Universiteit Antwerpen
Faculteit Wetenschappen

Zeepvliezen gebruiken voor extremumproblemen

Stijn Symens

9 april 2022

All credit goes to...

Hans van Lint en Jeanne Breeman, Zeepvliezen, wetenschap en vermaak, zebra deel 18, (2004).

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$

- Gegeven: $bl = z^2 = \pi r^2$.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$
- Gegeven: $bl = z^2 = \pi r^2$.
- Aan te tonen: $2(b + l) \geq 4z$ en $4z \geq 2\pi r$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$
- Gegeven: $bl = z^2 = \pi r^2$.
- Aan te tonen: $2(b + l) \geq 4z$ en $4z \geq 2\pi r$
- Oplossing:

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$
- Gegeven: $bl = z^2 = \pi r^2$.
- Aan te tonen: $2(b + l) \geq 4z$ en $4z \geq 2\pi r$
- Oplossing:

$$\frac{b+l}{2} \geq \sqrt{bl} = \sqrt{z^2} = z$$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 1^e ronde, vraag 28) Gegeven een rechthoek, een vierkant en een cirkel met dezelfde oppervlakte. Noem R, V en C de respectievelijke omtrekken van deze figuren. Dan geldt:

  (A) $V \geq R \geq C$ (B) $V \geq C \geq R$ (C) $R \geq V \geq C$
  (D) $R \geq C \geq V$ (E) $C \geq R \geq V$
- Gegeven: $bl = z^2 = \pi r^2$.
- Aan te tonen: $2(b + l) \geq 4z$ en $4z \geq 2\pi r$
- Oplossing:

$$\frac{b+l}{2} \geq \sqrt{bl} = \sqrt{z^2} = z$$

$$4z = 4r\sqrt{\pi} = 2(2r\sqrt{\pi}) \geq \sqrt{\pi}(2r\sqrt{\pi}) = 2\pi r$$

Extremumproblemen

Algemeen:

Extremumproblemen

Algemeen:

- 2D - Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven oppervlakte de kleinst mogelijke omtrek.

Extremumproblemen

Algemeen:

- 2D - Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven oppervlakte de kleinst mogelijke omtrek.
- 3D - Welk lichaam heeft voor een gegeven volume de kleinst mogelijke oppervlakte?

Extremumproblemen

Algemeen:

- 2D - Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven oppervlakte de kleinst mogelijke omtrek.
- 3D - Welk lichaam heeft voor een gegeven volume de kleinst mogelijke oppervlakte?

Anders gesteld:

- 2D - Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?
- 3D - Welk lichaam heeft voor een gegeven oppervlakte het grootst mogelijke volume?

Het 2D probleem (Steiner)

Het cirkelprobleem van Steiner.

Het 2D probleem (Steiner)

Het cirkelprobleem van Steiner.

- Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Het 2D probleem (Steiner)

Het cirkelprobleem van Steiner.

- Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?
- Antwoord: de cirkel.

Het 2D probleem (Steiner)

Het cirkelprobleem van Steiner.

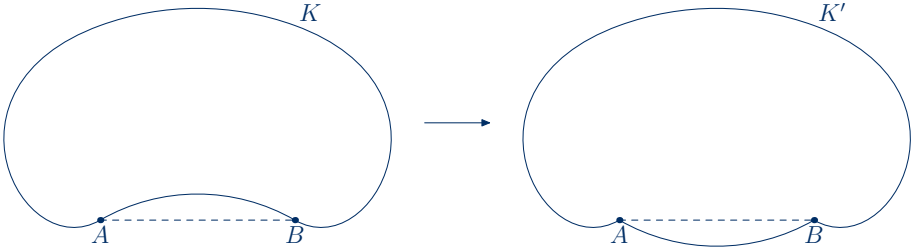
- Welke vlakke figuur heeft voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?
- Antwoord: de cirkel.
- Hoe bewijzen we dit?

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L1 K is een convexe kromme.

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L1 K is een convexe kromme.

