Handout over “de Methode” van Archimedes

NWD 2018   Luuk Hoevenaars

In de jaren ’30 heeft Eduard Jan Dijksterhuis alle bekende teksten van Archimedes vertaald in het Nederlands. Deze vertaling is in fragmenten verschenen in het tijdschrift Euclides, en later in het Engels vertaald en uitgegeven door Princeton University Press. De Nederlandse teksten heb ik met behulp van de archieven van de Euclides samengebracht in één pdf document en voorzien van een inhoudsopgave. Deze is (met toestemming van de redactie van het tijdschrift) vrij beschikbaar via de volgende link:

https://goo.gl/dzwo2K

Hierna volgen 3 fragmenten uit de werken van Archimedes:

1. Berekening van het volume van een bol met behulp van “de Methode”, waarin Archimedes oneindig veel lijnstukjes met elkaar in evenwicht brengt ten opzichte van een balans.

2. Tijdens de presentatie is ingegaan op de berekening van de oppervlakte van een paraboolsegment volgens “de Methode”. Archimedes ziet dit niet als een streng wiskundig bewijs. Het tweede fragment van de handout komt uit “Quadratuur van de parabool” en gaat over een berekening van de oppervlakte van een paraboolsegment via een meetkundige reeks.

3. Nóg een bewijs van de berekening van de oppervlakte van een paraboolsegment, waarin Archimedes een eindig aantal oppervlaktes van trapezia in evenwicht brengt ten opzichte van een balans. Dit lijkt sterk op latere negentiende eeuwse bewijzen met behulp van Riemann sommen.

Per fragment is er eerst een “moderne” leeswijzer en volgt daarna de tekst van Archimedes zelf, zoals vertaald door Dijksterhuis.

1. Leeswijzer bij de Methode, volume v/e bol.

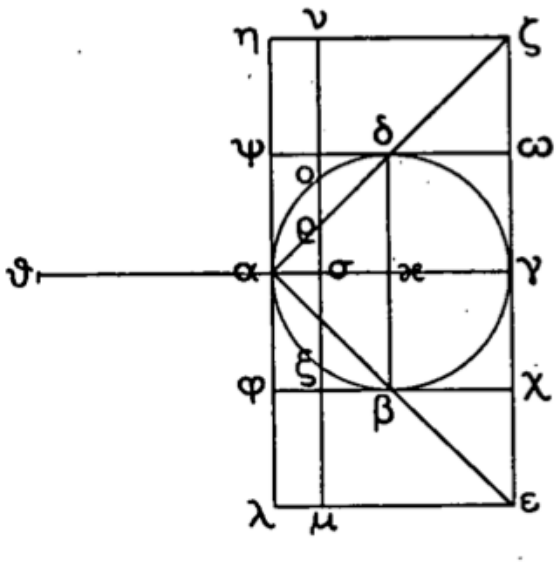


Fig. 128.

We kijken naar het zijaanzicht van een bol, een grote kegel met doorsnede $\alpha\varepsilon\zeta$ en een grote cilinder die de kegel omvat. Er is een balans te zien, met als as $\vartheta\gamma$ en als evenwichtspunt α. Archimedes doorsnijdt de volumes met een vlak, waarvan $\mu\nu$ in onze tekening ligt. Het idee is dat de figuren zijn opgebouwd uit allerlei van dit soort vlakken, en dat we via de hefboommethode een evenwicht vinden door sommige figuren naar ϑ te verplaatsen.

De doorsnedes van de figuren zijn allen cirkels, en hun gewichten zijn evenredig met hun oppervlaktes:

Kegel:	cirkel met straal $\rho\sigma$
Bol:	cirkel met straal $o\sigma$
Cilinder:	cirkel met straal $\nu\sigma$

We tellen de oppervlaktes afkomstig van bol en kegel bij elkaar op en gaan herleiden:

$$\rho\sigma^2 + o\sigma^2 = \alpha\sigma^2 + o\sigma^2 = o\alpha^2$$

Opdracht 1
Leg uit waarom de rechthoekige driehoeken $\Delta o\alpha\sigma$ en $\Delta\gamma\alpha o$ gelijkvormig zijn.

Een andere uitdrukking voor $o\alpha^2$ vind je door te kijken naar deze gelijkvormigheid:

$$\frac{o\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha\gamma}{o\alpha}$$

zodat

$$o\alpha^2 = \alpha\sigma \cdot \alpha\gamma$$

en dus

$$\rho\sigma^2 + o\sigma^2 = \alpha\sigma \cdot \alpha\gamma = \alpha\sigma \cdot \nu\sigma$$

Opdracht 2
Waar zie je deze uitdrukkingen terug in de tekst van Archimedes?

1.

We zijn nu klaar om te kijken naar de verhouding tussen de oppervlaktes afkomstig van de cilinder enerzijds en die van de bol en kegel anderzijds:

$$\frac{\nu\sigma^2}{\rho\sigma^2 + o\sigma^2} = \frac{\nu\sigma^2}{\alpha\sigma \cdot \nu\sigma} = \frac{\nu\sigma}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha\vartheta}{\alpha\sigma}$$

Zoals gezegd verhouden de oppervlaktes zich zoals de gewichten zich verhouden. Als we het gewicht van de cilinder (vertegenwoordigd door oppervlakte $\nu\sigma^2$) op zijn plek laten en het gewicht van bol en kegel verplaatsen naar punt ϑ dan vinden we dat de *momenten* (gewicht keer afstand tot α) aan beide kanten van de hefboom gelijk zijn:

$$\alpha\sigma \cdot \nu\sigma^2 = \alpha\vartheta \cdot (\rho\sigma^2 + o\sigma^2)$$

De hefboom is dus in balans. Als laatste stap plaatsen we het hele gewicht van de cilinder in zijn zwaartepunt, en dat ligt in het middelpunt van de bol in punt κ, zodat $\alpha\kappa = \frac{1}{2}\alpha\vartheta$. Daarom weegt de cilinder twee keer zo zwaar als de bol en de kegel samen.

