Grafieken met de hand tekenen om symbol sense te bevorderen

Peter Kop en Erik van Barneveld

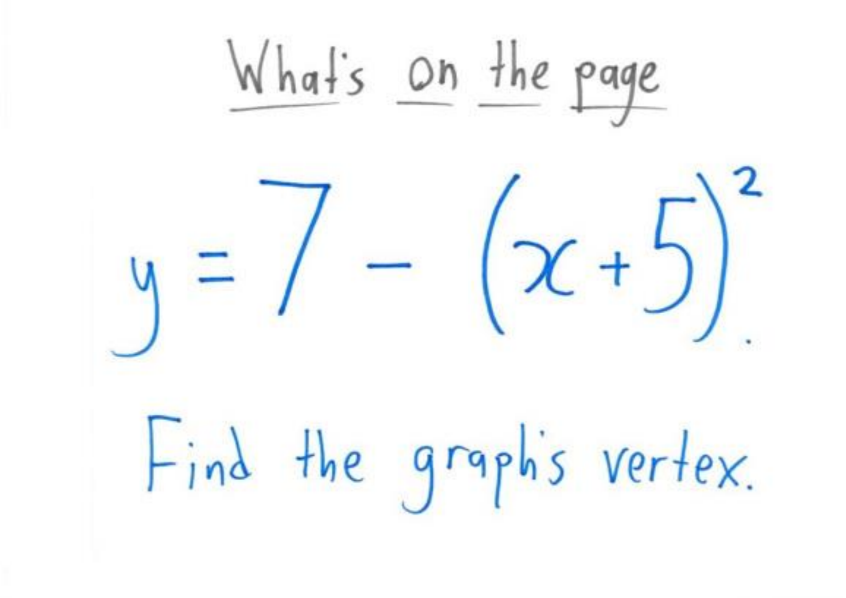
Email: koppmgm@iclon.leidenuniv.nl
bar@gsgleovroman.nl

