Sinustabel

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
0°	0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854
5°	0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719
10°	1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571
15°	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404
20°	3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210
25°	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985
30°	5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721
35°	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414
40°	6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059

Sinustabel

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
45°	7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181
46°	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302
47°	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420
48°	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536
49°	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649
50°	7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760
51°	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869
52°	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976
53°	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080
54°	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181
55°	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281
56°	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377
57°	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471
58°	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563
59°	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652
60°	8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056
65°	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128
66°	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198
67°	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265
68°	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330
69°	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391
70°	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655
75°	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699
76°	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740
77°	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778
78°	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813
79°	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845
80°	9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874
81°	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900
82°	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923
83°	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943
84°	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960
85°	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974
86°	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985
87°	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998
89°	9998	9999	9999	9999	9999	10000	10000	10000	10000	10000

Log Sinus Tabel $f(x) = 10 + {}^{10}\log \sin x$

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$
$\mathbf{0}^o$	$--$	7,2419	5429	7190	8439	9408	$\overline{0}200$	$\overline{0}870$	$\overline{1}450$	$\overline{1}961$
$\mathbf{1}^o$	8,2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206
$\mathbf{2}^o$	8,5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041
$\mathbf{3}^o$	8,7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326
$\mathbf{4}^o$	8,8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315
$\mathbf{5}^o$	8,9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	$\overline{0}046$	$\overline{0}120$
$\mathbf{6}^o$	9,0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797
$\mathbf{7}^o$	9,0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381
$\mathbf{8}^o$	9,1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895
$\mathbf{9}^o$	9,1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353
$\mathbf{10}^o$	9,2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767
$\mathbf{11}^o$	9,2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143
$\mathbf{12}^o$	9,3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488
$\mathbf{13}^o$	9,3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806
$\mathbf{14}^o$	9,3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102
$\mathbf{15}^o$	9,4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377
$\mathbf{16}^o$	9,4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634
$\mathbf{17}^o$	9,4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876
$\mathbf{18}^o$	9,4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104
$\mathbf{19}^o$	9,5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320
$\mathbf{20}^o$	9,5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523
$\mathbf{21}^o$	9,5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717
$\mathbf{22}^o$	9,5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901
$\mathbf{23}^o$	9,5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076
$\mathbf{24}^o$	9,6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243
$\mathbf{25}^o$	9,6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403
$\mathbf{26}^o$	9,6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556
$\mathbf{27}^o$	9,6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702
$\mathbf{28}^o$	9,6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842
$\mathbf{29}^o$	9,6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977
$\mathbf{30}^o$	9,6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106
$\mathbf{31}^o$	9,7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230
$\mathbf{32}^o$	9,7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349
$\mathbf{33}^o$	9,7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464
$\mathbf{34}^o$	9,7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575
$\mathbf{35}^o$	9,7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682
$\mathbf{36}^o$	9,7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785
$\mathbf{37}^o$	9,7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884
$\mathbf{38}^o$	9,7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979
$\mathbf{39}^o$	9,7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072
$\mathbf{40}^o$	9,8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161
$\mathbf{41}^o$	9,8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247
$\mathbf{42}^o$	9,8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330
$\mathbf{43}^o$	9,8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410
$\mathbf{44}^o$	9,8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487

Log Sinus Tabel $f(x) = 10 + {}^{10}\log \sin x$

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
45°	9,8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562
46°	9,8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634
47°	9,8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704
48°	9,8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771
49°	9,8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836
50°	9,8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899
51°	9,8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959
52°	9,8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018
53°	9,9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074
54°	9,9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128
55°	9,9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181
56°	9,9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231
57°	9,9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279
58°	9,9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326
59°	9,9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371
60°	9,9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414
61°	9,9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455
62°	9,9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495
63°	9,9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533
64°	9,9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569
65°	9,9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604
66°	9,9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637
67°	9,9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669
68°	9,9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699
69°	9,9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727
70°	9,9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754
71°	9,9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780
72°	9,9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804
73°	9,9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826
74°	9,9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847
75°	9,9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867
76°	9,9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885
77°	9,9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902
78°	9,9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918
79°	9,9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932
80°	9,9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945
81°	9,9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956
82°	9,9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967
83°	9,9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975
84°	9,9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983
85°	9,9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989
86°	9,9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994
87°	9,9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997
88°	9,9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999
89°	9,9999	9999	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$	$\overline{0}000$

