Hoe Archimedes π opsloot

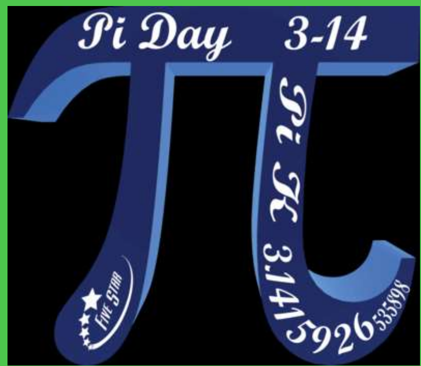
NWD 2019

Martin Kindt
Freudenthal Instituut

Vroeger

Nu

$$\frac{22}{7}$$



3,14

Boven

Onder

$$\frac{22}{7}$$

$$3,14$$

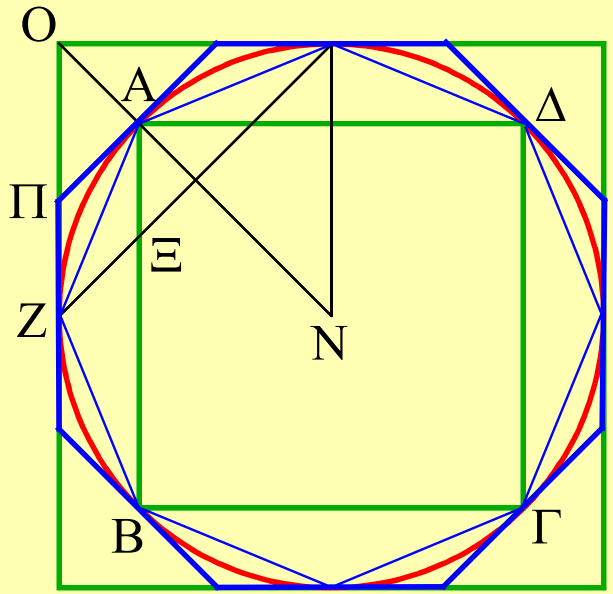
$$3 + \frac{14}{98}$$

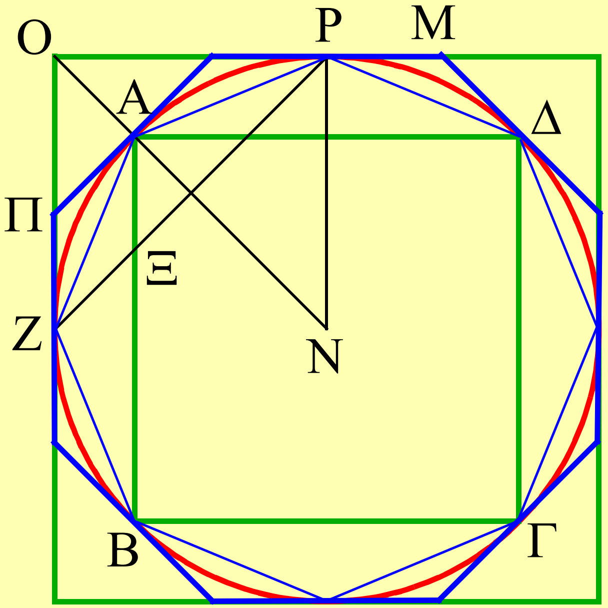
$$3 + \frac{14}{100}$$

$$3 + \frac{14}{99}$$

$$3\,,\,14141414 14\ldots = 3,\overline{14}$$

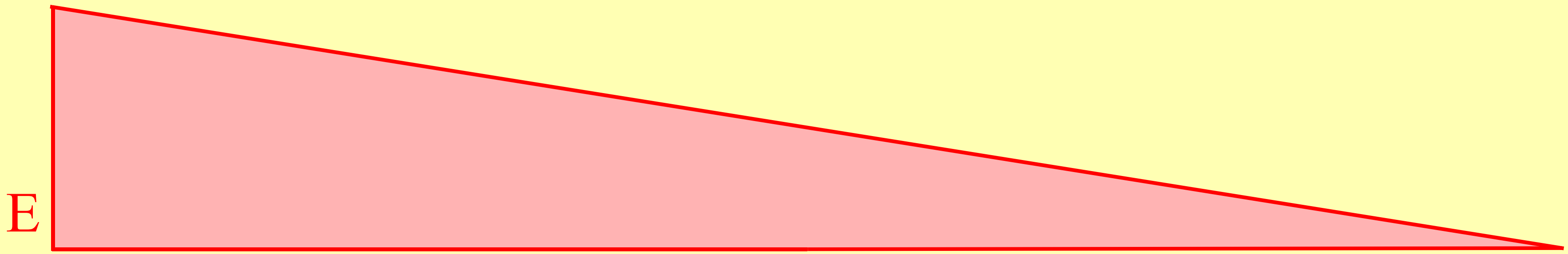
‘Cirkelmeting’





‘Cirkelmeting’ *Propositie 1*

Elke cirkel is gelijk aan een rechthoekige driehoek, waarvan één rechthoekszijde gelijk is aan de straal en de andere gelijk is aan de omtrek.



Exhaustie-methode *(Eudoxus, Euclides, Archimedes, ...)*

opp. cirkel = C
opp. driehoek E = D
opp. ingeschreven 2^n-hoek = I_n
opp. omgeschreven 2^n-hoek = O_n

Stel $C > D$

$\downarrow$ ***(Euclides)***

$C - I_n < C - D$
voor n *groot genoeg*

$\downarrow$

$I_n > D$

Exhaustie-methode *(Eudoxus, Euclides, Archimedes, ...)*

opp. cirkel = C
opp. driehoek E = D
opp. ingeschreven 2^n-hoek = I_n
opp. omgeschreven 2^n-hoek = O_n

Stel $C > D$

$\Downarrow$ **(*Euclides*)**

$C - I_n < C - D$
voor n *groot genoeg*

$\Downarrow$

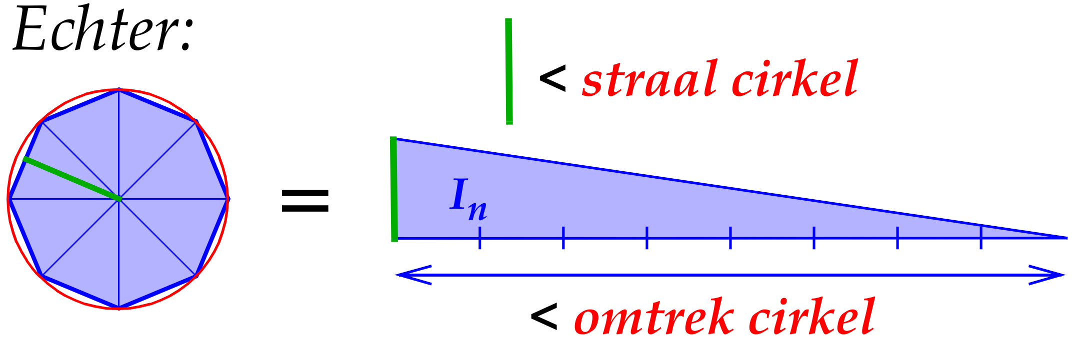
$I_n > D$

$\lightning$

$I_n < D$

$\longrightarrow$ $\boxed{C \not> D}$

Echter:



Exhaustie-methode *(Eudoxus, Euclides, Archimedes, ...)*

opp. cirkel = C
opp. driehoek E = D
opp. ingeschreven 2^n-hoek = I_n
opp. omgeschreven 2^n-hoek = O_n