NWD, Veldhoven

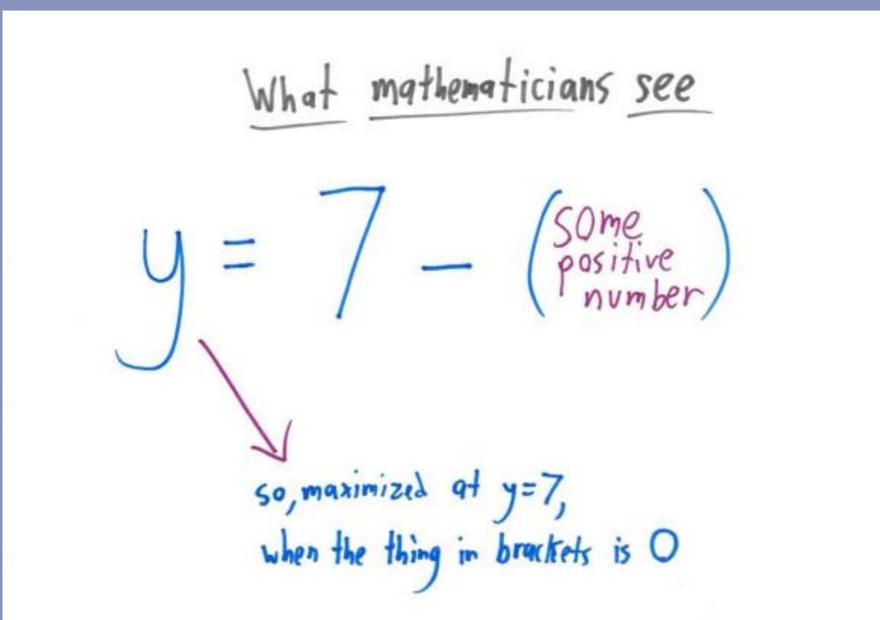
Feb 2019

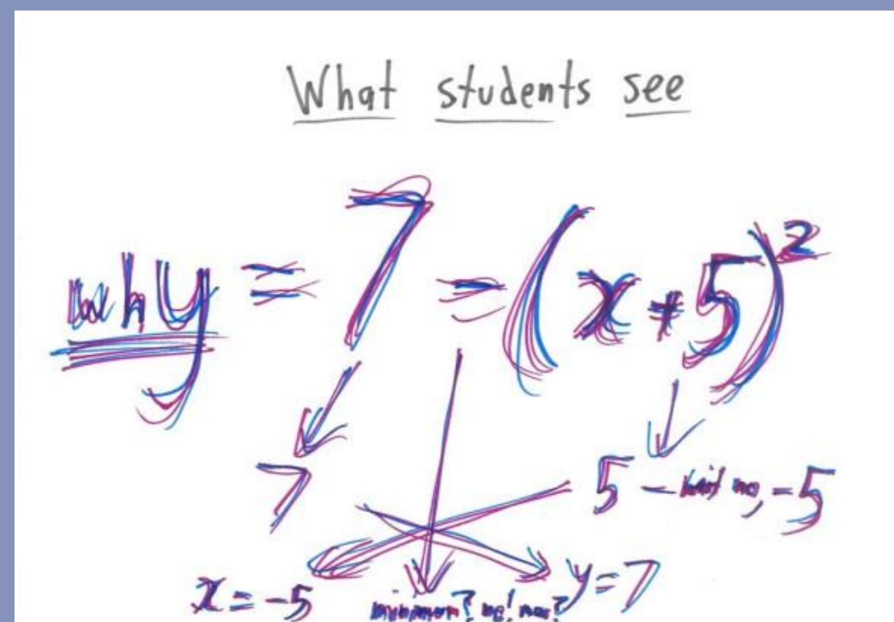
Universiteit Leiden

ICLON



Problemen met "lezen" van formule en betekenis geven (aspect van symbol sense)





Wat is symbol sense?

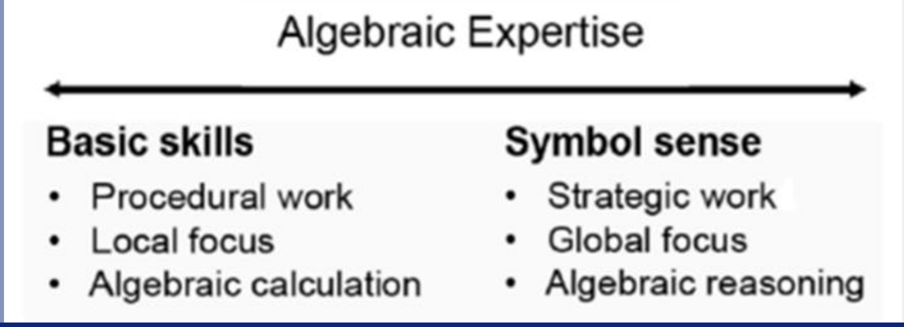
“Door een algebraische formule heenkijken”:

- een formule als een geheel zien,
- de structuur herkennen,
- de globale kenmerken herkennen

(eventueel na omzetting in een andere representatie),

- een schatting maken van uitkomsten.

Fey, 1990; Arcavi, 1994; Drijvers, 2011



Probleem en hoofdvraag

- Leerlingen hebben weinig symbol sense en weinig zelfvertrouwen in hun algebraïsche vaardigheid.

- Er bestaat weinig kennis op het gebied van het onderwijzen van symbol sense.

Deze problemen hebben geleid tot onze hoofdvraag:

Hoe kan onderwijs in het tekenen van grafieken met de hand helpen om symbol sense bij leerlingen te bevorderen?

Arcavi, Drijvers, & Stacey, 2017; Kieran, 2006; Thompson, 2013

PhD research: vier deelstudies

Hoe schetsen experts grafieken met de hand? (studie 1 and 2)

Hoe kunnen we grafieken tekenen met de hand aanleren en bevordert dit het inzicht in formules? (studie 3)

Is grafieken tekenen met de hand een manier om symbol sense bij leerlingen te bevorderen? (studie 4)

Wat is grafieken tekenen met de hand?

$$y = 2x + \frac{4}{x}$$

$$y = \sqrt{6 - 2x}$$

$$y = x \cdot e^{-x^2}$$

Studie 1: deelvragen en werkwijze

- Hoe ziet een framework eruit om strategieen te beschijven?

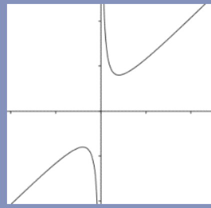
- Hoe ziet expertise in dit domein van grafieken tekenen eruit?

Deelnemers:
- 5 experts en 3 docenten
- Hardop denken; o.a. teken de grafiek van $y = 2x\sqrt{8-x} - 2x$

Kop, P. M., Janssen, F. J., Drijvers, P. H., Veenman, M. V., & van Driel, J. H. (2015). Identifying a framework for graphing formulas from expert strategies. The Journal of Mathematical Behavior, 39, 121-134.

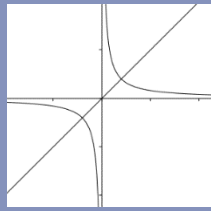
$y = 2x + 4/x$

Studie 1: resultaten



Niveaus van herkenning

A: directe herkenning



B: herkennen als lid van functie-familie

C: splits in sub-formules

D. aspect van de grafiek is herkend (maar grafiek is nog onduidelijk)

E: grafiek is niet herkend, maar strategisch onderzoek a.d.h.v. formule

F: geen herkenning

Zie ook Mason’s structures of attention (2003, 2004, 2008)

2 dimensional framework
Heuristic search (strong → weak)

Recognition guides heuristic search

Berliner & Ebeling (1989); Gobet, 2006

Levels of recognition (low ← high)

