Het gemak van logaritmen

Steven Wepster en Jan Hogendijk

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

31 januari 2019

Outline

Workshop

Waarom is $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log x$

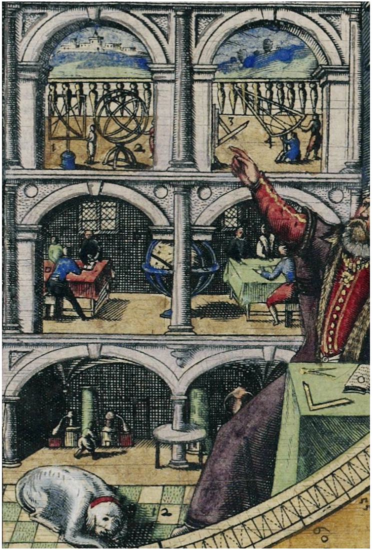
Astronomische berekeningen

Tycho Brahes grote kwadrant

- Eind 16e eeuw: Veel rekenwerk voor astronomen
- Grote getallen vermenigvuldigen en delen
- Tijdrovend en foutgevoelig
- Een typisch voorbeeld van een berekening is

$$\cos \alpha = \frac{\cos 38^\circ - \cos 51^\circ \cos 67^\circ}{\sin 51^\circ \sin 67^\circ}$$

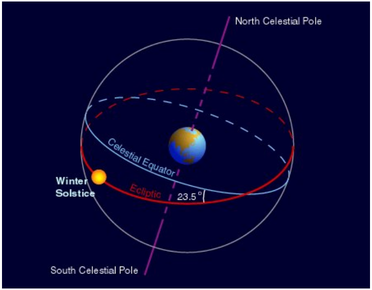
Concreet voorbeeld



Tycho Brahe, detail

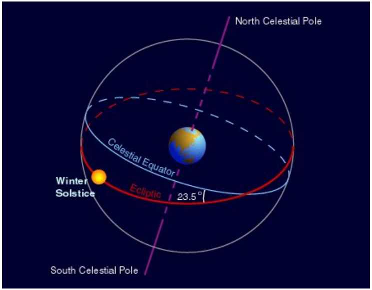
- Tycho meet elke dag zeer nauwkeurig de hoogte van de zon wanneer die in de meridiaan staat.
- Hij wil met deze informatie uitrekenen waar de zon elke dag staat in zijn jaarlijkse baan om de aarde
- Voor deze routineklus gaan we hem helpen door een tabel te maken

Een paar astronomische begrippen



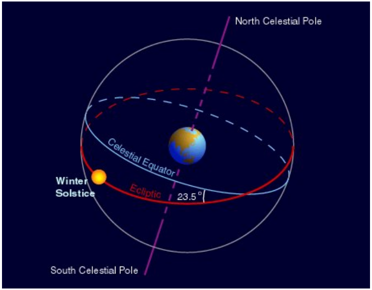
- Hemelsfeer

Een paar astronomische begrippen



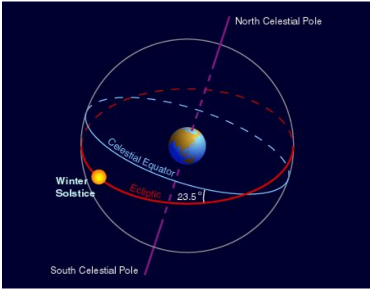
- Hemelsfeer
- Equator

Een paar astronomische begrippen



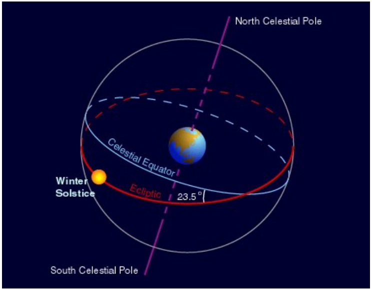
- Hemelsfeer
- Equator
- Ecliptica, hoek $\varepsilon \approx 23\frac{1}{2}^\circ$