Stel $C < D$

$\Big\downarrow$ ***(Euclides)***

$O_n - C < D - C$
voor n *groot genoeg*

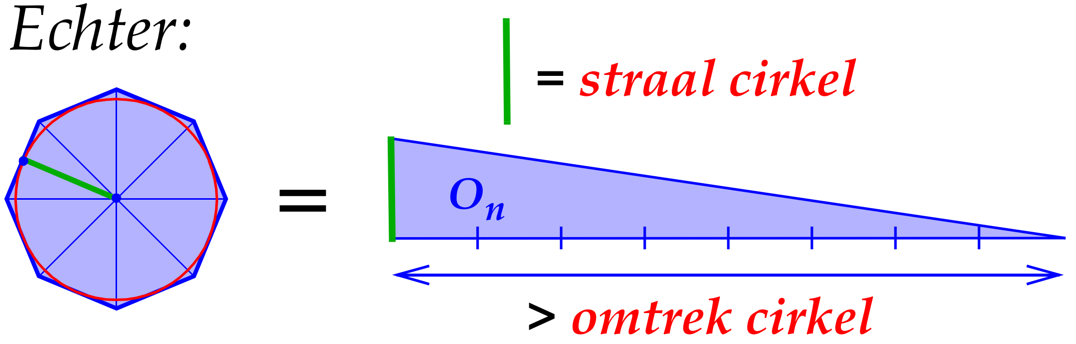
$\Big\downarrow$

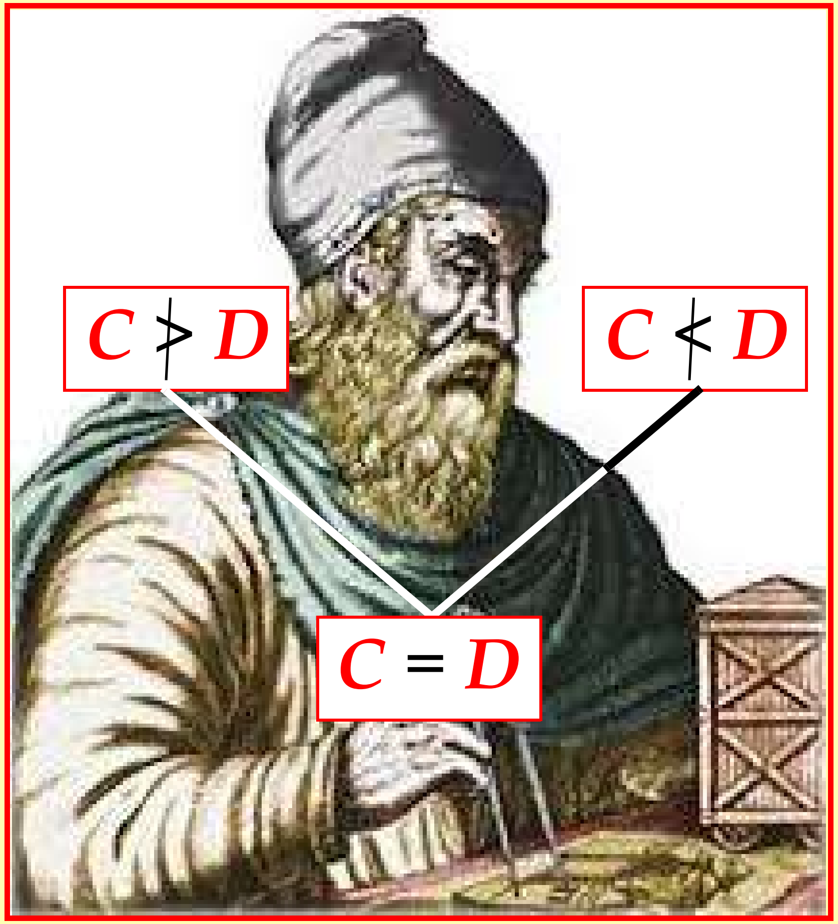
$O_n < D$

$\lightning$ $\longrightarrow$ $\boxed{C \not< D}$

$O_n > D$

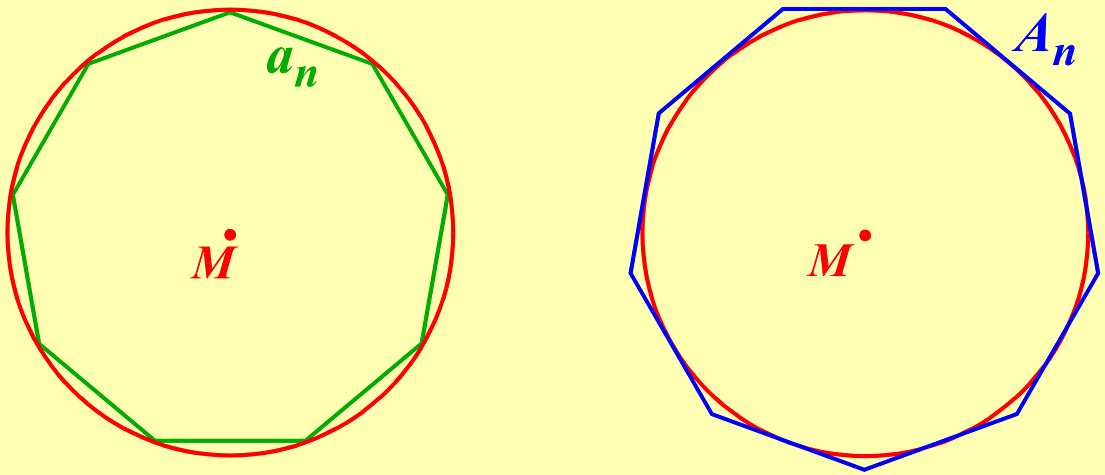
Echter:




$C \not> D$
$C \not< D$
$C = D$

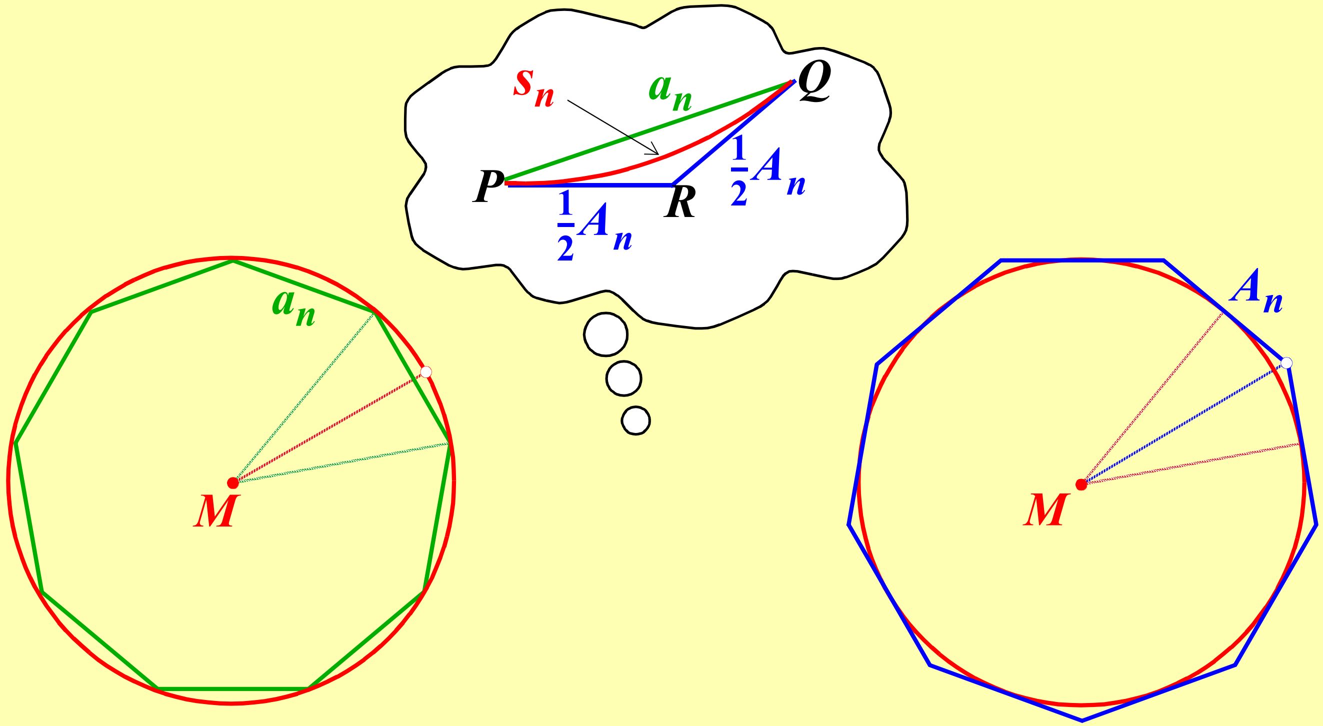
opp. ‘in-veelhoek’ < opp. cirkel < opp. ‘om-veelhoek’

.... [‘deel’< ‘geheel’]



omtr. ‘in-veelhoek’ < omtr. cirkel < omtr. ‘om-veelhoek’ ?