A1. Graph is instantly recognized as a whole				
B1. Recognition of family; possible graphs are known	B2. Search for 'parameters' of the graph	B3. Investigate the family characteristics i.e. zeroes		
C1. Split formula in subformulas, graphs of subformulas being known	C2. Compose the graphs by qualitative reasoning	C3. Compose the graphs by making a table		
D1. Characteristic aspect of graph is recognized; rest of graph is unknown				
E1. Graph is not recognized, algebraic formula is starting point for strategic exploration	E2. Qualitative reasoning, i.e. about domain, or vertical asymptote, or symmetry, or infinity behavior, or in/decrease	E3. Algebraic manipulation	E4. Strategic search, i.e. zeroes or turning points	E5. Calculate strategically chosen point(s)
F1. No recognition at all	F2. Standard repertoire of research	F3. Make table with random values		

Conclusies studie 1

- Framework bruikbaar
- Expertise heeft te maken
  - met kwalitatief redeneren
  - een repertoire van direct te tekenen grafieken
- Niet alle docenten kunnen dit goed
- Berekeningen worden nauwelijks gebruikt

•

Studie 2: vragen en conclusies

- Hoe kan bij experts het herkenningsproces bij het schetsen van basis functies beschreven worden in termen van prototypen en kenmerken?

Conclusies:

- Repertoire van basic functie families van experts lijkt op basis functies van VO

- Experts gebruiken prototypes van de functie-families en karakteristieke kenmerken

Kop, P. M., Janssen, F. J., Drijvers, P. H., & van Driel, J. H. (2017). Graphing formulas: Unraveling experts' recognition processes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 167-182.

Studie 3: deelvraag en werkwijze

Hoe kunnen we grafieken tekenen met de hand aanleren en bevordert dit het inzicht in formules bij 16-17- jarige vwo leerlingen?

Lessenserie in vwo 5 wisB GSG Leo Vroman (2016) door Peter Kop

- Pretest
- 5 lessen van 90 min
- Posttest en retentietest (na 4 maanden)
- 6 leerlingen denken hardop bij schetsen van grafieken (in pre- en posttest)

Lessenserie in vwo 5 wisB GSG Leo Vroman (2018) door Erik van Barneveld

- Pretest
- 6 lessen van 45 min
- Posttest (nog geen retentietest)

Pre-test, post-test, retentie-test

Taak 1: Schets de (globale) grafiek
(7 basis en 7 complexe functies)

Taak 2: kies het correcte alternatief uit deze 21 alternatieven: 20 grafieken and “geen van allen”

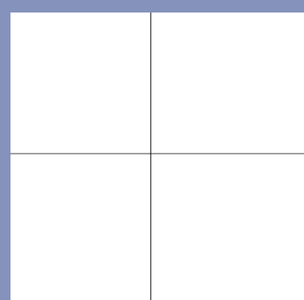
Formula	Alternative
$y=-2(x-4)^2-9$	
$y=-0,2x^2(10-x)$	
$y=6x^7$	
$y=5e^{-x+4}-6$	