LOGARITMEN: HOE EN WAAROM

■ door Steven Wepster

Rond het jaar 1600 moesten astronomen, zoals Tycho Brahe en Johannes Kepler, op routinebasis ingewikkelde berekeningen uitvoeren. Zo moesten ze bijvoorbeeld de hoek α berekenen waarbij geldt dat

$$\cos\alpha = \frac{\cos 38^\circ - \cos 51^\circ \cos 67^\circ}{\sin 51^\circ \sin 67^\circ}.$$

Rekenmachines bestonden nog niet en als het woord 'computer' werd gebruikt, dan bedoelde men een echte persoon van vlees en bloed die in een kamer met behulp van tabellenboeken en een ganzenveer berekeningen zat te maken. Zo waren er tabellenboeken met de (co)sinus en tangens van verschillende hoeken in acht of meer decimalen.

Optellen en aftrekken van getallen met zoveel cijfers was wel te doen, maar vermenigvuldigen was erg veel werk met navenant veel kans op fouten. Delen was nog erger. Dus zo'n berekening als hierboven was geen pretje. Om het rekenwerk sneller, eenvoudiger en met minder fouten uit te voeren, ging men op zoek naar manieren om het vermenigvuldigen en delen te vermijden. Zou het mogelijk zijn om ze te vervangen door optellen en aftrekken? Dat was immers veel makkelijker.

Eerst heeft men toen een methode gebruikt die wordt aangeduid als *prostaphaerese* (de naam is een samentrekking van de Griekse woorden voor optellen en aftrekken). Hierbij wordt gebruik gemaakt van de som- en verschilformules van de goniometrie. Met die regels kun je afleiden dat

$$\cos a \cdot \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),$$

en daarmee kun je dan het vermenigvuldigen van twee cosinussen vervangen door de som van twee cosinussen. Dat hielp, maar het kon nog beter.

Nicolas Chuquet in Frankrijk en Michael Stifel in Duitsland hadden aan het begin van de zestiende eeuw al ingezien dat er iets merkwaardigs aan de hand is met de volgende twee rijtjes:

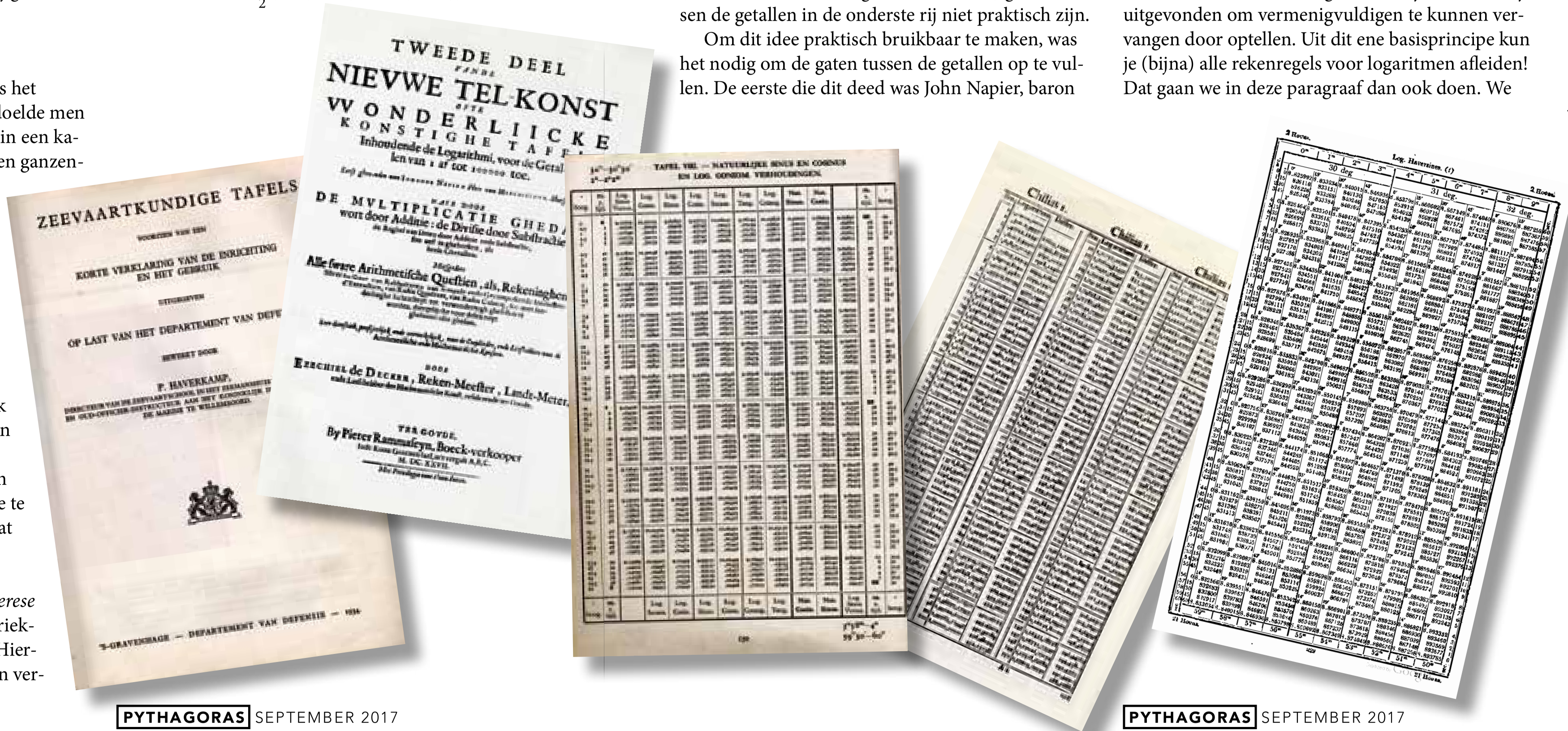
$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \ldots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \ldots \end{array}$$