.... [‘deel’~~<~~‘geheel’]



$$a_n < s_n < A_n \ ?$$

Uit een ander boek: ‘Over Bol en Cilinder’

Ik neem het volgende aan:

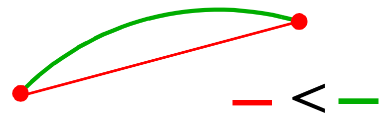
I. Dat van de lijnen die dezelfde uiteinden hebben,
de rechte het kleinste is.

II. Dat van de andere lijnen, indien ze in één plat vlak gelegen,
dezelfde uiteinden hebben, er twee ongelijk zijn, wanneer
ze beide naar dezelfde kant hol zijn en bovendien òf de ene
geheel wordt omvat door de andere en door de rechte, die
dezelfde uiteinden heeft als zij, òf deels door haar wordt omvat,
deels er mee samenvalt; en dat de omvatte de kleinste is.

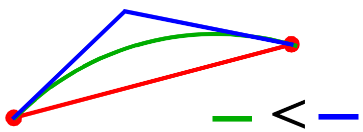
Uit: ‘Over Bol en Cilinder’

Ik neem het volgende aan:

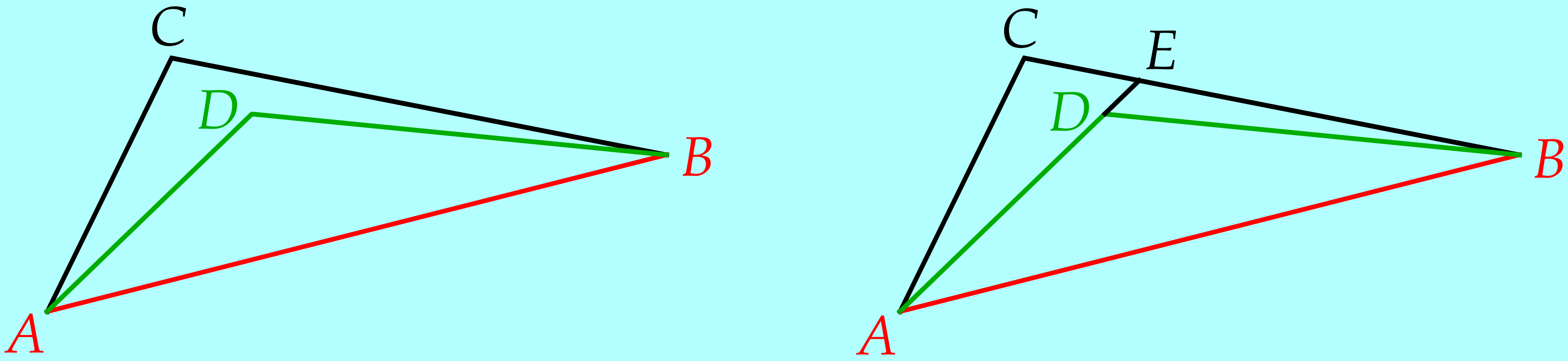
I. Dat van de lijnen die dezelfde uiteinden hebben, de rechte het kleinste is.



II. Dat van de andere lijnen, als ze in één plat vlak gelegen, dezelfde uiteinden hebben, er twee ongelijk zijn, wanneer ze beide naar dezelfde kant hol zijn en bovendien òf de ene geheel wordt omvat door de andere en door de rechte, die dezelfde uiteinden heeft als zij, òf deels door haar wordt omvat, deels er mee samenvalt, en dat de omvatte de kleinste is.



Speciaal (*bewijsbaar*)geval van II



$$AD + DB < AD + DE + EB$$

$$AD + DE < AC + CE$$

$$AD + DB < AC + CE + EB = AC + CB$$

Uit: ‘Cirkelmeting’ *Propositie 3*

Van elke cirkel is de omtrek het drievoud van de diameter, nog vermeerderd met minder dan het zevende deel van de diameter en met meer dan tien evenzeventigste delen.

Uit: 'Cirkelmeting' *Propositie 3*

Van elke cirkel is de omtrek het drievoud van de diameter, nog vermeerderd met minder dan het zevende deel van de diameter en met meer dan tien eenenzeventigste delen.

$$\mathit{cirkelomtrek} = \pi \times d \text{ met } 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

$$3\frac{1}{7} = 3{,}\,142857142857142857142857\ldots$$

$$3\frac{10}{71} = 3{,}\,140845070422535211267605633802816901408\ldots$$

$$3\frac{1}{7} = 3,142857142857142857142857\ldots$$

$$3\frac{10}{71} = 3,140845070422535211267605633802816901408\ldots$$

$$\boxed{\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419 7\ldots}$$

Strategie van Archimedes

* Bereken de zijde A_n van omgeschreven regelmatige n-hoeken van de cirkel voor $n = 6$ en via recursie voor $n = 12, 24, 48, 96$.

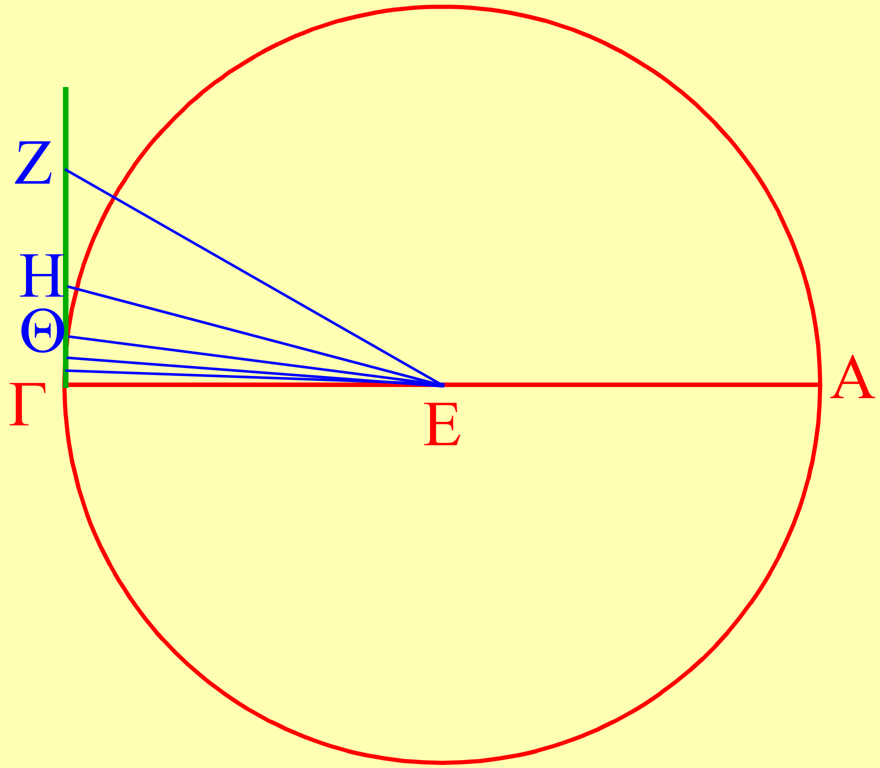
* Bereken $\frac{96A_{96}}{d}$ dit geeft een benadering van π aan de bovenkant.

* Bereken de zijde a_n van ingeschreven regelmatige n-hoeken van de cirkel voor $n = 6$ en via recursie voor $n = 12, 24, 48, 96$.

* Bereken $\frac{96a_{96}}{d}$ dit geeft een benadering van π aan de onderkant.

'Bereken' = 'benader met breuken'

op weg naar een bovenschatting .....