Opdracht 3
Je kunt ook een kleinere cilinder bekijken die de bol precies omvat. Leid af dat de verhouding tussen de inhoud van die cilinder en van de bol 3:2 is.

Opmerking
Het getuigt van veel vindingrijkheid dat Archimedes verzint om de kegel als extra "hulpfiguur" mee te nemen naar de linkerkant om de balans in evenwicht te krijgen. In de rest van de Methode gebruikt hij de balans ook om bijvoorbeeld een zwaartepunt te bepalen. Dan moet je van de figuur al wel de inhoud (of oppervlakte) weten en laat je hem juist op zijn plek, en je verplaatst een andere figuur waarvan je de inhoud (of oppervlakte) al kent naar de andere kant.

1.

De Methode, over mechanische stellingen
Nederlandse vertaling van E. Dijksterhuis
zoals verschenen in het tijdschrift Euclides

Propositie 2.

Dat iedere bol het viervoud is van den kegel, die de basis gelijk heeft aan den grootsten cirkel van den bol en de hoogte gelijk aan den straal van den bol en dat de cylinder, die de basis gelijk heeft aan den grootsten cirkel van den bol en de hoogte gelijk aan de middellijn van den bol, anderhalf maal de bol is, wordt volgens deze methode als volgt ingezien.

Laat (fig. 128) $\alpha\beta\gamma\delta$ een grootste cirkel van den bol zijn, $\alpha\gamma$ en $\beta\delta$ twee onderling loodrechte diameters daarvan. Beschouw den kegel met top α, waarvan de basis de grootste cirkel is in het vlak door $\beta\delta$ loodrecht op $\alpha\gamma$. De uitgebreide mantel van dezen kegel snijdt het vlak door γ loodrecht op $\alpha\gamma$ volgens een cirkel met diameter $\varepsilon\zeta$. Deze cirkel is basis van een cylinder $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ met hoogte $\alpha\gamma$.

2

1.

Maak $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ en beschouw $\gamma\vartheta$ als balans met steunpunt α. Een veranderlijk vlak $\mu\nu$ loodrecht op $\alpha\gamma$ snijdt kegel, bol en cylinder volgens cirkels, welker diameters opv. zijn $\pi\varrho$*), ξo en $\mu\nu$ en die we aanduiden door $\mathbf{K}\ (\pi\varrho)$, $\mathbf{K}\ (\xi o)$, $\mathbf{K}\ (\mu\nu)$.

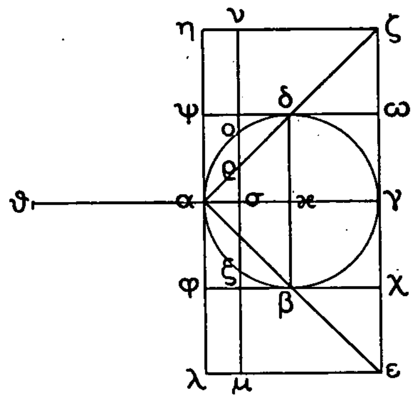


Fig. 128.

Nu is wegens

$$\varrho\sigma = \alpha\sigma$$

$$\mathbf{T}\ (\varrho\sigma) + \mathbf{T}\ (o\sigma) = \mathbf{T}\ (\alpha o) =$$
$$= \mathbf{O}\ (\alpha\sigma,\ \alpha\gamma)$$

dus wegens

$$\nu\sigma = \alpha\gamma$$

$$[\mathbf{T}\ (\nu\sigma),\ \mathbf{T}\ (\varrho\sigma) + \mathbf{T}\ (o\sigma)] =$$
$$[\mathbf{T}\ (\alpha\gamma),\ \mathbf{O}\ (\alpha\sigma,\ \alpha\gamma)] =$$
$$(\alpha\gamma,\ \alpha\sigma) = (\alpha\vartheta,\ \alpha\sigma) \qquad (1)$$

of

$$[\mathbf{K}\ (\mu\nu),\ \mathbf{K}\ (\pi\varrho) + \mathbf{K}\ (\xi o)] = (\alpha\vartheta, \alpha\sigma),$$

De cirkel $\mathbf{K}\ (\mu\nu)$ suo loco[16]) kan dus de cirkels $\mathbf{K}(\pi\varrho)$ en $\mathbf{K}(\xi o)$, beide in ϑ geplaatst (d.w.z. zoo geplaatst, dat hun zwaartecentra in ϑ vallen), in evenwicht houden. Dus is er ook evenwicht tusschen den cylinder $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ suo loco en de combinatie in ϑ van den bol $\alpha\beta\gamma\delta$ en den kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ (de drie lichamen worden immers door de boven vermelde cirkels opgevuld, als het vlak $\mu\nu$ zich beweegt van $\eta\lambda$ naar $\zeta\varepsilon$.)

Daar nu $\varkappa$ zwaartecentrum van den cylinder is, geldt de betrekking

$$(\text{Bol} + \text{Kegel, Cylinder}) = (\alpha\varkappa,\ \alpha\vartheta)$$

dus

$$\text{Cylinder} = 2\ (\text{Bol} + \text{Kegel})$$

De cylinder is het drievoud van den kegel, dus volgt uit de laatste betrekking

$$\text{Kegel}\ \alpha\varepsilon\zeta = 2.\ \text{Bol}\ \alpha\beta\gamma\delta$$

dus

$$\text{Bol}\ \alpha\beta\gamma\delta = 4.\ \text{Kegel}\ \alpha\beta\delta$$

Ook de stelling over de verhouding van den bol en den cylinder is nu onmiddellijk duidelijk.

---

*) Bij het snijpunt van de rechten $\alpha\varepsilon$ en $\mu\nu$ is de letter π weggevallen.

16) Door deze Latijnsche vertaling van de Grieksche uitdrukking αὐτοῦ μένων geven we aan, dat de beschouwde figuur blijft, waar ze is.