Een paar astronomische begrippen



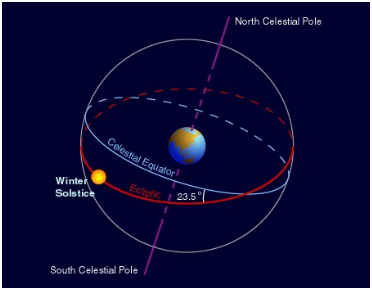
- Hemelsfeer
- Equator
- Ecliptica, hoek $\varepsilon \approx 23\frac{1}{2}^\circ$
- Declinatie δ:
  boog $\perp$ Equator naar de zon

Een paar astronomische begrippen



- Hemelsfeer
- Equator
- Ecliptica, hoek $\varepsilon \approx 23\frac{1}{2}^\circ$
- Declinatie δ:
  boog $\perp$ Equator naar de zon
- Lengte λ:
  boog langs Ecliptica tot zon

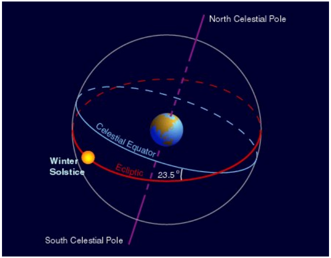
Een paar astronomische begrippen

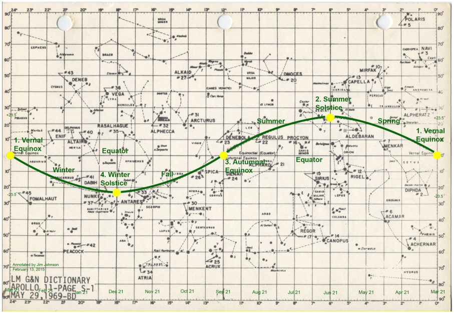


- Hemelsfeer
- Equator
- Ecliptica, hoek $\varepsilon \approx 23\frac{1}{2}^\circ$
- Declinatie δ:
  boog $\perp$ Equator naar de zon
- Lengte λ:
  boog langs Ecliptica tot zon

Tycho kan δ makkelijk uitrekenen: $\delta = \text{breedte} + \text{hoogte} - 90^\circ$, maar hij wil λ weten.

Verband met sterrenbeelden





	λ		λ		λ		δ
lente	0	Ram	30	Stier	60	Tweeling	$0 \dots \varepsilon$
zomer	90	Kreeft	120	Leeuw	150	Maagd	$\varepsilon \dots 0$
herfst	180	Weegschaal	210	Schorpioen	240	Boogsch	$0 \dots -\varepsilon$
winter	270	Steenbok	300	Waterman	330	Vissen	$-\varepsilon \dots 0$

Tabel maken

- Wij gaan een hulptabel maken voor λ als functie van δ.

Tabel maken

- Wij gaan een hulptabel maken voor λ als functie van δ.
- Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}, \text{ waarin } \varepsilon = 23\tfrac{1}{2}^\circ.$$

Tabel maken

- Wij gaan een hulptabel maken voor λ als functie van δ.
- Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}, \text{ waarin } \varepsilon = 23\tfrac{1}{2}^\circ.$$

- We doen het op drie manieren:
  1. met sinustabel en handmatig delen
  2. met prostaphaerese (een voorloper van log)
  3. met logaritmen

  Uiteraard zonder rekenmachine!

Tabel maken

- Wij gaan een hulptabel maken voor λ als functie van δ.
- Uit boldriehoeken is bekend:

$$\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}, \text{ waarin } \varepsilon = 23\tfrac{1}{2}^\circ.$$

- We doen het op drie manieren:
  1. met sinustabel en handmatig delen
  2. met prostaphaerese (een voorloper van log)
  3. met logaritmen

  Uiteraard zonder rekenmachine!
- We verdelen het werk: iedereen zijn eigen δ en we verzamelen de resultaten.

Methode 1: handmatig

1. Zoek in de sinustabel:

   $\sin\delta$ voor je eigen δ, *en*

   $\sin\varepsilon$ voor $\varepsilon = 23\frac{1}{2}^\circ$.

2. Bereken $\boxed{\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}}$ met een staartdeling
3. Zoek in de sinustabel welke waarde van λ hierbij hoort.
4. Geef het resultaat door aan de centrale tabellenmaker.

Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- Principe: gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\Big(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)\Big).$$

Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- Principe: gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\Big(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)\Big).$$

- Maar! wij moeten vermenigvuldigen met $\frac{1}{\sin \varepsilon} \approx 2.5$.

Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- Principe: gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\Big(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)\Big).$$

- Maar! wij moeten vermenigvuldigen met $\frac{1}{\sin \varepsilon} \approx 2.5$.
- Truc: we kiezen p zo dat $\sin p = \frac{1}{10 \sin \varepsilon}$, en $q = \delta$, en we berekenen

$$\boxed{\sin \lambda = 5\Big(\sin(90^\circ - p + \delta) - \sin(90^\circ - p - \delta)\Big)}$$

Methode 2: prostaphaerese

werd korte tijd gebruikt vóór de logaritmes

- Principe: gonioformule

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\Big(\sin(90^\circ - p + q) - \sin(90^\circ - p - q)\Big).$$

- Maar! wij moeten vermenigvuldigen met $\frac{1}{\sin \varepsilon} \approx 2.5$.
- Truc: we kiezen p zo dat $\sin p = \frac{1}{10 \sin \varepsilon}$, en $q = \delta$, en we berekenen

$$\boxed{\sin \lambda = 5\Big(\sin(90^\circ - p + \delta) - \sin(90^\circ - p - \delta)\Big)}$$

- Dus procedure is:
  1. Eerst gezamenlijk $90^\circ - p$ vinden,
  2. daarna ieder eigen λ uitrekenen met eigen δ.

p vinden

- Met $\varepsilon = 23°30'$ in sinustabel zoeken: $\sin\varepsilon = 0{,}3987$.
- Staartdeling uitvoeren:

$$
\begin{array}{r@{\,}r}
 & 2508 \\ \cline{2-2}
3987 \big) & 10000000 \\
 & 7974000 \\ \cline{2-2}
 & 2026000 \\
 & 1993500 \\ \cline{2-2}
 & 32500 \\
 & 31896 \\ \cline{2-2}
 & 604
\end{array}
$$

- Zoek 0,2508 in tabel, dit staat tussen $14°30'$ en $14°36'$
- Voor ons gemak nemen we vandaag $\boxed{90° - p = 75°30'}$.

Methode 3: logaritmen

- We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus $f(x) = 10 + \log \sin x$.

Methode 3: logaritmen

- We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus $f(x) = 10 + \log \sin x$.
- We willen eigenlijk uitrekenen:

$$\log \sin \lambda = \log \sin \delta - \log \sin \varepsilon.$$

Methode 3: logaritmen

- We gebruiken een log-sinustabel, maar om negatieve getallen te voorkomen is bij elke tabelwaarde 10 opgeteld. In de tabel staat dus $f(x) = 10 + \log \sin x$.
- We willen eigenlijk uitrekenen:

$$\log \sin \lambda = \log \sin \delta - \log \sin \varepsilon.$$

- Met de tabel wordt dat:

$$\boxed{f(\lambda) = 10 + f(\delta) - f(\varepsilon)}$$

Gebruik dit om je λ te vinden.

Conclusie van deel 1

- Logaritmen zijn uitgevonden om vermenigvuldigen/delen te kunnen vervangen door optellen/aftrekken.
- Je hebt aan den lijve ondervonden hoeveel sneller en makkelijker het rekenwerk daardoor wordt.

Outline

Workshop

Waarom is $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log x$

De basisgedachte van log

- Oorspronkelijk doel van logaritmen is: $\log(ab) = \log a + \log b$

De basisgedachte van log

- Oorspronkelijk doel van logaritmen is: $\log(ab) = \log a + \log b$
- Maar dan is ook: $\log a^k = k \log a$

De basisgedachte van log

- Oorspronkelijk doel van logaritmen is: $\log(ab) = \log a + \log b$
- Maar dan is ook: $\log a^k = k \log a$
- Stel $a > 1$ en noem $\log a = L$
  Twee rijtjes:

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & -3L & -2L & -L & 0 & L & 2L & 3L & 4L & \dots \\ \dots & a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & \dots \end{array}$$