$\angle Z E \Gamma \;=\; \frac{1}{3}$ van een rechte hoek

$E H$ is bissectrice van $\angle Z E \Gamma$

$E \Theta$ is bissectrice van $\angle H E \Gamma$

en zo voort

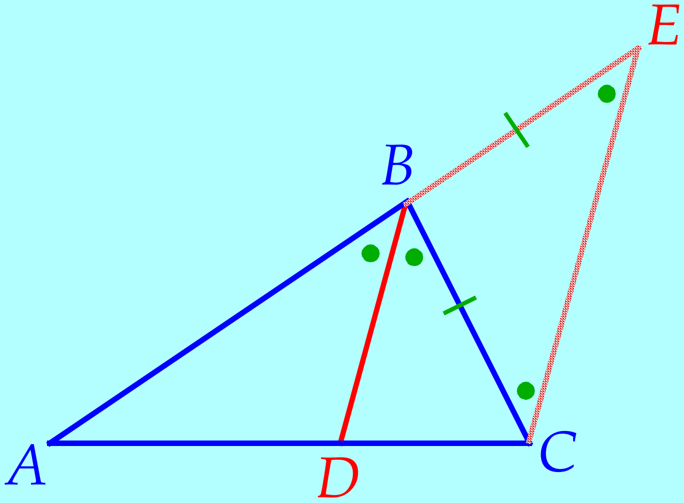
$2 Z \Gamma = A_6$

$2 H \Gamma = A_{12}$

en zo voort

De Elementen, Boek VI, *Propositie 3*

Euclides

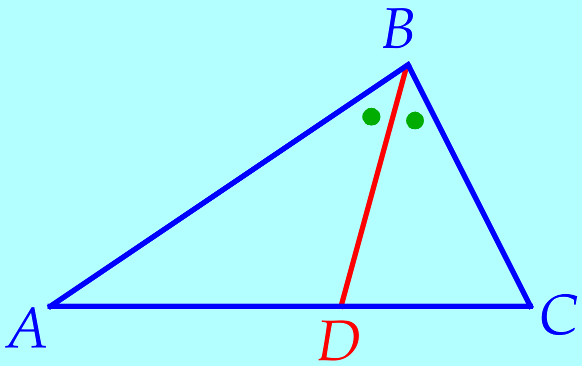


Indien de hoek van een driehoek middendoor wordt gedeeld en de rechte die de hoek verdeelt, snijdt ook de basis, dan zullen de stukken van de basis dezelfde verhouding hebben als de overblijvende zijden van de driehoek. En .... vice versa.

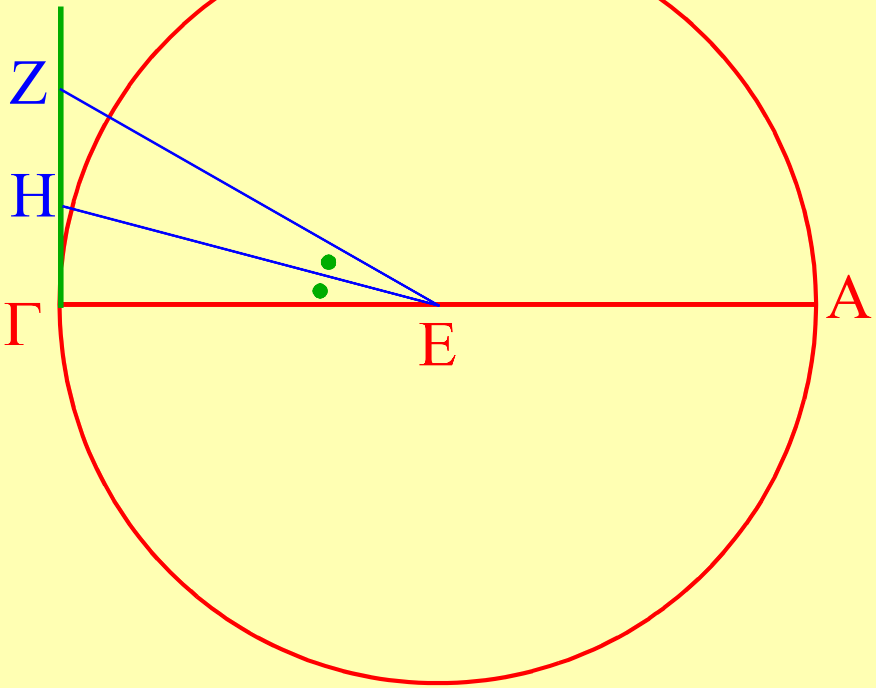
De Elementen, Boek VI, *Propositie 3*

Euclides

$\boxed{AB : CB = AD : CD}$



Indien de hoek van een driehoek middendoor wordt gedeeld en de rechte die de hoek verdeelt, snijdt ook de basis, dan zullen de stukken van de basis dezelfde verhouding hebben als de overblijvende zijden van de driehoek. En .... vice versa.

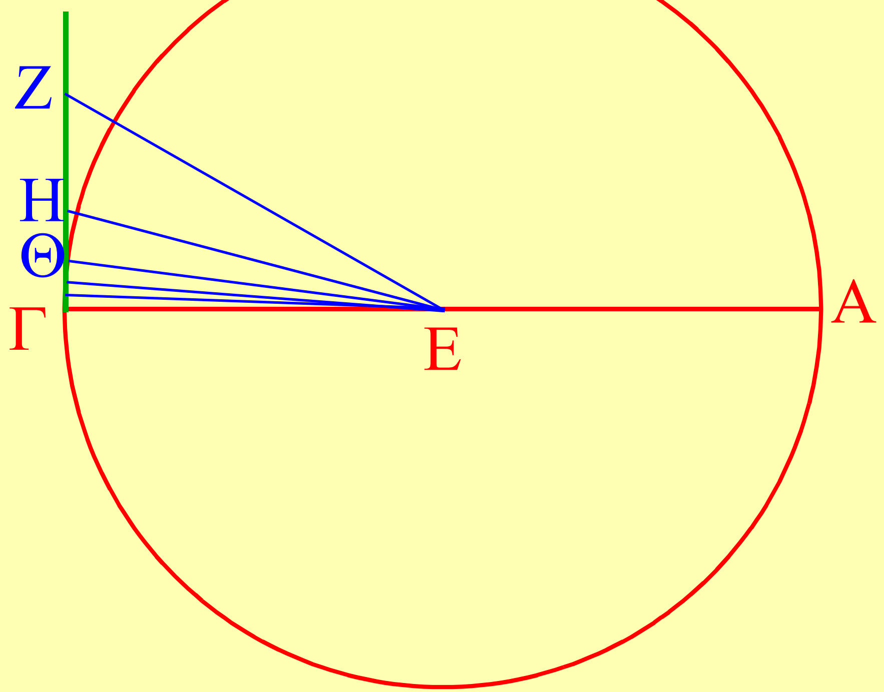


$$\frac{HZ}{\Gamma H} = \frac{ZE}{\Gamma E}$$

$$\frac{\Gamma Z - \Gamma H}{\Gamma H} = \frac{2\sqrt{\Gamma E^2 + \Gamma Z^2}}{2\Gamma E}$$

$$\frac{A_6 - A_{12}}{A_{12}} = \frac{\sqrt{d^2 + A_6{}^2}}{d}$$

$$A_{12} = \frac{dA_6}{d + \sqrt{d^2 + A_6{}^2}}$$



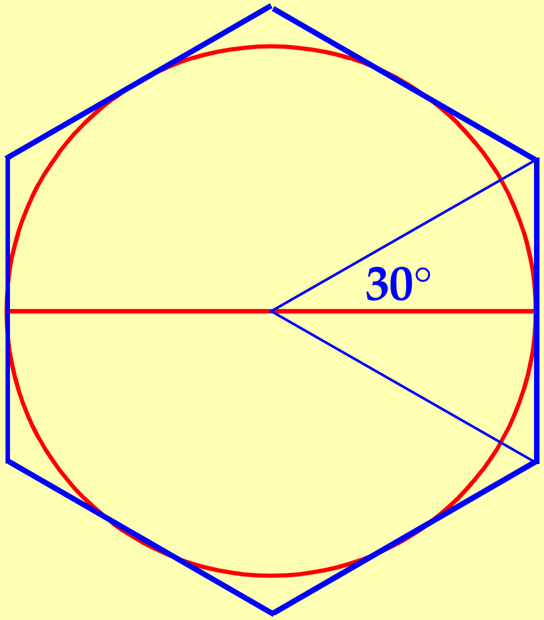
Recursie-regel

$$\boxed{A_{2n} = \frac{dA_n}{d + \sqrt{d^2 + A_n^{\;2}}}}$$

Met $V_n = \dfrac{d}{A_n}$ volgt

$$\boxed{V_{2n} = V_n + \sqrt{1 + V_n^{\;2}}}$$

$$\boxed{V_n = \frac{d}{A_n} \quad \& \quad V_{2n} = V_n + \sqrt{1 + V_n{}^2}}$$



$$A_6 = \frac{d}{\sqrt{3}} \longrightarrow V_6 = \sqrt{3}$$

$$\downarrow$$

$$V_{12} = \sqrt{3} + \sqrt{1 + 3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\downarrow$$

$$V_{24} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$\downarrow$$

.....