2. Leeswijzer bij Quadratuur van de parabool, machtreeks.

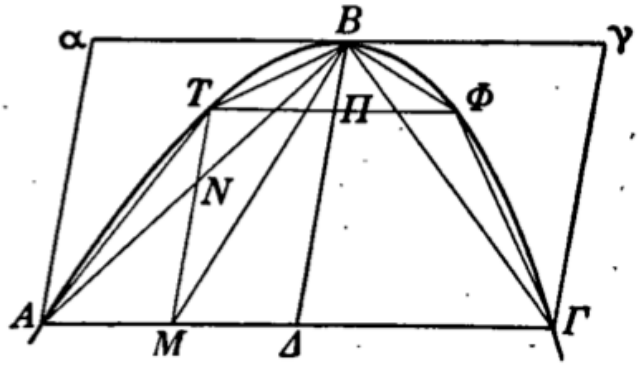


Fig. 140.

Archimedes bekijkt in deze tekst een paraboolsegment $\mathrm{AB\Gamma}$ en een bijbehorende $\Delta\ \mathrm{AB\Gamma}$.
Hij wil aantonen dat

$$opp.\,\mathrm{AB\Gamma} = \frac{4}{3}\ opp.\,\Delta\ \mathrm{AB\Gamma}$$

Opmerking 1:
Merk op dat het punt B zó gekozen is op het paraboolsegment dat de lijn door B evenwijdig met de as van de parabool samenvalt met de zwaartelijn van $\Delta\ \mathrm{AB\Gamma}$.

Opmerking 2:
De lijnstukken $\mathrm{T\Pi}$ en $\mathrm{A\Delta}$ staan weliswaar niet loodrecht op de as van de parabool, maar toch geldt (net als volgens de vergelijking van een parabool) dat

$$\mathrm{B\Pi} = c \cdot (\mathrm{M\Delta})^2$$
$$\mathrm{B\Delta} = c \cdot (\mathrm{A\Delta})^2$$

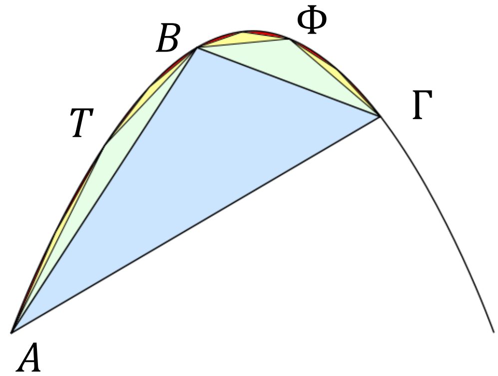
Opdracht 1
Waar vind je deze twee opmerkingen terug in de tekst van Archimedes?
Hint: wat zouden $(\mathrm{B\Delta}, \mathrm{B\Pi})$ en $\mathbf{T}(\mathrm{A\Delta})$ betekenen?

Nu introduceert Archimedes een bijzonder soort "Riemann ondersom" K: deze bestaat niet uit staafjes maar uit driehoeken. Deze worden opgebouwd uit een iteratief proces als volgt:

Stap 0: *de oorspronkelijke* $\Delta\ \mathrm{AB\Gamma}$ *met opp. Z*

Stap 1: *hier komen twee driehoeken bij (lichtblauw) die horen bij de twee paraboolsegmenten met basis* AB *en* $\mathrm{B\Gamma}$ *en gezamenlijke opp.* Z_1

Stap 2: *hier komen vier driehoeken bij (geel) die horen bij de vier paraboolsegmenten met basis* AT, TB, $\mathrm{B\Phi}$, $\mathrm{\Phi\Gamma}$ *en gezamenlijke opp.* Z_2



etcetera

2.

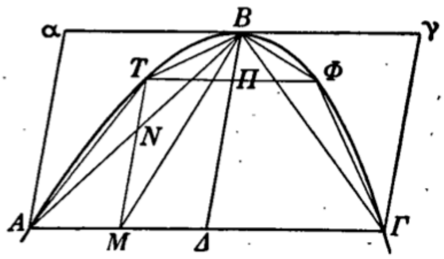
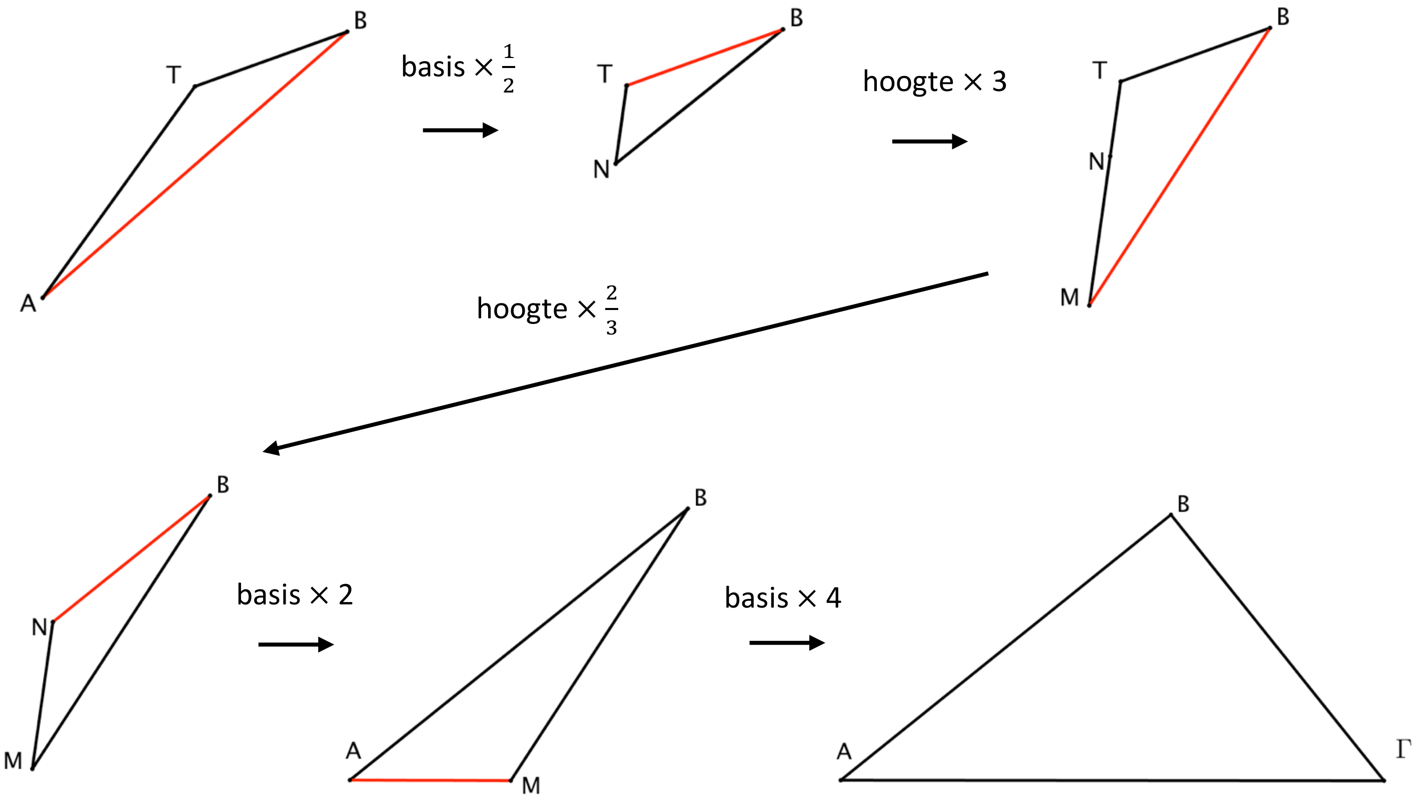


