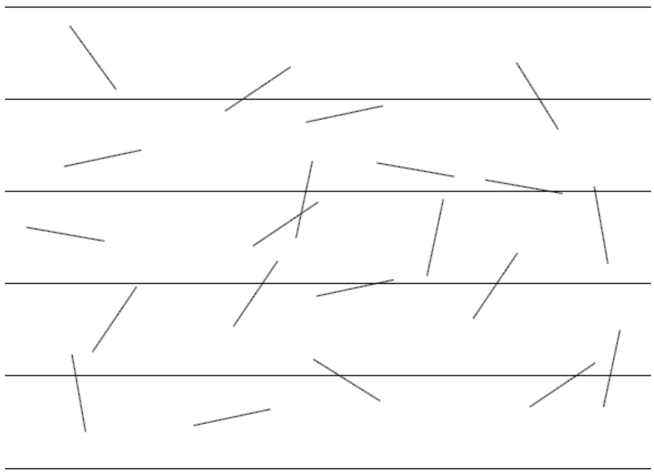
De “naalden” (of lucifers, stokken…) van BUFFON

Werp een stokje en werk mee aan de bepaling van π.



- Als de stok een lijn snijdt, druk op de **groene knop**.
- Als de stok geen lijn snijdt, druk op de **rode knop**.

Georges Louis Leclerc, bijgenaamd Comte de Buffon in 1777:

$$\boxed{\text{de kans dat de stok een lijn snijdt is } \frac{2\ell}{\pi d}.}$$

Hierbij is d de afstand tussen de lijnen en ℓ de lengte van de stok.

Op de volgende posters: **twee bewijzen**

- Met een integraal
- Door de naald om te vormen tot een cirkel

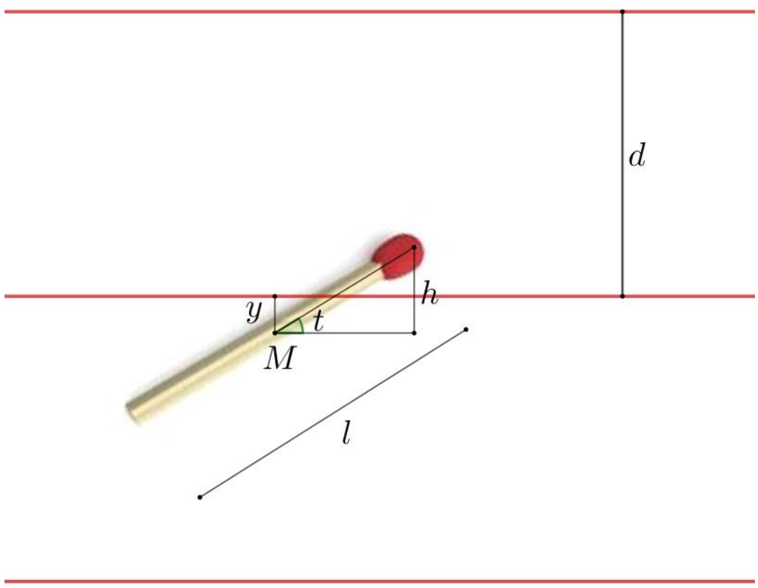
Hier: $\ell = \frac{d}{2}$. Dus:

de kans dat de stok een lijn snijdt is $\frac{1}{\pi}$.

$$\pi \approx \frac{\textbf{aantal gegooide stokken}}{\textbf{aantal keer snijden}}$$

Philippe Cara *(Vrije Universiteit Brussel) en* ***Michel Roelens*** *(UC Leuven-Limburg lerarenopleiding*

P(snijdt een lijn) = $\frac{2\ell}{\pi\, d}$. Bewijs met een integraal



Benamingen

De lengte ℓ van de naald en de afstand d tussen de lijnen liggen vast en $\ell < d$.

De variabelen t, h, y hangen af van waar de lucifer (of naald of stok) terechtkomt (zie figuur).

Wat betekent "de lucifer willekeurig gooien"?