Archimedes benaderde het getal $\sqrt{3}$

* aan de bovenkant met $\dfrac{1351}{780}$

* aan de onderkant met $\dfrac{265}{153}$

1351/780	1.732051282
$\sqrt{(3)}$	1.732050808
265/153	1.732026144

Maar, hoe vond hij die ??

klassiek algoritme

als x een benadering is voor $\sqrt{N}$
dan is $\frac{1}{2}(x + \frac{N}{x})$ een betere benadering

voorbeeld: $\frac{5}{3}$ *is eerste schatting van* $\sqrt{3}$

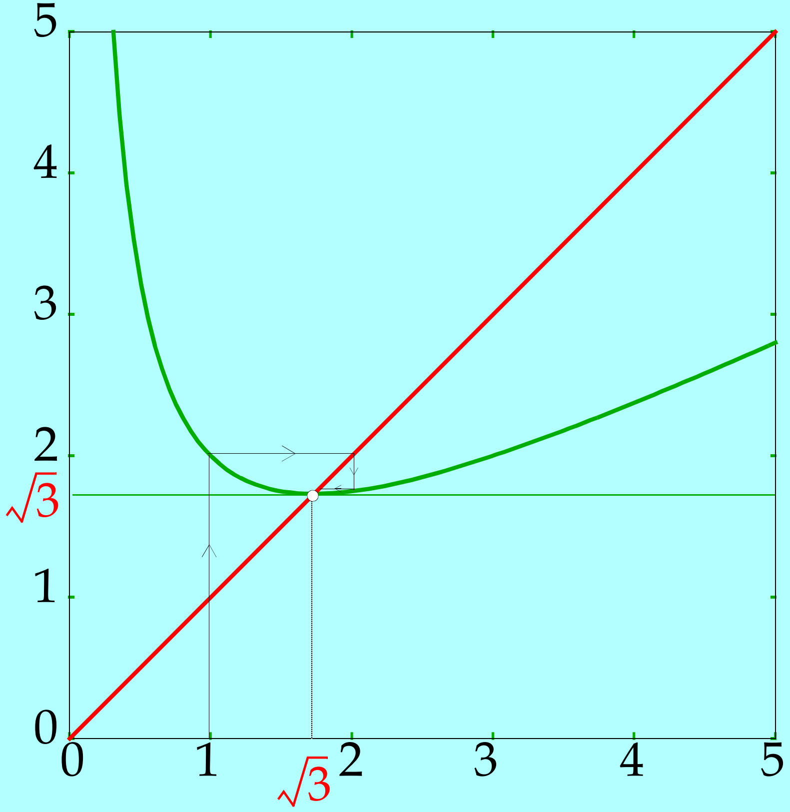
dan: $\frac{1}{2}(\frac{5}{3} + \frac{9}{5}) = \frac{26}{15}$ *is een betere schatting*

$\frac{1}{2}(\frac{26}{15} + \frac{45}{26}) = \mathbf{\frac{1351}{780}}$ *is een nog betere schatting*

Zo krijg je (na de eerste stap) alleen bovenschattingen!

Immers: $\frac{1}{2}(p + q) \geq \sqrt{pq}$

Webgrafiek



$$x \to \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

De iteratie-functie $x \to \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$ levert Archimedes' **bovenschatting**, **niet** de onderschatting.

Is er een iteratie-functie die beide schattingen oplevert?

$$(\sqrt{3} - \tfrac{5}{3}) \cdot (\sqrt{3} + \tfrac{5}{3}) = \frac{2}{9} \longrightarrow \sqrt{3} = \frac{5}{3} + \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{3} + \frac{5}{3}} = \frac{5}{3} + \frac{2}{9\sqrt{3} + 15}$$

Wat doet de iteratie-functie $x \to \frac{5}{3} + \frac{2}{9x + 15}$?

met startgetal $\frac{5}{3}$ volgt $\boxed{\frac{5}{3} \to \frac{26}{15} \to \frac{265}{153} \to \frac{1351}{780} \to \ldots}$

te mooi om waar te zijn ?

$$V_{2n} = V_n + \sqrt{1 + V_n^{\,2}}$$

$$V_6 = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

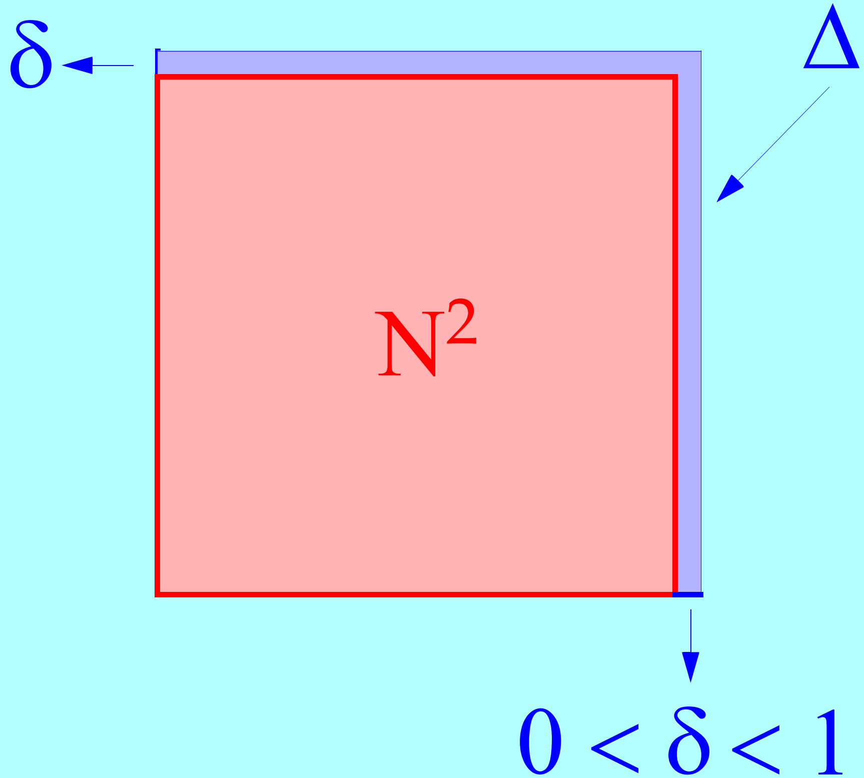
$$V_{12} = \sqrt{3} + 2 > \frac{265}{153} + \frac{306}{153} = \frac{571}{153}$$