Fig. 140.

Om een idee te krijgen van de grootte van de Riemann ondersom K kijken we welke oppervlakte erbij komt in iedere stap:

stap 1: *we zullen aantonen dat* $opp.\Delta\, ATB = \frac{1}{8}\, opp.\Delta\, \mathrm{AB\Gamma}$ *via een serie van driehoeken. per driehoek is de gekozen basis rood gekleurd en wordt ofwel de basis veranderd, ofwel de hoogte veranderd. Van begin tot eind wordt de oppervlakte 8 keer zo groot.*



Er komen in deze stap dus twee driehoeken bij met ieder $\frac{1}{8}\, opp.\Delta\, \mathrm{AB\Gamma}$.

We vinden daarom $Z_1 = \frac{1}{4}Z$.

Opdracht 2:
Hoe worden de Opmerkingen 1 & 2 van de vorige pagina hier gebruikt?

stap 2: *er komen vier driehoeken bij met ieder oppervlakte* $\frac{1}{8} opp.\Delta\, ATB = \frac{1}{16}\, Z_1$.

De oppervlakte die erbij komt is dus $Z_2 = \frac{1}{4}Z_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 Z$.

etcetera

De totale oppervlakte van de Riemann ondersom is dus $K = Z \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{4}{3}Z$.

Archimedes kon deze meetkundige reeks berekenen, en bewijzen door middel van inklemmen.

2.

Quadratuur van de parabool
Nederlandse vertaling van E. Dijksterhuis
zoals verschenen in het tijdschrift Euclides

Resultaat:
Zij Σ = opp. paraboolsegment $AB\Gamma$
Zij Z = opp. driehoek $AB\Gamma$
dan geldt $\Sigma = 4/3\, Z$

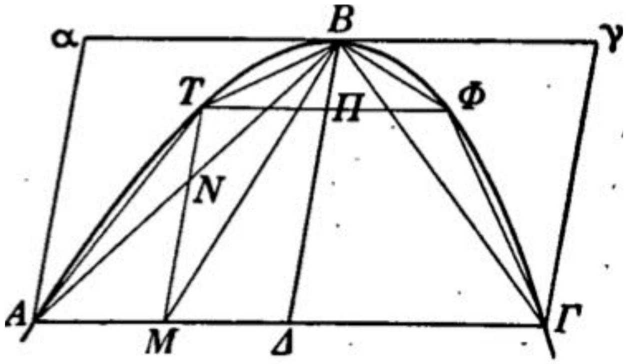


Fig. 140.

We vatten in het volgende den inhoud der Prop. 19—24 samen (fig. 140). Laat Σ het segment $AB\Gamma$ der orthotome zijn met basis $A\Gamma$ en top B. Construeer het parallelogram $A\Gamma\gamma\alpha$ met zijde $A\Gamma$, waarvan de overstaande zijde door B gaat, dan blijkt in Prop. 20:

$$\triangle\, AB\Gamma = \tfrac{1}{2}\, A\Gamma\gamma\alpha > \tfrac{1}{2}\,\Sigma.$$

Daar men met elk der segmenten AB, $B\Gamma$ evenzoo kan handelen, is het lemma van Euclides van toepassing (Prop. 20; Corollarium). Beschouw thans den ingeschreven driehoek (verg. III; 2,4) ATB van het segment AB. De top T ligt op de rechte, die door het midden N van AB parallel met den diameter, dus parallel met $B\Delta$ is getrokken; deze rechte gaat dus ook door het midden M van $A\Delta$. Trek nog BM. We willen nu de driehoeken $AB\Gamma$ en ABT vergelijken.

Daartoe wordt eerst bewezen (Prop. 19):

$$B\Delta = \tfrac{4}{3}\, TM.$$

Dit volgt uit het symptoom der orthotome; snijdt nl. de rechte door T parallel met $A\Gamma$ in Π de rechte $B\Delta$, dan is

$$(B\Delta,\ B\Pi) = [\mathbf{T}\,(A\Delta),\ \mathbf{T}\,(T\Pi)] = [\mathbf{T}\,(A\Delta),\ \mathbf{T}\,(M\Delta)]$$

dus

$$B\Delta = 4\,.\,B\Pi$$

dus

$$TM = \Pi\Delta = \tfrac{3}{4}\, B\Delta.$$

2.

Daar nu $NM = \frac{1}{2} B\Delta$, blijkt $NM = 2 . TN$.
Hieruit volgt

$$\triangle ABT = 2 . \triangle BNT = \triangle BNM = \tfrac{1}{2} \triangle ABM = \tfrac{1}{8} \triangle AB\Gamma$$

(Prop. 21).