Het bijzondere is: optellen van twee getallen in het bovenste rijtje komt overeen met vermenigvuldigen van twee getallen in het onderste rijtje. Bijvoorbeeld: $2 + 3 = 5$, en dit komt overeen met $4 \cdot 8 = 32$. Hier zie je dus dat het inderdaad mogelijk is om vermenigvuldigen/delen om te zetten in optellen/aftrekken, maar erg bruikbaar is het niet omdat de (naar rechts toe steeds groter wordende) gaten tussen de getallen in de onderste rij niet praktisch zijn.

Om dit idee praktisch bruikbaar te maken, was het nodig om de gaten tussen de getallen op te vullen. De eerste die dit deed was John Napier, baron van Murchiston (Schotland). In 1614 publiceerde hij het boek *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Beschrijving van de wonderlijke regel van logaritmen*). Het boek bevatte de eerste logaritmetabellen waar Napier twintig jaar aan had gewerkt. De logaritmen van Napier werkten wat minder handig dan de logaritmen van tegenwoordig, maar het idee is hetzelfde.

Napiers tabellen kregen direct veel aandacht. Henry Briggs, hoogleraar in Oxford, reisde naar Napier en samen bedachten ze het systeem van logaritmen met grondtal 10 dat nu nog gebruikt en onderwezen wordt. Binnen enkele jaren verschenen er her en der verschillende publicaties met logaritmetabellen; zelden is een wiskundig idee zo snel verspreid en ingeburgerd. Daaraan kun je zien dat er een grote behoefte aan was.

DE REKENREGELS Logaritmen zijn dus letterlijk uitgevonden om vermenigvuldigen te kunnen vervangen door optellen. Uit dit ene basisprincipe kun je (bijna) alle rekenregels voor logaritmen afleiden! Dat gaan we in deze paragraaf dan ook doen. We



moeten wel één belangrijk voorbehoud maken: we nemen alleen de logaritme van *positieve* getallen. Er is wel een manier om ook van negatieve getallen de logaritme te definiëren, maar dan zit je al snel middenin de complexe getallen. Dit is pas ruim een eeuw na Napier gebeurd en we zullen het hier niet behandelen.

(Basis)regel 0: Voor positieve getallen a en b geldt: $\log(ab) = \log a + \log b$.
Dit is niets anders dan de vertaling van bovenstaand basisprincipe in een basisregel en fungeert als ons startpunt voor de overige regels.

Regel 1: $\log 1 = 0$.
Immers: neem $a = b = 1$ in de basisregel, dan krijg je $\log 1 = \log 1 + \log 1 = 2 \log 1$. Nu kun je aan beide kanten $\log 1$ aftrekken en dan blijft $\log 1 = 0$ over.