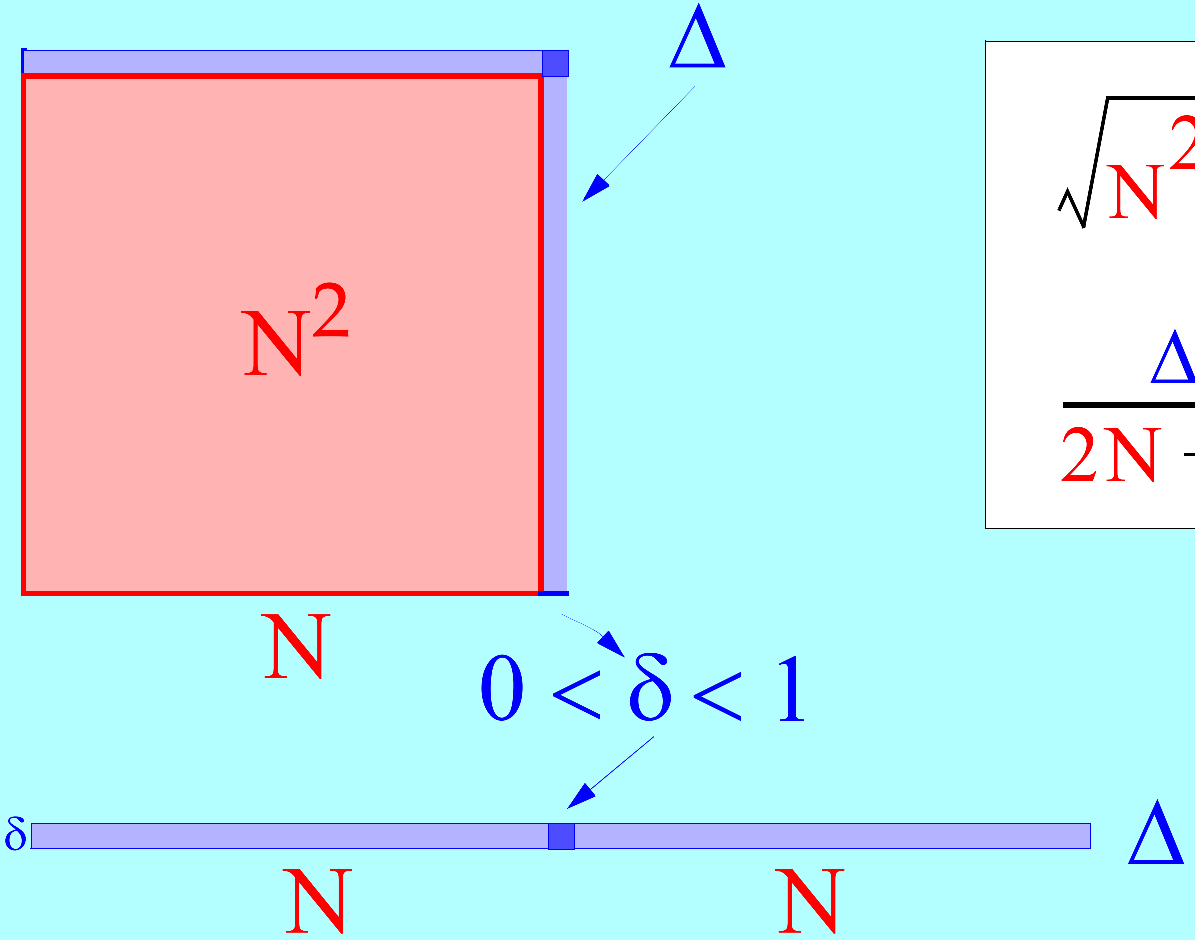
$$V_{24} > \frac{571}{153} + \sqrt{1 + \left(\frac{571}{153}\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{349450}}{153} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} \longleftarrow ?$$

$$\sqrt{N^2 + \Delta} = N + \delta$$

het schatten van δ





$$\sqrt{N^2 + \Delta} = N + \delta$$

$$\frac{\Delta}{2N+1} < \delta < \frac{\Delta}{2N}$$

$$\sqrt{349450} > 591\tfrac{1}{8} \quad ?$$

$$\sqrt{N^2 + \Delta} > N + \frac{\Delta}{2N + 1}$$

$$349450 = 591^2 + 169$$

13^2

$$\sqrt{349450} > 591 + \frac{169}{2 \cdot 591 + 1} = 591\tfrac{1}{7} > 591\tfrac{1}{8}$$

7×13^2

$$V_{2n} = V_n + \sqrt{1 + V_n^{\,2}}$$

$$V_6 = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

$$V_{12} = \sqrt{3} + 2 > \frac{265}{153} + \frac{306}{153} = \frac{571}{153}$$

$$V_{24} > \frac{571}{153} + \sqrt{1 + \left(\frac{571}{153}\right)^2} > \frac{571}{153} + \frac{591\frac{1}{8}}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$V_{2n} = V_n + \sqrt{1 + V_n^{\,2}}$$

$$V_6 = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$

$$V_{12} = \sqrt{3} + 2 > \frac{265}{153} + \frac{306}{153} = \frac{571}{153}$$

$$V_{24} > \frac{571}{153} + \sqrt{1 + (\frac{571}{153})^2} > \frac{571}{153} + \frac{591\frac{1}{8}}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$$

$$\frac{719}{4690}$$

$$V_{48} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \sqrt{1 + \left(\frac{1162\frac{1}{8}}{153}\right)^2} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153} + \frac{1172\frac{1}{8}}{153} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153}$$

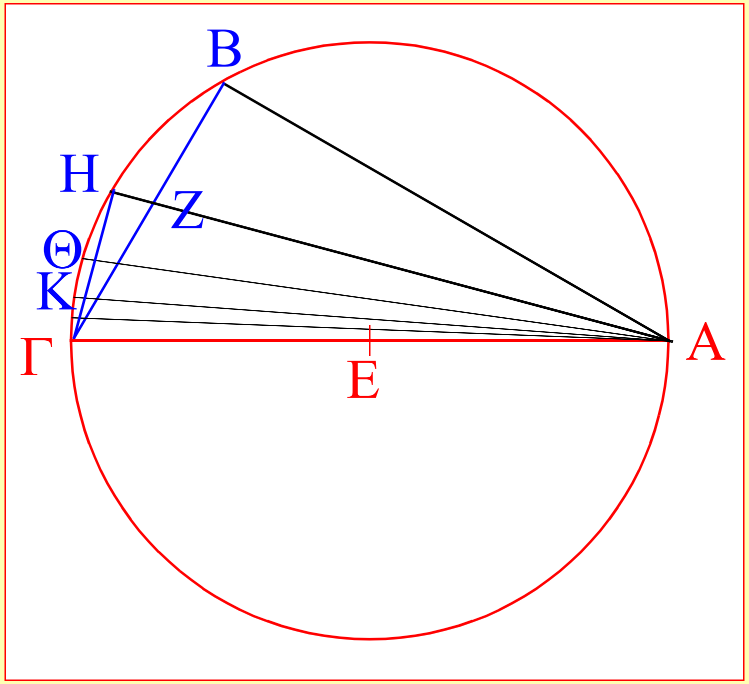
$$\frac{1211}{4679}$$

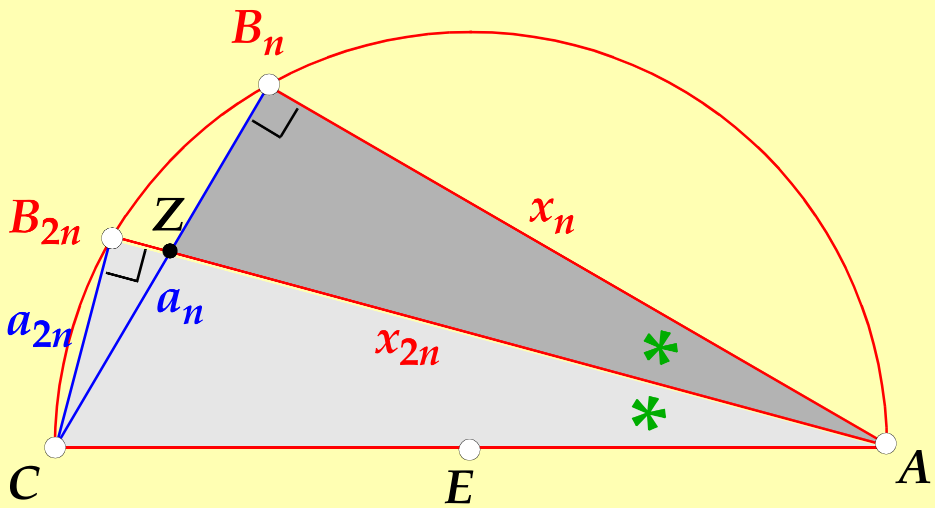
$$V_{96} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \sqrt{1 + \left(\frac{2334\frac{1}{4}}{153}\right)^2} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} + \frac{2339\frac{1}{4}}{153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