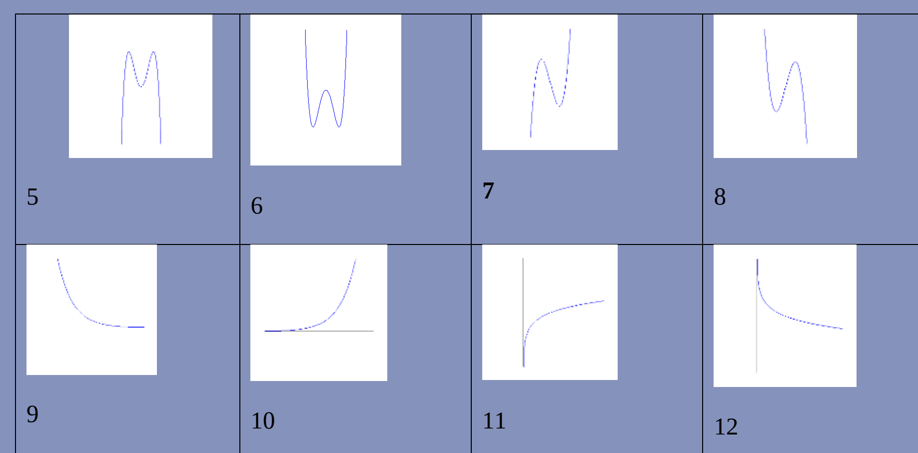
$$y=20\cdot 0,9^x+10$$

$$y=\sqrt{6-2x}$$

$$y=-x+e^x$$

$$y=\frac{x^2+6}{x^2-4}$$

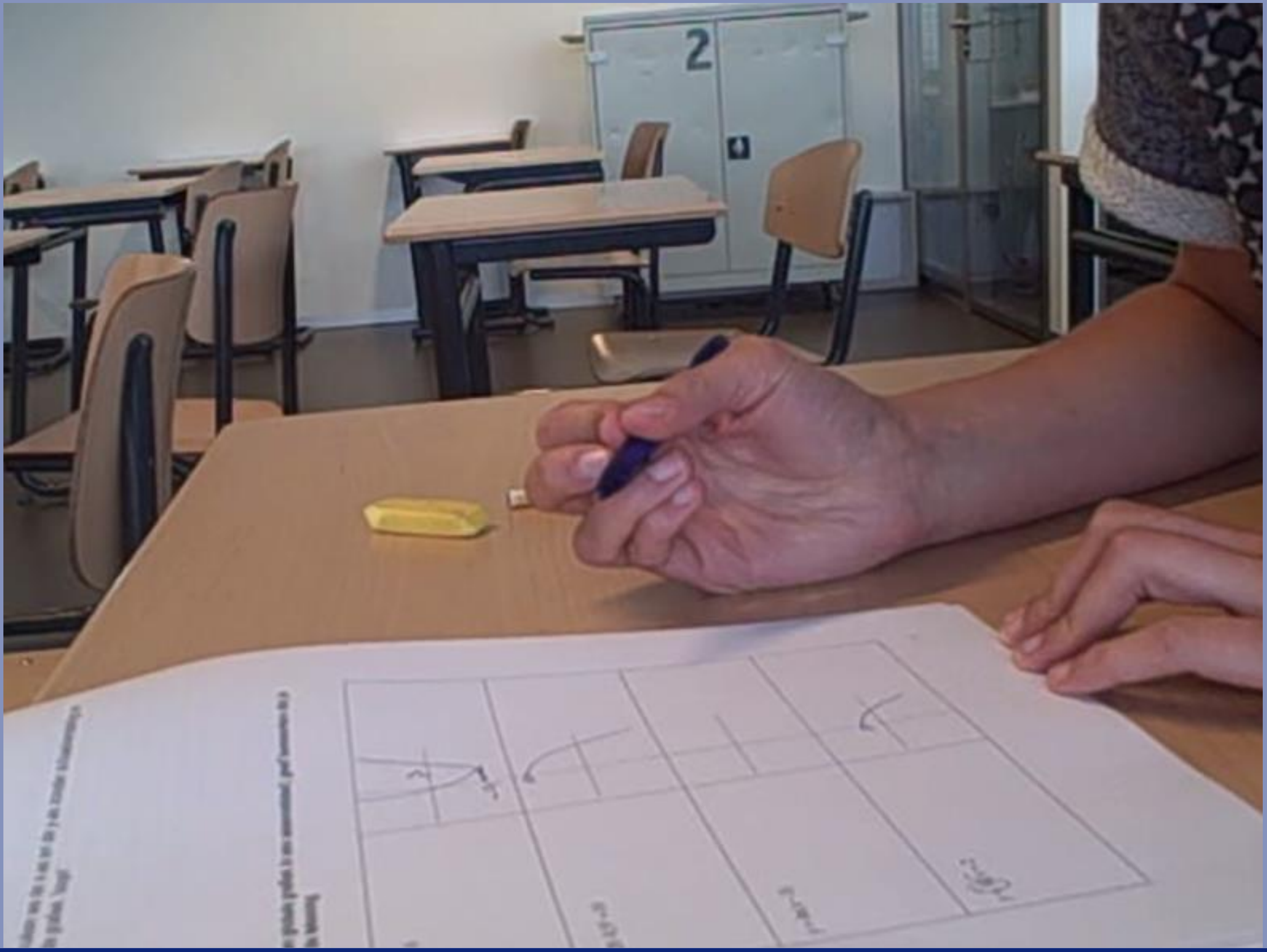




In pre-test

Veel leerlingen hebben geen beeld bij basis functies als 2^x of *ln(x)*

Excellente studenten redden zich door hun redeneren

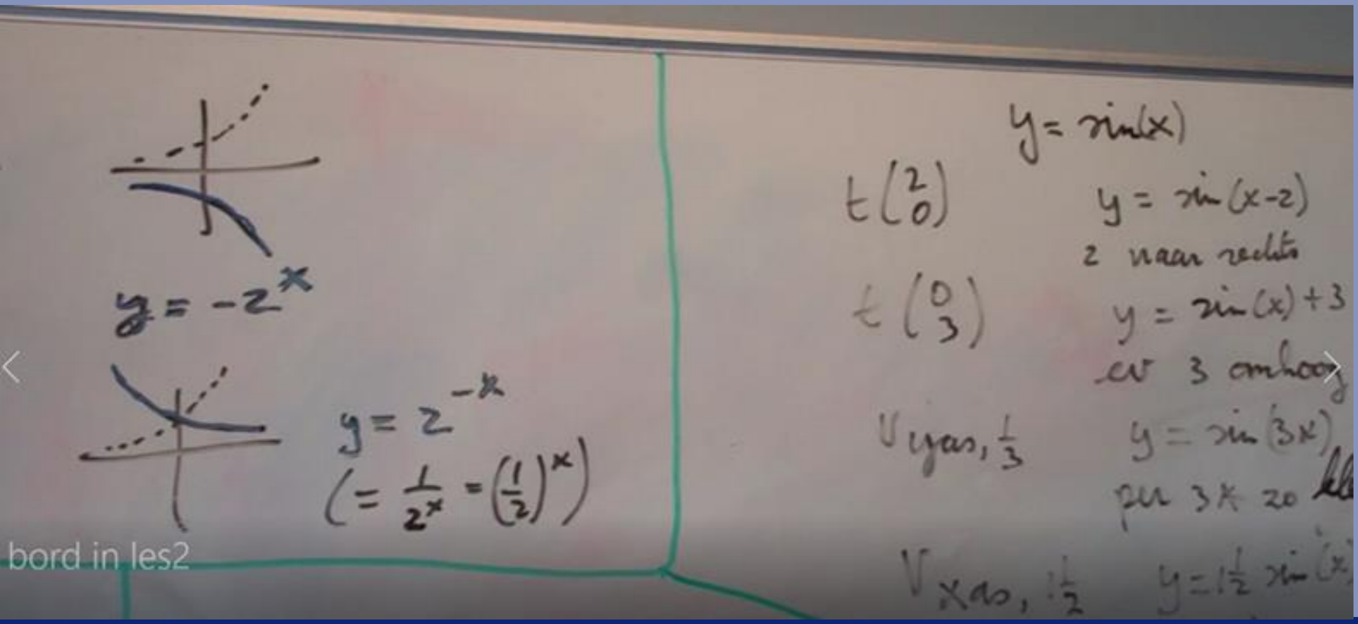


$y=(x-3)^4-9$
$y=20\cdot 0{,}9^x+10$
$y=\ln(x-3)$
$y=3\sqrt[4]{x}+2$

lessenserie

De ontwerpprincipes achter de lessenserie

- Focus op repertoire van basic functie families (bouwstenen) en op kwalitatief redeneren
- Hele taken eerst
- Hulp en reflectie
- Bevragen van formule

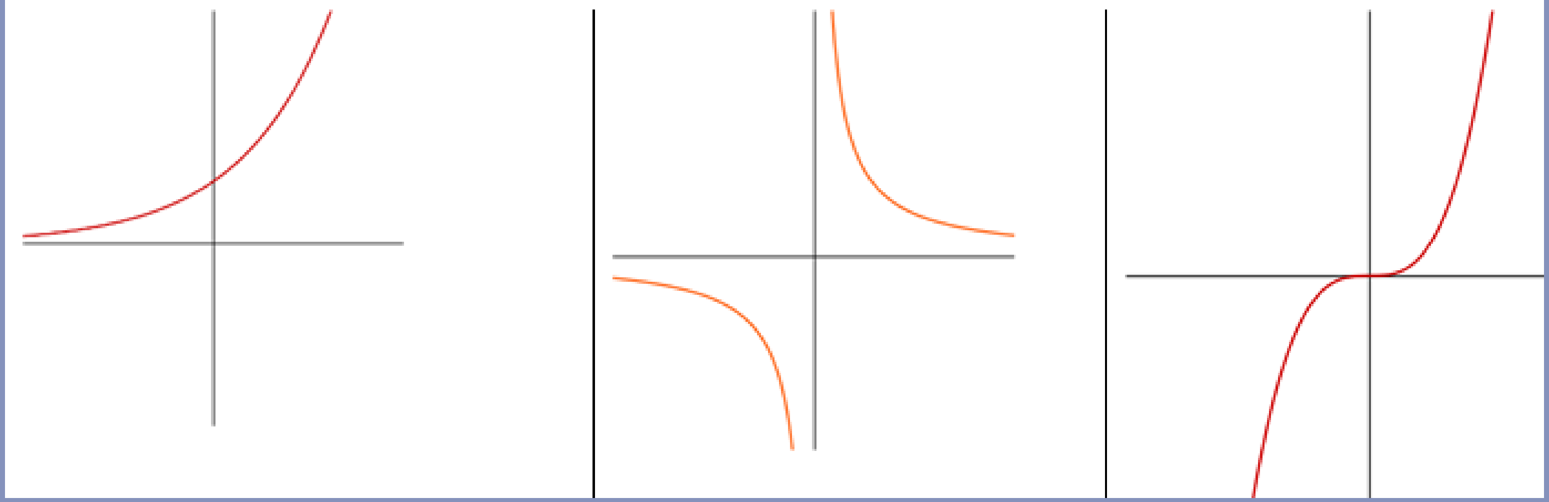


Kirschner, P.A., & Van Merriënboer, J.J.G. (2008). Ten steps to complex learning: A new approach to instruction and instructional design. In T. L. Good (Ed.), *21st Century Education: A Reference Handbook* (pp. 244–253). Thousand Oaks, CA: Sage.

Opdracht A

Herkennen van basisfuncties en hun globale grafiek met de kenmerken

$$y = 2^x;\ y = x^2;\ y = \sqrt{x};\ y = x^3;\ y = x^4;\ y = \frac{1}{x};\ y = 0,5^x;\ y = \ln(x);\ y = \sin(x);\ y = e^x$$



Opdracht B

Functie-families bestuderen en verschuivingen en rekkingen (vermenigvuldigingen) herkennen

Steeds een tweetal formules die enigszins op elkaar lijken maar verschillende grafieken kunnen hebben. Beschrijf de verschillen en schets de grafieken.