Stellen we nu de oppervlakte van $\triangle AB\Gamma$ voor door Z, dan is de som der oppervlakten van de twee driehoeken, beschreven in de segmenten AB en $B\Gamma$, $Z_1 = \frac{1}{4} Z$; zoo voortgaande vindt men voor de som van de oppervlakten der driehoeken, die in de overblijvende vier segmenten beschreven worden, $Z_2 = \frac{1}{4} Z_1$ enz. Archimedes drukt dit uit door grootheden H, Θ, I enz. in te voeren, zoodat

$$H = \tfrac{1}{4} Z,\ \Theta = \tfrac{1}{4} H,\ I = \tfrac{1}{4} \Theta$$

Hierdoor is bewezen (Prop. 22).

$$\Sigma > Z + H + \Theta + I$$

of algemeen

$$\Sigma > Z + Z_1 + \ldots\ldots + Z_{n-1}.$$

In Prop. 23 wordt nu een hulpstelling over de som van een meetkundige reeks met reden $\frac{1}{4}$ afgeleid. Volgens deze stelling

Zie laatste pagina (behandeld III; 7,60) is

$$Z + H + \Theta + I + \tfrac{1}{3} I = \tfrac{4}{3} Z \qquad (1)$$

of algemeen

$$Z + Z_1 + \ldots\ldots + Z_{n-1} + \tfrac{1}{3} Z_{n-1} = \tfrac{4}{3} Z \qquad (2)$$

Hierna volgt nu in Prop. 24 het bewijs van de hoofdstelling. Zij $K = \frac{4}{3} Z$ dan is te bewijzen $\Sigma = K$. Zij dit onjuist, dan is òf $\Sigma > K$ òf $\Sigma < K$.

Geval I. Zij $\Sigma > K$. Ga nu met het beschrijven van driehoeken in de telkens verkregen segmenten zoolang voort, tot de som I_n van alle ingeschreven driehoeken voldoet aan

$$\Sigma - I_n < \Sigma - K \qquad \text{(lemma van Euclides III; 0,5)}$$

dus

$$I_n > K$$

Archimedes onderstelt, dat dit het geval is voor $n = 4$ en schrijft dan

$$Z + H + \Phi + I > K$$

wat in strijd is met (1).

Meer algemeen vindt men

$$Z + Z_1 + \ldots\ldots + Z_{n-1} > K \qquad \text{in strijd met (2).}$$

Geval II. Zij $\Sigma < K$. We kunnen nu niet, zooals bij de compressiemethode, geheel analoog aan Geval I redeneeren, omdat er geen som C_n van omgeschreven figuren voorkomt. Archimedes zet nu het beschrijven van driehoeken voort, totdat de som van de in laatste instantie verkregen oppervlakten voldoet aan

$$I < K - \Sigma \qquad (3)$$

Men heeft verder

$$K - (Z + H + \Theta + I) = \tfrac{1}{3} I < I$$

dus

$$I > K - I_n > K - \Sigma \qquad \text{in strijd met (3).}$$

Algemeen krijgt men

$$Z_{n-1} < K - \Sigma \qquad (4)$$

Daar nu

$$Z + Z_1 + \ldots . Z_{n-1} + \tfrac{1}{3} Z_{n-1} = K$$

is ook

$$K - (Z + Z_1 + \ldots . + Z_{n-1}) = \tfrac{1}{3} Z_{n-1} < Z_{n-1}$$

dus

$$Z_{n-1} > K - I_n$$

en a fortiori

$$Z_{n-1} > K - \Sigma \qquad \text{in strijd met (4).}$$

2.

Wat volgt is wat Dijksterhuis III; 7,60 noemt

7,60. **Q. P.** 23. In *Quadratuur van de Parabool* bewijst Archimedes de volgende stelling over de som van een meetkundige reeks met reden ¼.

Indien er grootheden gesteld worden opvolgend in viervoudige reden, dan zullen alle grootheden en nog het derde deel van de kleinste samengeteld een derde grooter zijn dan de grootste.

Laat gegeven zijn de grootheden A, B, Γ, Δ, E, zoodat

$$B = \tfrac{1}{4}A,\ \Gamma = \tfrac{1}{4}B \text{ enz.}$$

Te bewijzen is

$$A + B + \ldots. + E + \tfrac{1}{3}E = \tfrac{4}{3}A.$$

Bewijs:

Zij $$Z = \tfrac{1}{3}B,\ H = \tfrac{1}{3}\Gamma,\ \Theta = \tfrac{1}{3}\Delta,\ I = \tfrac{1}{3}E$$

dan is

$$B + Z = \tfrac{1}{3}A;\ \Gamma + H = \tfrac{1}{3}B;\ \Delta + \Theta = \tfrac{1}{3}\Gamma;\ E + I = \tfrac{1}{3}\Delta$$

dus

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \tfrac{1}{3}(A + B + \Gamma + \Delta).$$

Nu is

$$Z + H + \Theta = \tfrac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta)$$

dus

$$B + \Gamma + \Delta + E + I = \tfrac{1}{3}A$$

of

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \tfrac{1}{3}E = \tfrac{4}{3}A.$$

In moderne schrijfwijze kun je dit ook lezen als:

$$A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\underbrace{\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}}\right)=A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-2}}}\right)=\cdots=A\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}A$$

3. Leeswijzer bij Quadratuur van de parabool, Riemann sommen.

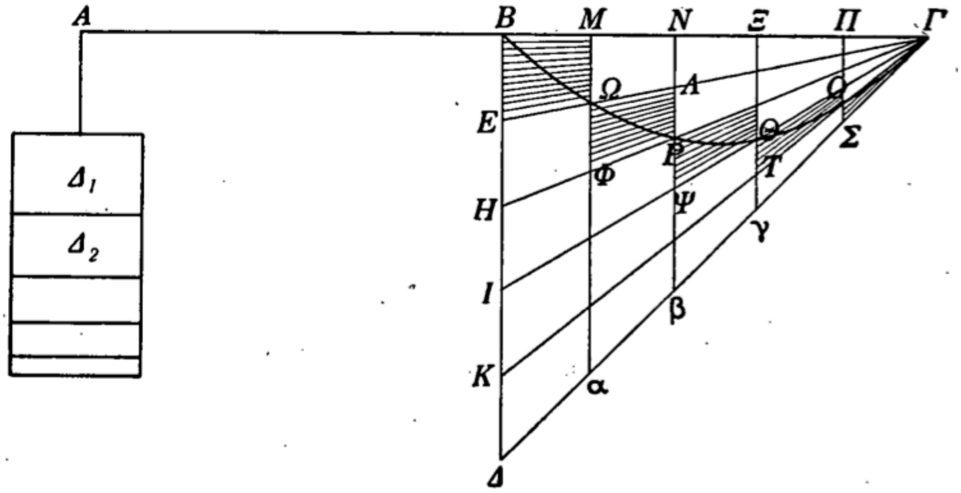


Fig. 138.