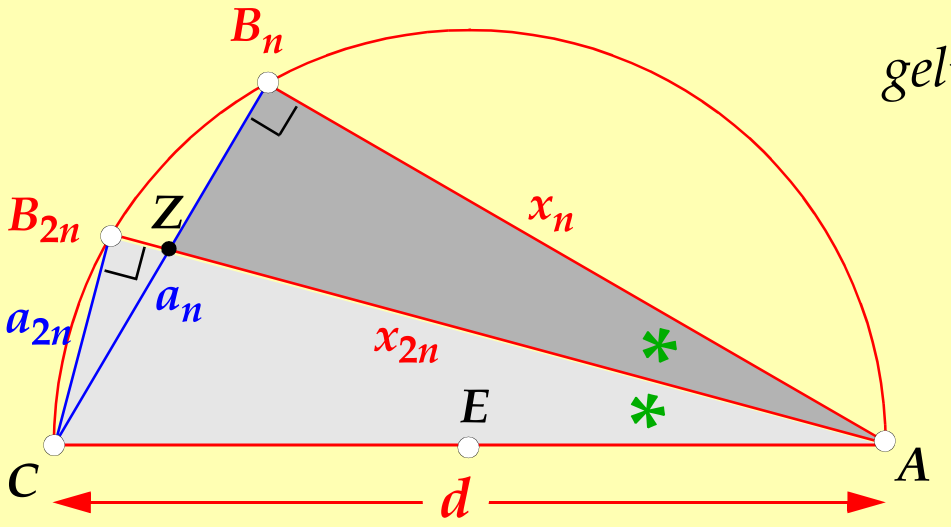
$$V_{96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153} \longrightarrow \frac{d}{A_{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

$$\frac{96 \cdot A_{96}}{d} < \frac{96 \cdot 153}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{1335}{9347} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{2}{1335}} < 3\frac{1}{7}$$

op weg naar een onderschatting ....







gelijkvormige driehoeken $AB_{2n}C$ *en* AB_nZ →

$$\boxed{\frac{x_{2n}}{a_{2n}} = \frac{x_n}{B_nZ}}$$

bissectricestelling in $\Delta\, AB_nC$ →

$$\frac{d}{x_n} = \frac{CZ}{B_nZ}$$

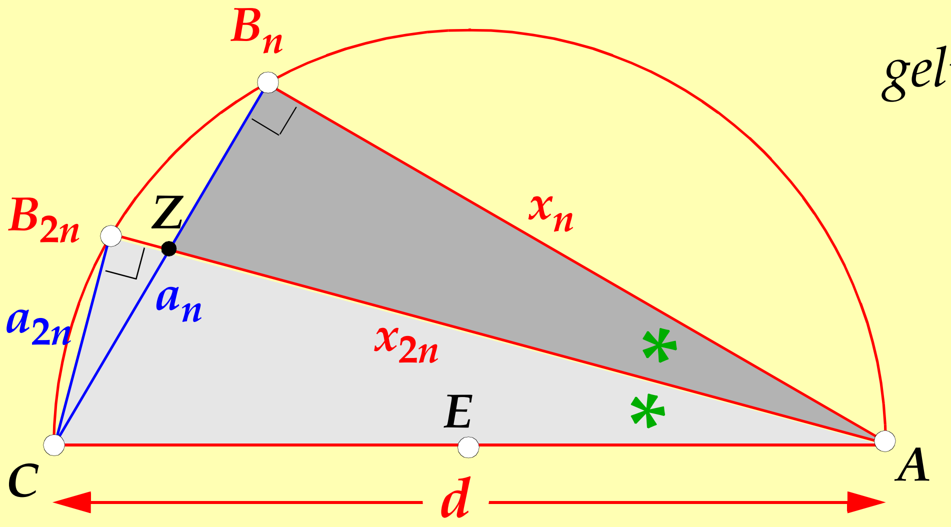
↓

$$\frac{d}{CZ} = \frac{x_n}{B_nZ}$$

'verhoudingstabel'

↓

$$\boxed{\frac{x_n + d}{a_n} = \frac{x_n}{B_nZ}}$$



gelijkvormige driehoeken $AB_{2n}C$ *en* AB_nZ

$$\frac{x_{2n}}{a_{2n}} = \frac{x_n}{B_nZ}$$

bissectricestelling

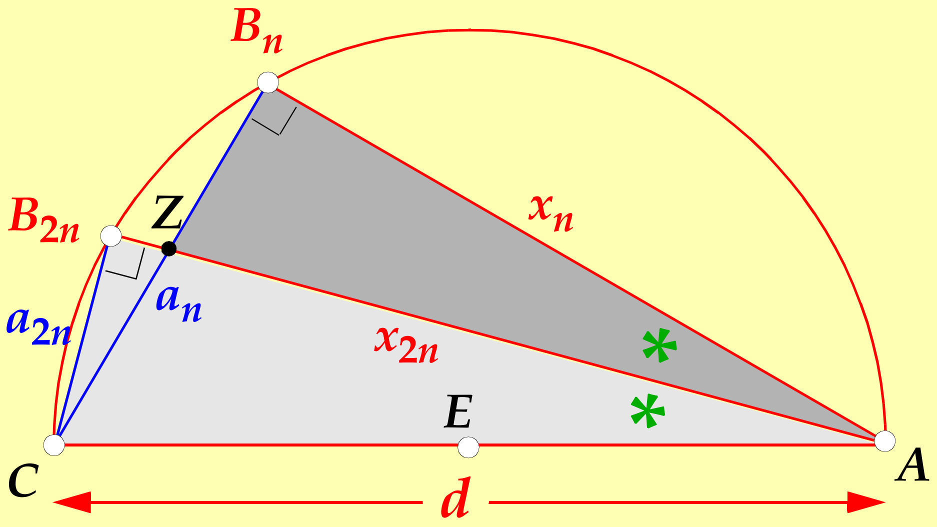
$$\frac{d}{x_n} = \frac{CZ}{B_nZ}$$

$$\frac{d}{CZ} = \frac{x_n}{B_nZ}$$

verhoudingstabel!

$$\frac{x_n + d}{a_n} = \frac{x_n}{B_nZ}$$

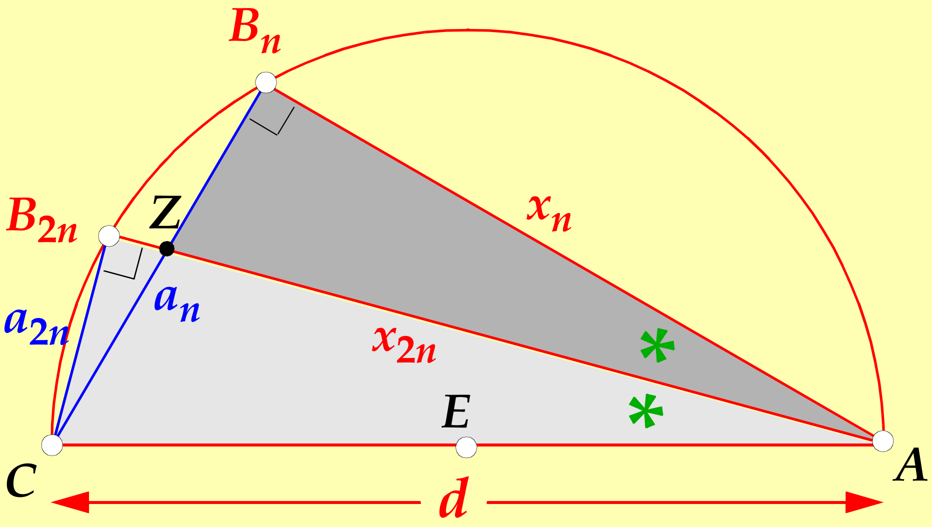
$$\frac{x_{2n}}{a_{2n}} = \frac{x_n}{a_n} + \frac{d}{a_n}$$



