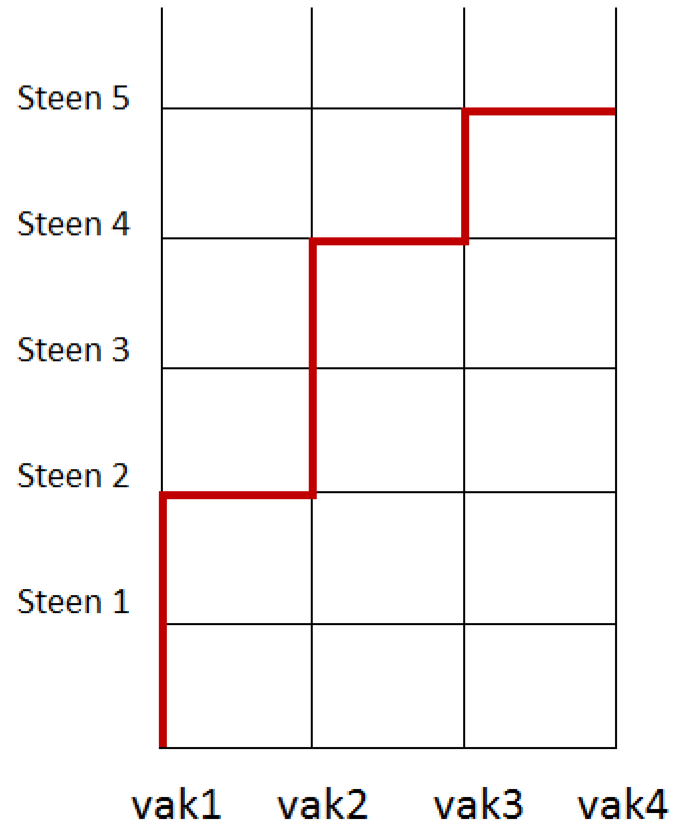
De volgorde waarin de stenen in de vakjes komen is niet van belang

2	3	4	1						
	3	4	1						1e worp in de 2
	3	4	1	2					Voeg 2 weer toe
	3	4		2					2e worp in de 1
	3	4		2	1				Voeg 1 weer toe
		4		2	1				3e worp in de 3
		4		2	1	3			Voeg 3 weer toe
		4		2		3			4e worp in de 1
		4		2		3	1		Voeg 1 weer toe
		4				3	1		5e worp in de 2
Levert de worp 2, 1, 3, 1, 2 dat is dus twee stenen in vakje 1, twee in vakje 2 en één in vakje 3									
2	3	4	1	*	*	*	*		
Je kiest uit 4 + 5 – 1 in totaal 5 dus $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$									

rijksuniversiteit groningen

Sjoelbak: vervolg

Nog een andere manier om het sjoelbakprobleem te bekijken.



Twee keer 1,
twee keer vak 2,
één keer vak 3,
nul keer vak 4