Archimedes bekijkt in deze tekst een paraboolsegment ΒΘΓ en een bijbehorende Δ Β*Δ*Γ zodat ΔΓ een raaklijn is van het segment en ΒΔ evenwijdig met de as van de parabool loopt. Hij veronderstelt als bekend dat

$$opp.\,\Delta\,\mathrm{B}\Delta\Gamma = 4 \cdot opp.\,\Delta\,\mathrm{B}\Theta\Gamma \qquad (1)$$

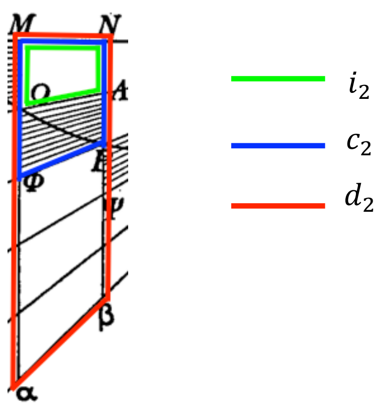
De werkwijze van *'De Methode'* is om het paraboolsegment in balans te brengen met Δ Β*Δ*Γ en heeft als nadeel dat je deze vlakke figuren moet opvatten als opgebouwd uit "oneindig veel oneindig dunne lijnstukken".
In plaats daarvan deelt Archimedes Δ Β*Δ*Γ op in n verticale stroken en brengt hij deze in balans met $\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots \Delta_n$. Als het goed is geldt voor het paraboolsegment dat

$$opp.\,\mathrm{B}\Theta\Gamma = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots \Delta_n$$

Opdracht 1
Leg uit met behulp van de ligging van het zwaartepunt van een driehoek dat

$$opp.\,\Delta\,\mathrm{B}\Delta\Gamma = 3 \cdot (\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n) \qquad (2)$$

Archimedes introduceert nu trapezia i_k, c_k, d_k als volgt (ter indicatie geven we i_2, c_2, d_2):



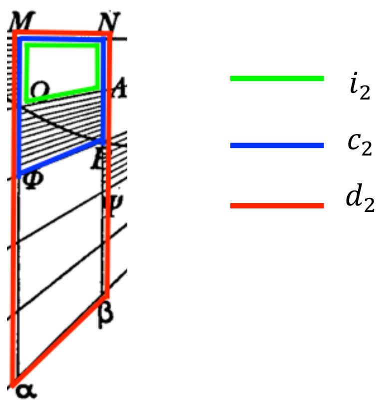
3.

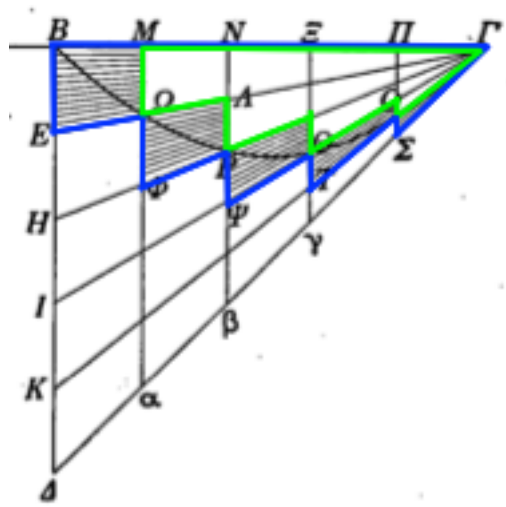
We introduceren ook de oppervlaktes

$$I_n = i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$
$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

Hiermee kun je de oppervlakte van het paraboolsegment $\mathrm{B\Theta\Gamma}$ inklemmen tussen een “Riemann bovensom” en een “Riemann ondersom”:

$$I_n < opp.\,\mathrm{B\Theta\Gamma} < C_n \qquad (3)$$





Opdracht 2
Leg uit dat het verschil $C_n - I_n = opp.\,\Delta\,\mathrm{B\Gamma E}$ en dat dit verschil dus willekeurig klein kan worden gemaakt door n groot te kiezen. Waar zie je dit terug in de tekst?

In de tekst brengt Archimedes via de balans i_n, c_n, d_n en $\varDelta_n$ met elkaar in verband.

Opdracht 3
Kijk of je de logica snapt van het hefboomprincipe op de tweede helft van pag. 332. Let op het verschil in ophangpunt: $\varDelta_2$ is bijvoorbeeld in balans met d_2 opgehangen in zijn zwaartepunt, terwijl i_2 in balans is met d_2 opgehangen in M. Waarom zorgt dit ervoor dat $i_2 < \varDelta_2$?

Het hefboomprincipe leidt dus tot

$$I_n < \varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots \varDelta_n < C_n \qquad (4)$$

Opdracht 4
Gebruik vergelijking (3) en (4) om te concluderen dat $opp.\,\mathrm{B\Theta\Gamma} = \varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots \varDelta_n$.
Hoe gebeurt dat in de tekst van Archimedes?
Gebruik nu vergelijking (1) en (2) om te concluderen dat $opp.\,\mathrm{B\Theta\Gamma} = \frac{4}{3}\,opp.\,\Delta\,\mathrm{B\Theta\Gamma}$.
Hiermee eindigt de tekst van Archimedes (propositie 17).

Opdracht 5
Welke Riemann ondersom en Riemann bovensom zouden wij tegenwoordig gebruiken om het paraboolsegment $\mathrm{B\Theta\Gamma}$ in te klemmen? Wat is het voordeel van de keuze van Archimedes als je kijkt naar $C_n - I_n$?