$$v_n = \frac{d}{a_n} \quad \& \quad u_n = \frac{x_n}{a_n}$$

$$u_{2n} = u_n + v_n$$

$$\frac{x_{2n}}{a_{2n}} = \frac{x_n}{a_n} + \frac{d}{a_n}$$



$$v_n = \frac{d}{a_n} \quad \& \quad u_n = \frac{x_n}{a_n}$$

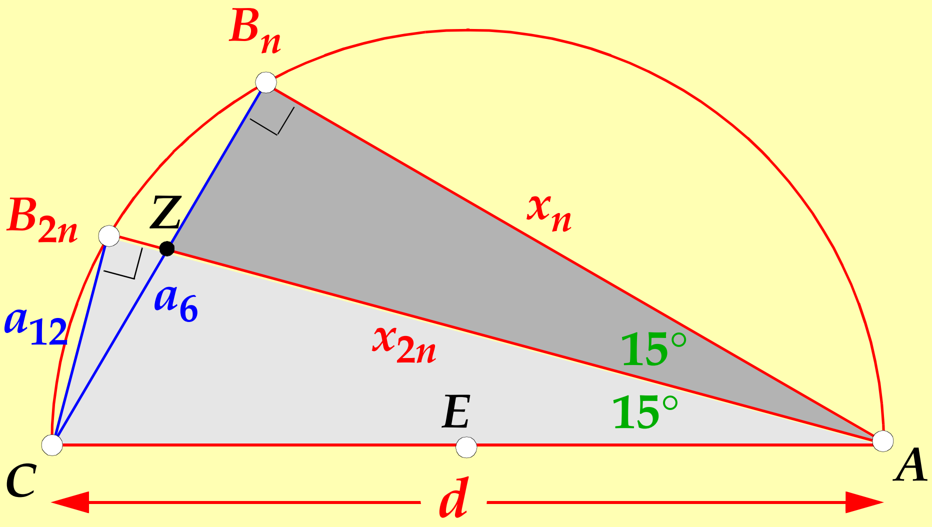
$$d = \sqrt{a_{2n}^{\;2} + x_{2n}^{\;2}}$$

$$: a_{2n}$$

$$u_{2n} = u_n + v_n$$

$$\&$$

$$v_{2n} = \sqrt{1 + u_{2n}^{\;2}}$$



$$v_n = \frac{d}{a_n} \quad \& \quad u_n = \frac{x_n}{a_n}$$

$$v_6 = 2 \quad \& \quad u_6 = \sqrt{3}$$

$$u_{2n} = u_n + v_n$$

$$\&$$

$$v_{2n} = \sqrt{1 + u_{2n}^{\ 2}}$$

$$u_{12} = u_6 + v_6 = 2 + \sqrt{3} < \frac{1560}{780} + \frac{1351}{780} = \frac{2911}{780}$$

$$v_{12} = \sqrt{1 + u_{12}^{\ 2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2911}{780}\right)^2} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{2911}{780}\right)^2} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780} \quad ?$$

$$\sqrt{N^2+\Delta} < N + \frac{\Delta}{2N}$$

ofwel

$$\sqrt{9082321} < 3013\frac{3}{4} \quad ?$$

$$9082321 = 3013^2 + 4152$$

$$\sqrt{9082321} < 3013 + \frac{4152}{2 \cdot 3013} < 3013\frac{3}{4}$$

$$u_{24} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\frac{3}{4}}{780} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

$$v_{24} < \sqrt{1 + \left(\frac{1823}{240}\right)^2} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$\frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{23699}{3120} = \frac{1823 \cdot 13}{240 \cdot 13}$$

$$\frac{537}{734} < \frac{9}{11}$$

$$u_{24} < \frac{2911}{780} + \frac{3013\frac{3}{4}}{780} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240}$$

$$v_{24} < \sqrt{1 + \left(\frac{1823}{240}\right)^2} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}$$

$$u_{48} < \frac{1823}{240} + \frac{1838\frac{9}{11}}{240} = \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66}$$

$$v_{48} < \sqrt{1 + \left(\frac{1007}{66}\right)^2} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}$$

$$\frac{162}{1009} < \frac{1}{6}$$

$$u_{96} < \frac{1007}{66} + \frac{1009\frac{1}{6}}{66} = \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

$$v_{96} < \sqrt{1 + \left(\frac{2016\frac{1}{6}}{66}\right)^2} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

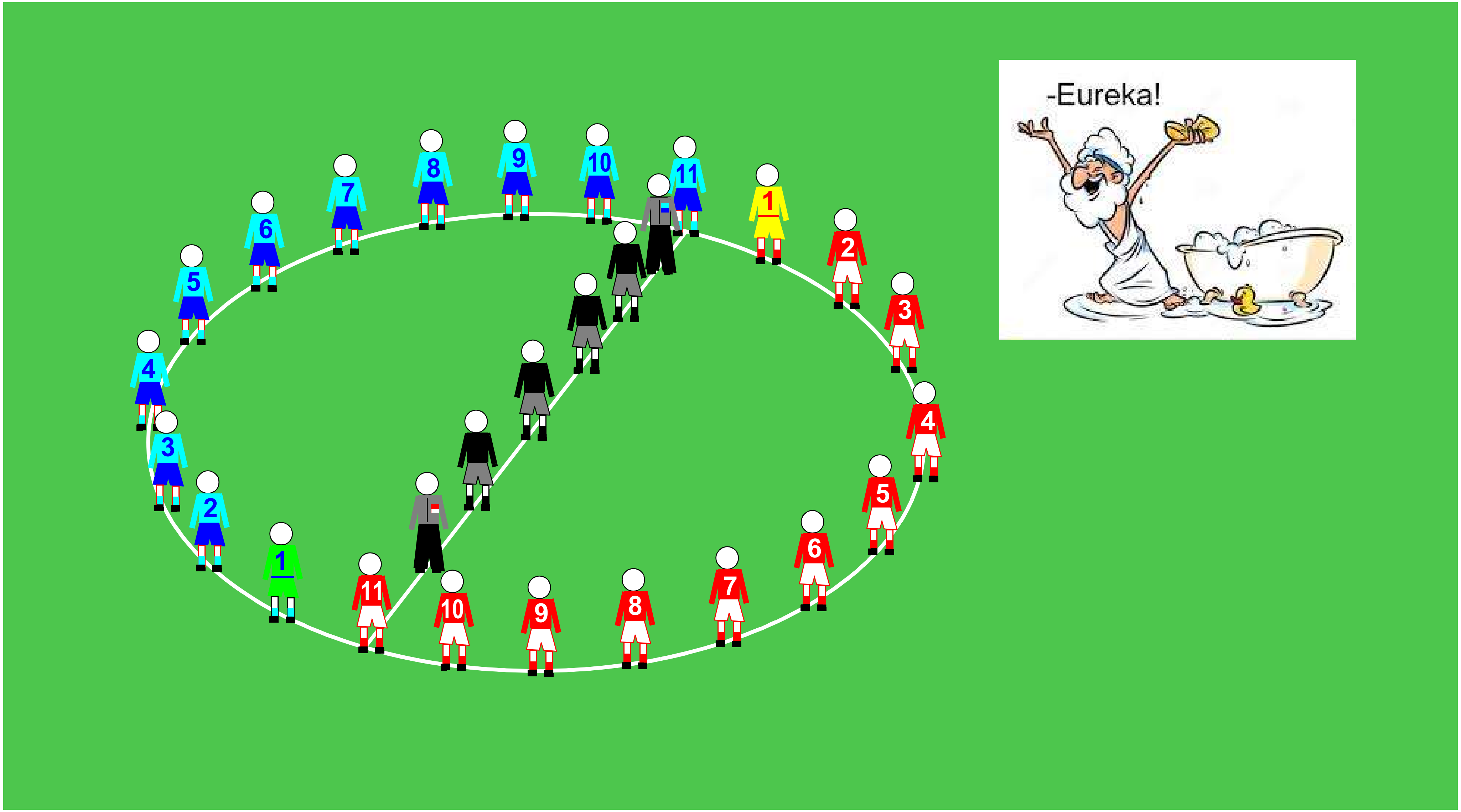
$$\frac{83}{413} < \frac{1}{4}$$

$$v_{96} = \frac{d}{a_{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

$$\frac{96 \cdot a_{96}}{d} > \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} = 3 + \frac{1137}{8069} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{110}{1140}} > 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10}} = 3\frac{10}{71}$$

$$\frac{\textit{perimeter}}{\textit{diameter}}$$

$$\boxed{3\frac{10}{71} < \frac{96 \cdot a_{96}}{d} < \pi < \frac{96 \cdot A_{96}}{d} < 3\frac{1}{7}}$$


-Eureka!