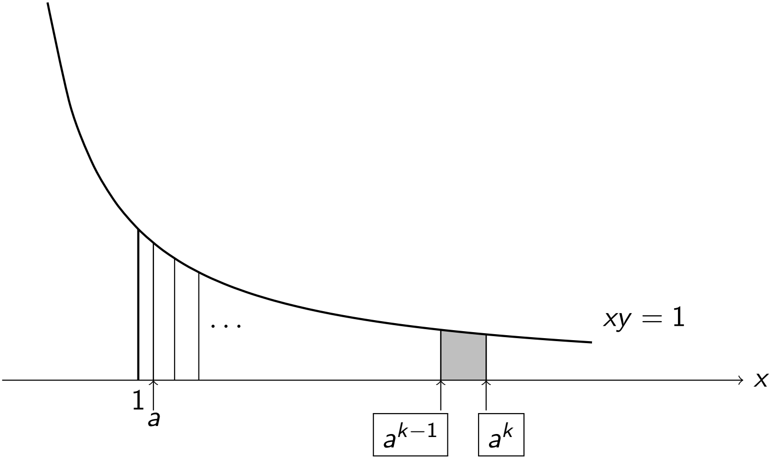
De basisgedachte van log

- Oorspronkelijk doel van logaritmen is: $\log(ab) = \log a + \log b$
- Maar dan is ook: $\log a^k = k \log a$
- Stel $a > 1$ en noem $\log a = L$
  Twee rijtjes:

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & -3L & -2L & -L & 0 & L & 2L & 3L & 4L & \dots \\ \dots & a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & \dots \end{array}$$

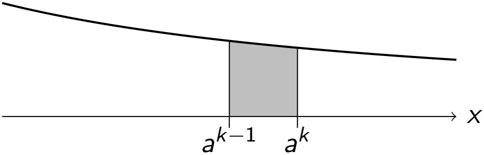
- We gaan het onderste rijtje uitzetten langs de x-as

Oppervlak onder hyperbool verdelen



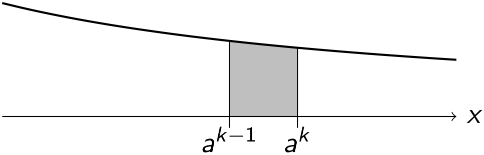
Laten we eens de opp van één gebiedje uitrekenen.

Oppervlakte van het k-de gebiedje



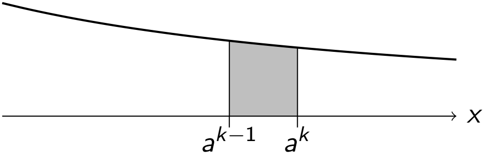
- Verwaarloos de kromming aan de bovenzijde

Oppervlakte van het k-de gebiedje



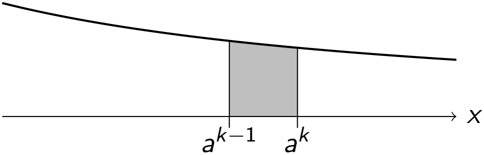
- Verwaarloos de kromming aan de bovenzijde
- breedte: $a^k - a^{k-1}$

Oppervlakte van het k-de gebiedje



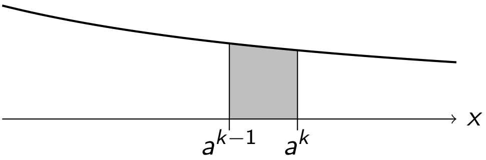
- Verwaarloos de kromming aan de bovenzijde
- breedte: $a^k - a^{k-1}$
- hoogte gemiddeld: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$

Oppervlakte van het k-de gebiedje



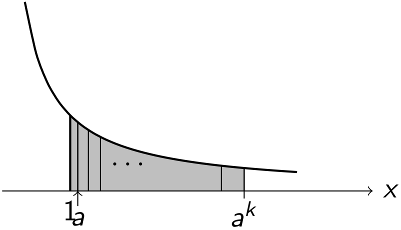
- Verwaarloos de kromming aan de bovenzijde
- breedte: $a^k - a^{k-1}$
- hoogte gemiddeld: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$
- Oppervlakte: $\frac{a^2-1}{2a}$