Elk koppel $(t, y) \in [0, \pi] \times \left[0, \frac{d}{2}\right]$ maakt evenveel kans.

Wanneer snijdt de lucifer een lijn? Wanneer $y \leq h$.

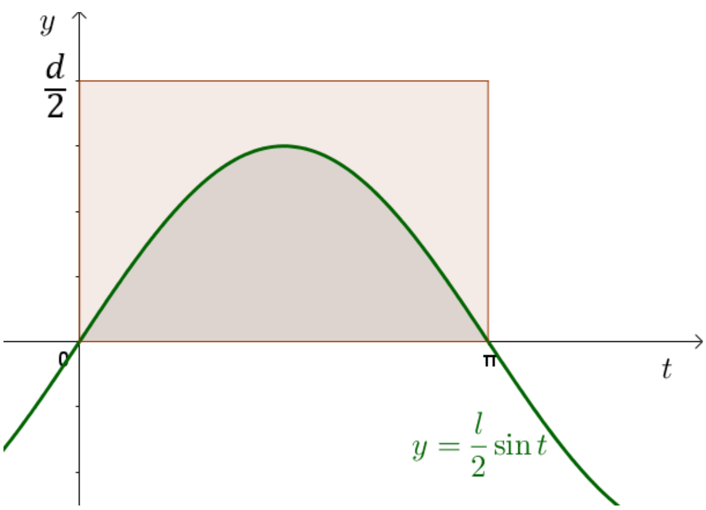
***h* in functie van *t*?** $h = \frac{\ell}{2} \sin t$ (rechthoekige driehoek)

Het probleem komt dus neer op:

"zoek de kans dat y en t toevallig zo zijn dat $y \leq \frac{\ell}{2} \sin t$".

De punten waarbij $y \leq \frac{\ell}{2} \sin t$ zijn de punten onder de kromme. Deze punten stellen de lucifers voor die een lijn van het lijntjespapier snijden.

De kans dat de lucifer een lijn snijdt, is dus $\dfrac{\text{oppervlakte onder de grafiek}}{\text{oppervlakte hele rechthoek}}$.



De oppervlakte onder de grafiek?

$$\int_0^{\pi} \frac{\ell}{2} \sin t \;\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}[-\cos t]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\ell}{2}(-(-1) + 1)$$
$$= \ell$$

De kans dat de lucifer een lijn snijdt?

$$\frac{\text{oppervlakte onder de grafiek}}{\text{oppervlakte hele rechthoek}} = \frac{\ell}{\pi \cdot \frac{d}{2}}$$
$$= \frac{2\ell}{\pi\, d}.$$

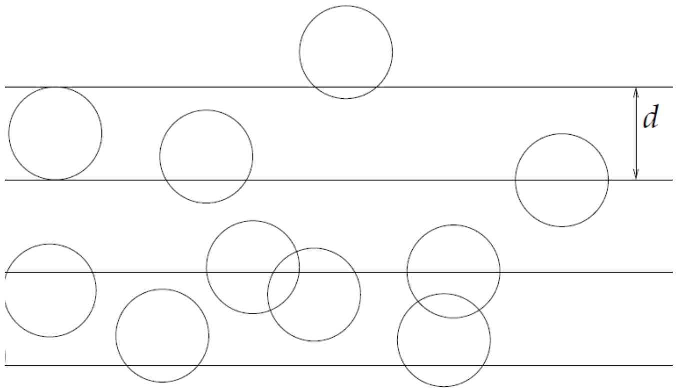
Philippe Cara *(Vrije Universiteit Brussel) en* ***Michel Roelens*** *(UC Leuven-Limburg lerarenopleiding*

P(snijdt een lijn) $= \frac{2\ell}{\pi\, d}$. Bewijs door de naald om te vormen tot een cirkel

Het plan

Stap voor stap de naald omvormen tot een cirkelvormige naald met diameter d (= de afstand tussen de lijnen).

Waarom? Omdat we zeker weten dat deze cirkelvormige naald de lijnen snijdt (of raakt) in 2 punten.