Regel 2: $\log a^2 = 2 \log a$.
Dit gaat op dezelfde manier: vul in de basisregel voor b maar a in en dan staat het er eigenlijk al.

Regel 3: $\log(1/a) = -\log a$.
Als we $b = 1/a$ nemen, dan geeft de basisregel ons $\log 1 = \log a + \log(1/a)$. Omdat we al weten dat $\log 1 = 0$, volgt hieruit direct dat $\log(1/a) = -\log a$.

Regel 4: $\log a^n = n \log a$ voor elk geheel getal n.
Voor positieve n is dit een uitbreiding van regel 2, of anders het resultaat van regel 0 op de volgende manier: $\log a^n = \log(a \cdot a^{n-1}) = \log a + \log a^{n-1} = \ldots = n \log a$, waarbij we op de plaats van de puntjes nog $n - 1$ keer dezelfde regel 0 toepassen. Voor *negatieve* n werkt het hetzelfde, alleen hebben we er ook regel 3 bij nodig. Tot slot is de regel ook waar voor $n = 0$, want $\log a^0 = \log 1 = 0 = 0 \cdot \log a$.

Regel 5: regel 4 is ook nog geldig als de exponent n een breuk is in plaats van een geheel getal.
Hiervoor bedenken we allereerst dat $\log a = \log(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}) = 2 \log \sqrt{a}$. Aangezien $\sqrt{a} = a^{1/2}$, krijgen we dat $\log a^{1/2} = \frac{1}{2} \log a$. Dit kunnen we weer uitbreiden tot andere wortels: $\log a^{1/q} = \frac{1}{q} \log a$. Maar dan is ook $\log a^{p/q} = \log (a^p)^{1/q} = \frac{1}{q} \log a^p = \frac{p}{q} \log a$, waarbij we regel 4 gebruikt hebben. Hierbij mag p een negatief geheel getal zijn.

Regel 6: er geldt ook dat $\log a^c = c \log a$ als c een positief *irrationaal* getal is (zoals $\sqrt{2}$).
Hoewel dit goed 'aanvoelt' op grond van de resultaten die we al hebben afgeleid, kunnen we het hier niet helemaal rechtvaardigen, omdat we daarvoor eerst beter zouden moeten begrijpen wat we eigenlijk bedoelen met een uitdrukking zoals $3^{\sqrt{2}}$. Dat voert te ver van het hoofddoel van dit artikel af.

HET GRONDTAL Waarschijnlijk ben je bij logaritmen ook het woord *grondtal* tegengekomen. Het grondtal g is het getal waarvoor geldt dat $\log g = 1$. Bij Chuquet en Stifel zou het grondtal 2 zijn geweest: onder de 1 in het bovenste rijtje staat een 2. Als ze daar een ander getal hadden gezet, bijvoorbeeld 3 of 10 of 1,0000001, dan was daarmee automatisch de rest van het onderste rijtje ook veranderd. Zodra je het grondtal van je logaritme weet, of als je zelf een grondtal kiest, dan kun je in principe een logaritmetabel opstellen voor zoveel waarden als je maar wilt.

Kies je bijvoorbeeld grondtal 10, dan vind je

$$\log 10 = 1$$
$$\log \sqrt{10} = \log 3{,}162277\ldots = 0{,}5$$
$$\log \sqrt[3]{10} = \log 2{,}154434\ldots = 0{,}33333\ldots$$
$$\log 10^{1/100} = \log 1{,}023292\ldots = 0{,}01$$
$$\log 10^{27/100} = \log 1{,}862087\ldots = 0{,}27$$

en zo verder, allemaal met behulp van de rekenregels uit de vorige paragraaf. De gehele logaritmefunctie ligt vast als het grondtal gekozen is. In de notatie brengt men dit tot uitdrukking door het grondtal linksboven (of in Engels- of Duitstalige boeken rechtsonder) te schrijven, zoals ${}^{10}\log x$ (respectievelijk $\log_{10} x$).