Hulp1: over het omklappen van een grafiek;
hulp 2: voorbeelden;
hulp 3: GeoGebra bestand

a) $y = -2x^3$ en $y = -2x^4$

b) $y = -3^x$ en $y = 3^{-x}$

c) $y = 3 \cdot \ln(x)$ en $y = \ln(x)$

d) $y = -(x+4)^4 + 2$ en $y = -(x+4)^4$

e) $y = 3^x - 2$ en $y = 3^{-x} - 2$

Opdracht C

Splitsen van formules in eenvoudigere sub-formules (eenvoudig te schetsen)

$$y1 = \sqrt{x}(x^2 - 4)$$

$$y2 = \frac{5}{x} + 2x$$

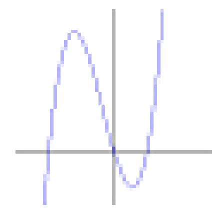
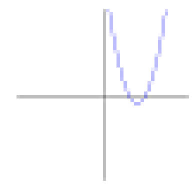
$$y3 = x^2 \cdot 3^{-x}$$

$$y4 = \frac{x^2 - 4}{9 - x^2}$$

Opdracht D

Herkennen van kenmerken van de grafiek uit een formule

Welke eigenschap kun je goed uit eerste formule aflezen en welke uit tweede?

$y = 2x(x-2)(x+4)$	$y = 2x^3 + 4x^2 - 16x$	
$y = (x-4)^2 - 1$	$y = (x-5)(x-3)$	

Opdracht E

Bewust naar kenmerken van de grafiek op zoek.

- Beperkt domein? Verticale asymptoten?
- Is er sprake van symmetrie?
- Hoe zien de staarten van de grafiek eruit (oneindig gedrag)?

Oneindig gedrag: wat gebeurt er met de y-waarden als $x \to +\infty$ of als $x \to -\infty$? We onderscheiden:

$y \to +\infty$

$y \to$ een grenswaarde ongelijk 0

$y \to 0$

$y \to -\infty$

y waarden blijven "schommelen".

$y = 19 - 13 \cdot 0,78^x$

$D = 15,6 \log(v) + 4,1$

$P = 100\,(1 - 3^{-0,5t})$

$D = 6,9\,\sqrt{T - 12}$

$TK = 0,05q^3 - 80q$

Resultaten 2016

23 leerlingen	Post test	Pre test	p-waarde	Effect grootte
Taak 1 (max14)				
Gem score	8,6	3,1	<0,001	2,27
SD	2,8	2,6		
Taak 2 (max 16)				
Gem score	10,0	3,0	<0,001	2,22
SD	2,8	2,3		

23 leerlingen	Retentie-test	Pre test	p-waarde	Effect grootte
Taak 1 (max 14)				
Gem score	6,3	3,1	0,007	0,81
Standaarddeviatie	3,4	2,6	<0,001	
Taak 2 (max 16)				
Gemiddelde score	8,1	3,0	<0,001	1,20
Standaarddeviatie	3,3	2,3		

Resultaten 2018

23 leerlingen	Post test	Pre test	p-waarde	Effect grootte
Taak 1 (max14)				
Gem score	6,7	2,4	<0,001	2,05
SD	2,9	2,1		
Taak 2 (max16)				
Gem score	9,3	3,7	<0,001	1,93
SD	3,9	2,9		

Conclusies na lessenserie:

In pre-test

- herkenning schiet te kort: veel leerlingen hebben geen beeld (grafiek) bij bijv. basis functies als 2^x of *ln(x)*
- excellente studenten redden zich door hun redeneren

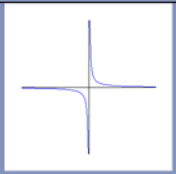
In post-test

- herkenning veel beter (repertoire basis functies)
- schetsen van meer complexe functies ook significant beter (meer strategieen)
- nog moeite met coordineren van alle informatie bij complexere formules

Expertise gedrag (herkenning en kwalitatief redeneren) in grafieken tekenen met de hand is te onderwijzen

Taak 3 in post-test van 2016 groep
(vergelijkbare taak ook in expertise onderzoek gebruikt)

Zelf aan de slag:
Categoriseer naar globale grafiek.
Maak zoveel categorieen als nodig;
bedenk bij iedere categorie een prototypische formule en grafiek

$2x\sqrt{x}$	$(100x)^{\frac{1}{2}}$	$2.(\sqrt{2})^x$	$\sqrt{8-x^2}$
$100-e^x$	$4\sqrt{10-x}$	$3(8-\frac{x}{5})$	$3x^{-2}$
			

Wat kunnen “onze” leerlingen met deze taak?