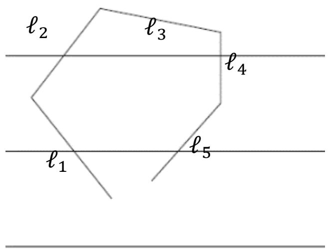


Lange naald Stel dat de lengte ℓ van de naald niet noodzakelijk korter is dan d.

Noem $p_1(\ell), p_2(\ell), p_3(\ell)$ ... de kansen op 1, 2, ... snijpunten met de lijnen.

Verwachte aantal snijpunten $\mathbb{E}(\ell) = p_1(\ell) + 2p_2(\ell) + 3p_3(\ell) + \cdots$ ($\mathbb{E}$ van "Expectance")

$\ell \le \ell' \Rightarrow \mathbb{E}(\ell) \le \mathbb{E}(\ell')$



Veelhoekige naald $\mathbb{E}(\ell_1 + \ell_2 + \cdots) = \mathbb{E}(\ell_1) + \mathbb{E}(\ell_2) + \cdots$

Stelling Voor $x \in \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}(x\ell) = x \cdot \mathbb{E}(\ell)$.

Bewijs

- Voor $x = n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(n\ell) = \mathbb{E}(\ell + \ell + \cdots + \ell) = \mathbb{E}(\ell) + \mathbb{E}(\ell) + \cdots + \mathbb{E}(\ell) = n \cdot \mathbb{E}(\ell)$
- Voor $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$: $n \cdot \mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \mathbb{E}\left(n \cdot \frac{m}{n}\ell\right) = \mathbb{E}(m\ell) = m \cdot \mathbb{E}(\ell)$ dus $\mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \frac{m}{n}\mathbb{E}(\ell)$
- Voor $x \in \mathbb{R}^+$: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \frac{k}{l}, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $\underbrace{\frac{k}{l} \le x \le \frac{m}{n}}_{\Downarrow}$ en $\left|\frac{m}{n} - \frac{k}{l}\right| < \varepsilon$ ($\mathbb{Q}$ is dicht in $\mathbb{R}$)

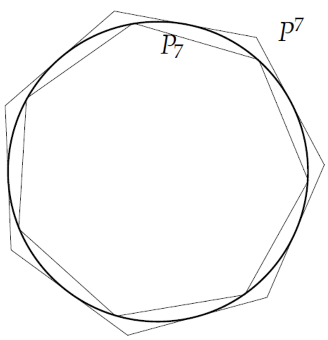
$$\frac{k}{l}\mathbb{E}(\ell) = \mathbb{E}\left(\frac{k}{l}\ell\right) \le \mathbb{E}(x\ell) \le \mathbb{E}\left(\frac{m}{n}\ell\right) = \frac{m}{n}\mathbb{E}(\ell)$$

dus: $\mathbb{E}(x\ell) = x \cdot \mathbb{E}(\ell)$

Gevolg Voor een veelhoekige of kromme naald van totale lengte ℓ geldt: $\mathbb{E}(\ell) = \ell \cdot \mathbb{E}(1)$.

Cirkelvormige naald c met diameter d (we weten $\mathbb{E}(c) = 2$)

Benader die door in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken P_n en P^n



$$\mathbb{E}(P_n) \le \mathbb{E}(c) \le \mathbb{E}(P^n)$$

$$P_n\, \mathbb{E}(1) \le 2 \le P^n\, \mathbb{E}(1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n\ \mathbb{E}(1) \le 2 \le \lim_{n\to\infty} P_n\ \mathbb{E}(1)$$

$$d\pi\mathbb{E}(1) \le 2 \le d\pi\mathbb{E}(1)$$

$$\mathbb{E}(1) = \frac{2}{d\pi}$$

Voor $\ell < d$: P(snijdt een lijn)$= \mathbb{E}(\ell) = \ell\mathbb{E}(1) = \frac{2\ell}{d\pi}$.

Philippe Cara *(Vrije Universiteit Brussel) en* ***Michel Roelens*** *(UC Leuven-Limburg lerarenopleiding*