Quadratuur van de parabool
Nederlandse vertaling van E. Dijksterhuis
zoals verschenen in het tijdschrift Euclides

Resultaat:
1. opp. driehoek $B\Delta\Gamma$ = 4 opp. paraboolsegment $B\Theta\Gamma$
2. opp. paraboolsegment $B\Theta\Gamma$ = 4/3 opp. driehoek $B\Theta\Gamma$

Hierna volgt het bewijs van de hoofdstelling, dat de proposities 14—17 in beslag neemt. Ter wille van de overzichtelijkheid vatten we den inhoud der proposities 14 en 16 in de volgende redeneering samen:

3. Een segment van een orthotome, waarvan een koorde $B\Gamma$ loodrecht op den diameter staat (fig. 138), is langs de koorde aan de balans $A\Gamma$, die in zijn midden B ondersteund wordt, bevestigd.

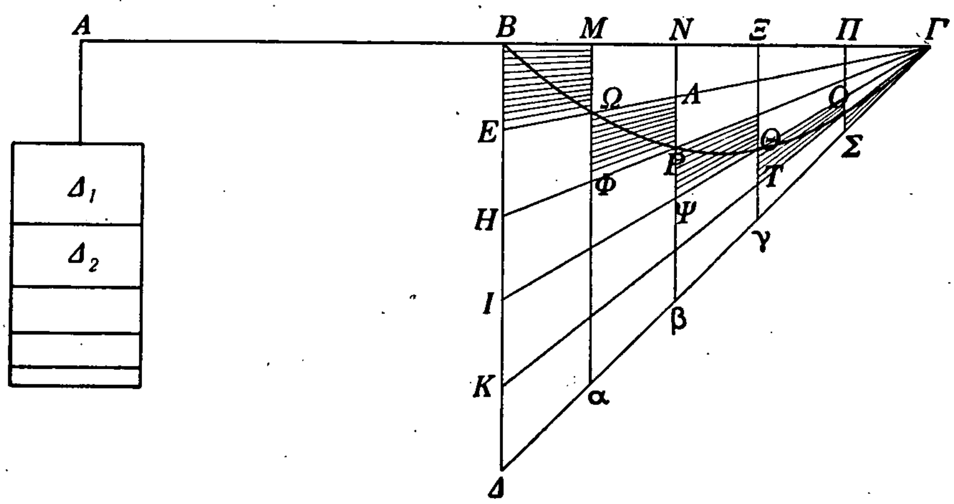


Fig. 138.

De raaklijn in Γ snijdt de lijn, die door B parallel met den diameter getrokken is, in Δ. $B\Delta$ is in een nader te bepalen aantal n gelijke deelen, BE, EH enz. verdeeld. De deelpunten zijn met Γ verbonden en door de punten, waarin deze verbindingslijnen de kromme ontmoeten, zijn rechten parallel aan den diameter getrokken, die $B\Gamma$ ontmoeten in de punten M, N......, $\Gamma\Delta$ in de punten α, β, γ...... De stukken BM, MN...... zijn nu ook onderling gelijk (zie Opmerking). Er ontstaan nu in de figuur verschillende trapezia, waarvan we drie verschillende soorten nader onderscheiden.

1. de trapezia $B\alpha$, $M\beta$, ..., die we deeltrapezia van $\triangle B\Gamma\Delta$ noemen; aan te duiden door d_1, d_2, ... d_n.

3.

2. de trapezia EM, ΦN, ..., die we omgeschreven trapezia van het segment noemen; aan te duiden door c_1, c_2, ... c_n; samen vormen ze de figuur C_n.

3. de trapezia ΩN, $P\Xi$, ..., die we ingeschreven trapezia van het segment noemen; aan te duiden door i_2, i_3, ... i_n; samen vormen ze de figuur I_n. Het is duidelijk, dat c_n en i_n driehoeken zijn met hoekpunt Γ.

De afleiding wordt gegeven met behulp van den verschilvorm der compressiemethode (III; 8,21); daartoe is noodig, dat het verschil $C_n—I_n$ door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid. Nu bestaat $C_n—I_n$ uit de trapezia EM, $\Phi\Lambda$, ... Hiervoor geldt

$$\Phi\Lambda = \Omega N \text{ enz.}$$

Immers uit $BE = EH$ volgt $M\Omega = \Omega\Phi$ en $N\Lambda = \Lambda P$ enz.

Het verschil $C_n—I_n$ is dus gelijk aan $\triangle \Gamma BE$ en is dus inderdaad door keuze van n kleiner te maken dan een willekeurig voorgeschreven grootheid.

Er moet nu bewezen worden, dat het segment $B\Theta\Gamma$ gelijk is aan $\frac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$. Dit geschiedt volgens het beginsel der compressiemethode door het bestaan van de ongelijkheid

$$I_n < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma < C_n \qquad (1)$$

aan te toonen. Is dit eenmaal bewezen, dan volgt het gestelde op de gebruikelijke wijze, omdat het segment dan met $\frac{1}{3} \triangle B\Delta\Gamma$ tusschen grenzen ligt, waarvan het verschil kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid.