Lineaire $y=x$

$3(8-\frac{x}{5})$

$x+5(4-x)$

parabool $y=x^2$

$3)^2+2$

$x(9-x)$

$(x+5)(3-x)$

$(x^2-7)^2$

$(x+3)^4-9$

3e machts-achtig $y=x^3$

$(x^2-7)(x-5)$

$-(x-1)^2+2(x-1)+6$

$2(x-3)^2(x+3)$

$2x-3(x+2)(x-2)$

$-x^3+2x$

$x(x-3)(x+3)$

4-nulpunten $y=(x^2-2)$

$3(x^2-4)(x^2-6)$

wortel $y=\sqrt{x}$

$3\sqrt{x+6}$

$2\sqrt{x}-6$

$8\sqrt{x^3}$

$(100x)^{\frac{1}{2}}$

$2\sqrt[4]{x}$

$(2-x)^{\frac{1}{2}}+2$

$2x\sqrt{x}$

$4\sqrt{10-x}$

$y=\sqrt{x}$ beperkt domein

$y=\sqrt[3]{1+x^2}$ onbeperkt domein

$\sqrt{8-x^2}$

$y=e^x$ HA

$18\cdot 0{,}3^x+12$

4^{-3+x}

$2.(\sqrt{2})^x$

2^{6-x}

$100-e^x$

$8e^{-x}$

$y=\frac{1}{e^x}$ 2.HA

$\frac{8}{3^x}$

$y=\log(x)$ VA

${}^2\log(x-6)$

$\ln(x-3)$

$-\ln(x)$

$y=\frac{1}{x}$ HA + VA

$\frac{4x+2}{x}$

$\frac{2}{x^4}$

$3x^{-2}$

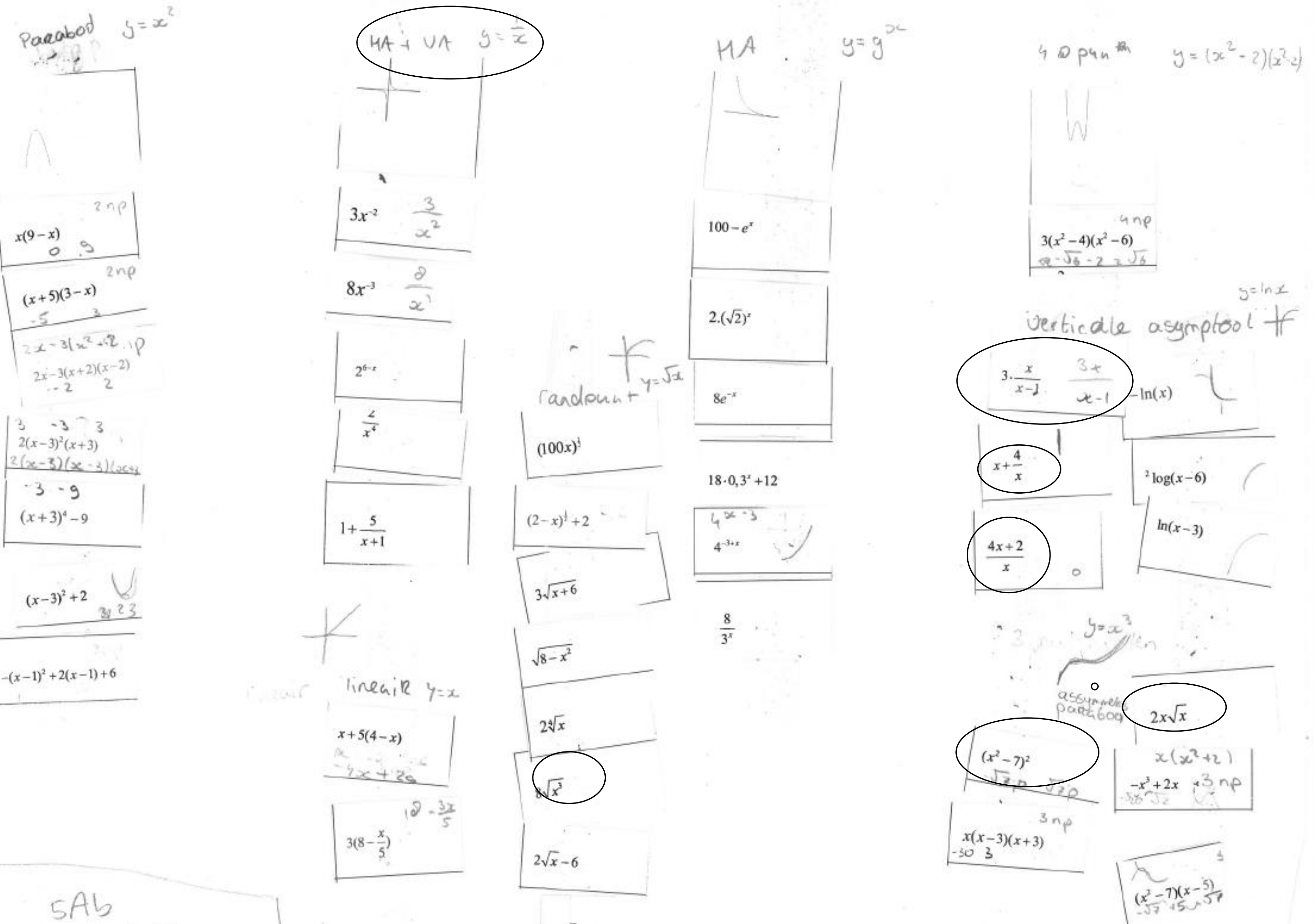
$3\cdot\frac{x}{x-1}$

$1+\frac{5}{x+1}$

$8x^{-3}$

$y=x+\frac{1}{x}$ SA + VA

$x+\frac{4}{x}$


Parabool $y=x^2$
$x(9-x)$
2 np
0 9
$(x+5)(3-x)$
2 np
-5 3
$2x-3(x+2)(x-2)$
$2(x-3)^2(x+3)$
$(x+3)^4-9$
$(x-3)^2+2$
$-(x-1)^2+2(x-1)+6$
5Ab
HA + VA $y=\frac{1}{x}$
$3x^{-2}$
$\frac{3}{x^2}$
$8x^{-3}$
$\frac{8}{x^3}$
2^{6-x}
$\frac{2}{x^4}$
$1+\frac{5}{x+1}$
lineair $y=x$
$x+5(4-x)$
$-4x+20$
$3(8-\frac{x}{5})$
$12-\frac{3x}{5}$
randpunt $y=\sqrt{x}$
$(100x)^{\frac{1}{3}}$
$(2-x)^{\frac{1}{3}}+2$
$3\sqrt{x+6}$
$\sqrt{8-x^2}$
$2\sqrt[4]{x}$
$8\sqrt{x^3}$
$2\sqrt{x}-6$
HA
$y=g^x$
$100-e^x$
$2.(\sqrt{2})^x$
$8e^{-x}$
$18\cdot 0{,}3^x+12$
4^{-3+x}
$\frac{8}{3^x}$
4 np
$y=(x^2-2)(x^2-2)$
$3(x^2-4)(x^2-6)$
4 np
verticale asymptoot
$y=\ln x$
$3.\frac{x}{x-1}$
$\frac{3x}{x-1}$
$-\ln(x)$
$x+\frac{4}{x}$
$^2\log(x-6)$
$\frac{4x+2}{x}$
$\ln(x-3)$
$y=x^3$
asymmetrische parabool
$2x\sqrt{x}$
$(x^2-7)^2$
$x(x^2+2)$
$-x^3+2x$
3 np
$x(x-3)(x+3)$