Oppervlakte van het k-de gebiedje



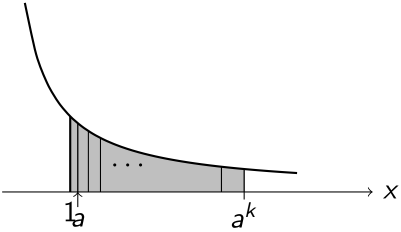
- Verwaarloos de kromming aan de bovenzijde
- breedte: $a^k - a^{k-1}$
- hoogte gemiddeld: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$
- Oppervlakte: $\frac{a^2-1}{2a}$ **hangt niet van k af!**

De som van even grote gebiedjes



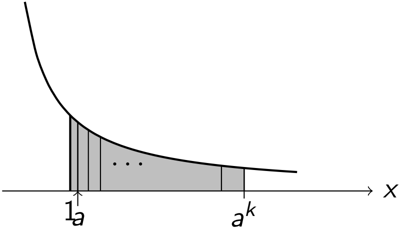
- Alle gebiedjes zijn even groot

De som van even grote gebiedjes



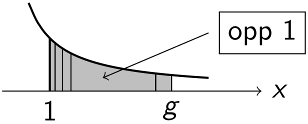
- Alle gebiedjes zijn even groot
- bij het rijtje $1, a, a^2, \ldots$ neemt de oppervlakte dus steeds met dezelfde hoeveelheid toe

De som van even grote gebiedjes



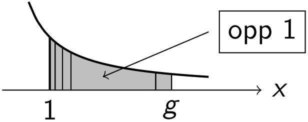
- Alle gebiedjes zijn even groot
- bij het rijtje 1, a, a^2, ... neemt de oppervlakte dus steeds met dezelfde hoeveelheid toe
- DUS de oppervlakte is een logaritme.

Welk grondtal?



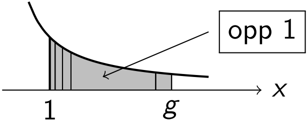
- Herinner: het grondtal g is precies dat getal waarvan de logaritme 1 is.

Welk grondtal?



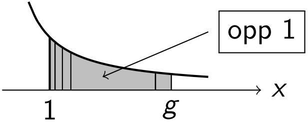
- Herinner: het grondtal g is precies dat getal waarvan de logaritme 1 is.
- We zoeken dus g op de x-as zodat de oppervlakte onder de kromme tussen $x = 1$ en $x = g$ precies 1 is.

Welk grondtal?



- Herinner: het grondtal g is precies dat getal waarvan de logaritme 1 is.
- We zoeken dus g op de x-as zodat de oppervlakte onder de kromme tussen $x = 1$ en $x = g$ precies 1 is.
- We kiezen bijv. $a = 1.001$ en zoeken daarbij de grootst mogelijke k zodat $\frac{a^2-1}{2a}k \leq 1$

Welk grondtal?



- Herinner: het grondtal g is precies dat getal waarvan de logaritme 1 is.
- We zoeken dus g op de x-as zodat de oppervlakte onder de kromme tussen $x = 1$ en $x = g$ precies 1 is.
- We kiezen bijv. $a = 1.001$ en zoeken daarbij de grootst mogelijke k zodat $\frac{a^2-1}{2a}k \leq 1$
- Dit geeft: $k = \left\lfloor \frac{2a}{a^2-1} \right\rfloor$ en $g \approx a^k$

Voorbeeld

E10

	A	B	C	D
1	a	k	g_	g^
2	1.1	10	2.59374246	2.85311671
3	1.01	100	2.70481383	2.73186197
4	1.001	1000	2.71692393	2.71964086
5	1.0001	10000	2.71814593	2.71841774
6	1.00001	100000	2.71826824	2.71829542
7	1.000001	1000000	2.71828047	2.71828319
8	1.0000001	10000000	2.71828169	2.71828197
9				

Noot: toen dit in ca 1650 gedaan werd, kende nog niemand het getal e of de exponentiele functie e^x.

Conclusie

- Logaritmen zijn uitgevonden om vermenigvuldigen/delen te kunnen vervangen door optellen/aftrekken.
- Logaritmen veranderen
  een meetkundig rijtje $1, a, a^2, \ldots, a^k$
  in een rekenkundig rijtje $0, L, 2L, \ldots, kL$.
- De oppervlakte onder $y = \frac{1}{x}$ gedraagt zich precies zo: als je een meetkundig rijtje uitzet op de x-as, groeit de oppervlakte als een rekenkundig rijtje.