Om de ongelijkheid (1) aan te toonen, worden (in Prop. 14) evenwichtsbetrekkingen tusschen de verschillende boven onderscheiden trapezia afgeleid. Wegens de stelling **Q.P.** 5 (III; 2,7) heeft men

$$(\alpha\Omega,\ \Omega M) = (\Gamma M,\ BM)$$

dus

$$(\alpha M,\ \Omega M) = (B\Gamma,\ BM) = (AB,\ BM)$$

Evenzoo

$$(\beta N,\ PN) = (AB,\ BN)$$

Nu is

$$(d_1,\ c_1) = (\Delta B + \alpha M,\ EB + \Omega M)$$

Daar echter

$$(\Delta B,\ EB) = (\alpha M,\ \Omega M) = (\Delta B + \alpha M,\ EB + \Omega M)$$
$$(AB,\ AH) = (X,\ N)$$

3.

is ook

$$(d_1, c_1) = (\varDelta B, EB) = (\alpha M, \Omega M)$$

Evenzoo ziet men in

$$(d_2, c_2) = (\alpha M, \Phi M) = (\beta N, PN) \text{ enz.}$$

Echter ook

$$(d_2, i_2) = (\alpha M, \Omega M) = (\beta N, \varLambda N) \text{ enz.}$$

Hieruit volgt

$$(d_1, c_1) = (d_2, i_2) = (\varDelta B, EB)$$

Daar nu uit

$$EB = EH \text{ enz.}$$

volgt

$$BM = MN \text{ enz.}$$

is

$$(\varDelta B, EB) = (\Gamma B, MB)$$

dus

$$(d_1, c_1) = (\Gamma B, MB) = (AB, BM)$$

Evenzoo

$$(d_2, c_2) = (d_3, i_3) = (AB, BN)$$

Hieruit blijkt:

c_1 in A maakt evenwicht met d_1 in M
c_2 in A maakt evenwicht met d_2 in N enz.

en ook:

i_2 in A maakt evenwicht met d_2 in M
i_3 in A maakt evenwicht met d_3 in N enz.

We denken nu in A opgehangen de grootheden $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots\ldots$, die opv. evenwicht maken met d_1, d_2, ... suis locis. Wegens de proposities 8, 10 en 12 geldt nu

$$c_k > \varDelta_k \quad (k = 1 \ldots . n)$$
$$i_k < \varDelta_k \quad (k = 2 \ldots . n)$$

Hieruit volgt

$$i_2 + \ldots . + i_n < \varDelta_1 + \ldots . + \varDelta_n < c_1 + \ldots . + c_n$$

of

$$I_n < \varDelta_1 + \ldots . \varDelta_n < C_n$$

Echter is wegens Prop. 6

$$3\,(\varDelta_1 + \ldots . + \varDelta_n) = \triangle B\varDelta\Gamma$$

3.

waaruit de verlangde ongelijkheid

$$I_n < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma < C_n \qquad (1)$$

volgt.

Het verdere verloop der redeneering (in Prop. 16) volgt nu automatisch.

Is het segment $B\Theta\Gamma$ niet gelijk aan $\frac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$, dan is het òf grooter òf kleiner.

Geval I. Zij

$$\text{segment } B\Theta\Gamma > \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

Bepaal nu n zoo, dat

$$C_n - I_n < \triangle BE\Gamma < \text{segment } B\Theta\Gamma - \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

dan is a fortiori

$$\text{segment } B\Theta\Gamma - I_n < \text{segment } B\Theta\Gamma - \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

dus

$$I_n > \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

in strijd met (1).

Geval II. Zij

$$\text{segment } B\Theta\Gamma < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

Bepaal nu n zoo, dat

$$C_n - I_n < \triangle BE\Gamma < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma - \text{segment } B\Theta\Gamma$$

dan is a fortiori

$$C_n - \text{segment } B\Theta\Gamma < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma - \text{segment } B\Theta\Gamma$$

dus

$$C_n < \tfrac{1}{3} . \triangle B\Delta\Gamma$$

in strijd met (1).

Opmerking: Het is blijkbaar essentieel voor het bewijs, dat uit de gelijkheid der stukken BE enz. van $B\Delta$ de gelijkheid der stukken BM, MN enz. van $B\Gamma$ volgt. Nu begint Archimedes in Prop. 14, waarin hij de ongelijkheid (1) afleidt, met de laatstgenoemde gelijkheid te onderstellen en hij past dan Prop. 14 toe in Prop. 16, waarin niet $B\Gamma$, maar $B\Delta$ in een aantal gelijke deelen verdeeld wordt, zonder dat hij bewijst, dat hierdoor ook de voorwaarde van Prop. 14 vervuld is. Deze kleine lacune wordt natuurlijk aangevuld door op te merken, dat volgens **Q.P.** 5 (III; 2, 7)

$$(\Gamma M, BM) = (\alpha\Omega, \Omega M) = (\Delta E, EB)$$

3.

zoodat BM het n^e deel van $B\Gamma$ blijkt te zijn, wanneer BE het van $B\Delta$ is. Zoo voortgaande, ziet men in: $BM = MN$ enz.

In Prop. 15 wordt de ongelijkheid (1) bewezen voor het geval, dat de koorde van het segment niet loodrecht op den diameter staat. Het wordt nu zoo aan de balans bevestigd, dat de diameter verticaal staat, het eene uiteinde van de koorde in Γ ligt en het andere in de verticaal van B. De redeneering wordt er nauwelijks anders door. Men moet zich alleen beroepen op de Prop. 7, 9, 11 en 13 inplaats van op 6, 8, 10 en 12.

In Prop. 17 wordt ten slotte de stelling uitgesproken in den vorm, waarin Archimedes haar pleegt toe te passen:

Propositie 17.

Dit bewezen zijnde, is het duidelijk, dat ieder segment, dat omvat wordt door een rechte en een orthotome een derde grooter is dan de driehoek, die dezelfde basis heeft als het segment en gelijke hoogte.

Hierin (fig. 139) beduidt „hoogte" den afstand tot de koorde $B\Gamma$ van het punt Θ (top), waar de raaklijn parallel is met de koorde. Blijkbaar is

$$B\Delta = 2 . ZE = 4 . Z\Theta$$

dus

$$\text{segment } B\Theta\Gamma = \tfrac{1}{3} \triangle B\Delta\Gamma = \tfrac{4}{3} \triangle B\Theta\Gamma$$

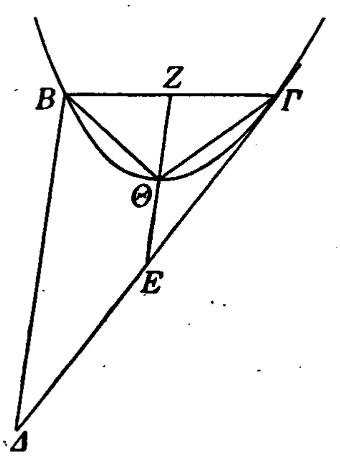


Fig. 139.