3 np
$(x^2-7)(x-5)$

Afronding Hoe verder?

Studie 4: deelvraag en werkwijze

Is grafieken tekenen met de hand een manier om symbol sense voor oplossen van algebraische problemen te bevorderen?

Methode:
schriftelijke symbol sense test
Type A: grafieken expliciet gevraagd
Type B: gebruik van grafieken en redeneren bij oplossen van algebraische problemen

9 maanden na lessenserie van 2016
23 leerlingen en controle groep
(93 leerlingen van 5 verschillende scholen)
6 leerlingen denken hardop

Impressie symbol sense test

2) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking: $5\ln(x) = \frac{1}{2}x - 10$

Dus enkel een aantal (met een toelichting)

3) Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $2^x = 2^{-x} + 3$?

4) Kan de uitkomst van $y = -0.1(x-3)(x-10) + \dfrac{40}{x-3}$ groter worden dan 70?

7) Welke waarde(n) kan y aannemen als $y = 24 - 0,01(x+5)^4$?

14) Kies het goede alternatief: Het maximum van de functie $y = x(14-2x)(8-2x)$ ligt tussen: A. [-4;0]; B. [0;4]; C. [4;7]; D. [7;14]

Conclusies en aanbevelingen van PhD studie:

Conclusies:

- Met regulier onderwijs leren leerlingen niet om beeld/grafiek te maken bij formules:
- ze missen repertoire basis functies, kwalitatief redeneren, bevragen probleem
- Grafieken met de hand tekenen lijkt practische manier om inzicht in formules te vergroten (aspect van symbol sense)

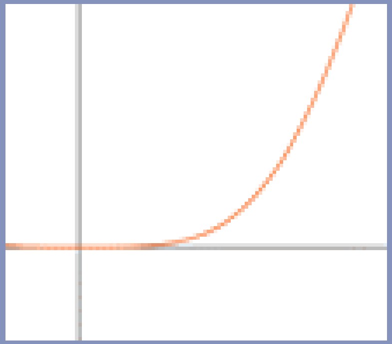
Aanbevelingen en overwegingen:

- Gebruik van expertise onderzoek om onderwijs te ontwerpen
- Onderwijs kwalitatief redeneren ook bij algebra
- Andere leerlijn algebra:

    - start met onderzoeken functie families gekoppeld aan grafieken met ICT
    - minder focus op manipuleren en berekeningen

Alles in beeld?

$$f(x) = 20x^4 / (x^4 + 2000)$$



Bedankt voor uw aandacht