Tussen logaritmen met verschillende grondtallen bestaat een mooi verband. Stel dat je twee logaritmen hebt: ${}^{p}\log x$ (met grondtal p) en ${}^{q}\log x$ (met grondtal q). Bekijk de functie

$$f(x) = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log q}.$$

Merk op dat de noemer in de breuk een constante is! Met gebruik van de rekenregels kun je zelf nagaan dat geldt $f(xy) = f(x) + f(y)$ en bovendien dat $f(q) = 1$. Oftewel, de functie f is een logaritme met grondtal q, zodat we dus kunnen schrijven:

$${}^{q}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log q}.$$

Met deze formule kun je overstappen van grondtal p op grondtal q, en je kunt er bovendien aan aflezen dat *alle logaritmefuncties met verschillende grondtallen steeds een constante factor van elkaar verschillen*. In dit voorbeeld is de constante factor ${}^{p}\log q$.

Een bijzonder grondtal is e = 2,7182818284… De logaritme met dit grondtal duikt op een 'natuurlijke' manier op in de wiskunde en heet daarom ook *natuurlijke logaritme*, notatie $\ln x = {}^{e}\log x$.

Briggs had destijds een goede reden om te kiezen voor het grondtal 10. We werken namelijk dagelijks met een tientallig talstelsel. Met grondtal 10 kun je schrijven

$$\log 57.721 =$$
$$\log(100.000 \cdot 0{,}57721) =$$
$$5 + \log 0{,}57721$$

en dat betekent dat je met één logaritmetabel voor bijvoorbeeld alle gehele getallen tussen 1 en 1.000.000, gelijk ook de logaritme van een heleboel kommagetallen kunt opzoeken.

HOE WERKT DAT DAN MET GONIO?

Natuurlijk waren de astronomen dolblij met de nieuwe techniek van logaritme. Of toch niet? Zoals we in het begin al zagen, hadden ze sinus en cosinus in hun tabellen staan. Het zou wat omslachtig zijn om eerst in een tabel $\sin 51° = 0{,}777146$ op te zoeken en daarna in een andere tabel $\log 0{,}777146 = -0{,}109497$. Daarnaast zou het ook nog wel vaak kunnen gebeuren dat ze bijvoorbeeld cos 123° nodig hadden: dat is een negatief getal en daarvan kun je de logaritme niet nemen.

Het eerste probleem was eenvoudig op te lossen. Er circuleerden al snel tabellen waarin je rechtstreeks $\log(\sin 51°)$ kon opzoeken. Een aparte tabel voor 'log cos' was niet nodig, want zoals je waarschijnlijk wel weet, geldt $\cos x = \sin(90° - x)$. Daarom stonden aan de linkerkant van de tabel oplopende hoeken van 0° tot 90° en aan de rechterkant aflopende hoeken van 90° tot 0°, zodat je niet steeds zelf $90 - x$ hoefde uit te rekenen.

Er waren nog meer slimmigheidjes. We zagen zojuist dat $\log(\sin 51°) = -0{,}109497$. In de tabel stond dan echter niet dat mingetal maar 9,890503: dat is precies 10 meer. Daardoor hoefde je niet op de mintekens te letten en kon je gewoon altijd blijven optellen. Aan het eind van je berekening deed je dan weer 'min 10' om goed uit te komen.

En dan het andere probleem, van cos 123° wat een negatief getal oplevert waarvan je de logaritme niet kunt nemen. Dat was iets lastiger te hanteren, en heeft ertoe geleid dat men op een gegeven moment nieuwe goniofuncties, zoals de *haversinus*, heeft ingevoerd. Die heeft niks met je ontbijt te maken, het is een samentrekking van de woorden *halve verkeerde sinus*, notatie $\operatorname{hav} x = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$. Deze functie is nooit negatief, en alleen 0 in bijzondere gevallen zoals $x = 0$, dus hiervan kun je goed logaritmetabellen maken. Het was dan wel nodig om de astronomische formules te herschrijven zodat ze van deze functies gebruikmaakten.

ACHTERHAALD De logaritmetabellen van Briggs met grondtal 10 voorzagen in een enorme behoefte en werden snel populair. Tot in de tweede helft van de twintigste eeuw werden zulke tabellen dagelijks gebruikt door ingenieurs, totdat de komst van goedkope rekenmachines ze overbodig maakte. Tegenwoordig kun je met zo'n machine sneller de astronomische berekening uit het begin van dit artikel uitvoeren, dan dat je ook maar één getal kunt opzoeken in een tabellenboek. De logaritmetabellen zijn al bijna een halve eeuw achterhaald. Sterker nog: het grondtal 10 kan eigenlijk geen aanspraak meer maken op zijn bevoorrechte positie, die nu veel meer toekomt aan het getal e. ■