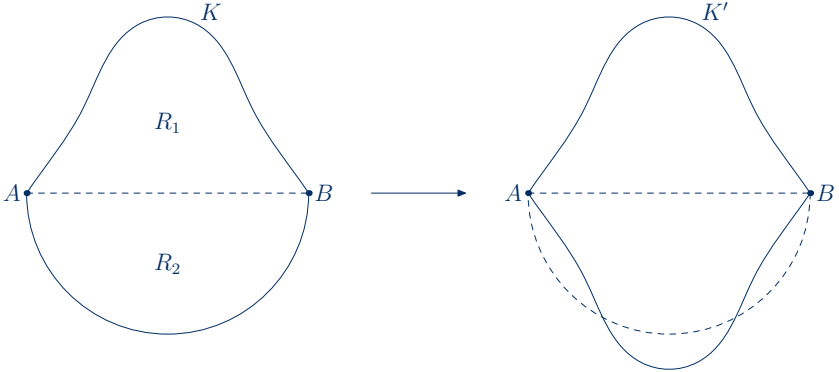


Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L2 Neem op de omtrek twee punten A en B nemen die de omtrek in 2 stukken van gelijke lengte verdeelt. Het lijnstuk $[AB]$ verdeelt de convexe figuur in 2 delen R_1 en R_2 van gelijke oppervlakte.

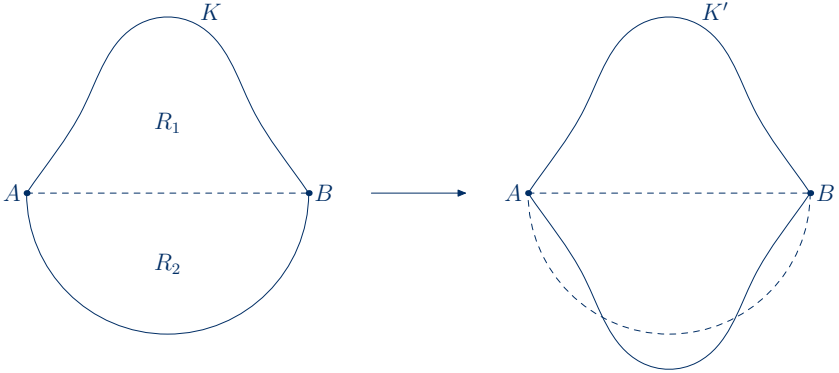
Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L2 Neem op de omtrek twee punten A en B nemen die de omtrek in 2 stukken van gelijke lengte verdeelt. Het lijnstuk $[AB]$ verdeelt de convexe figuur in 2 delen R_1 en R_2 van gelijke oppervlakte.



Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

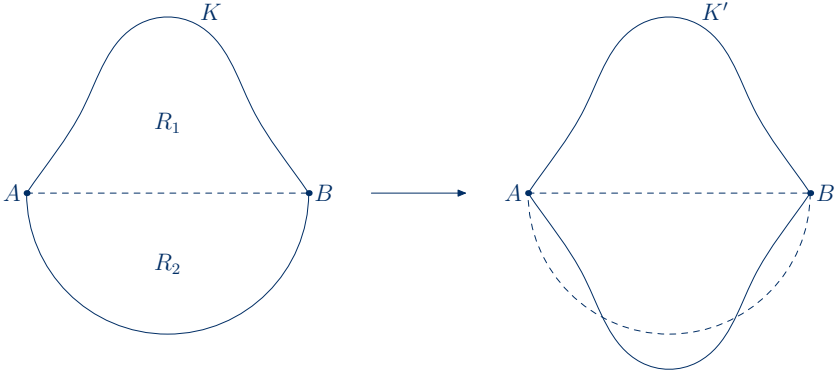
L2 Neem op de omtrek twee punten A en B nemen die de omtrek in 2 stukken van gelijke lengte verdeelt. Het lijnstuk $[AB]$ verdeelt de convexe figuur in 2 delen R_1 en R_2 van gelijke oppervlakte.



$$\text{Oppervlakte}(R_1) > \text{Oppervlakte}(R_2)$$

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L2 Neem op de omtrek twee punten A en B nemen die de omtrek in 2 stukken van gelijke lengte verdeelt. Het lijnstuk $[AB]$ verdeelt de convexe figuur in 2 delen R_1 en R_2 van gelijke oppervlakte.



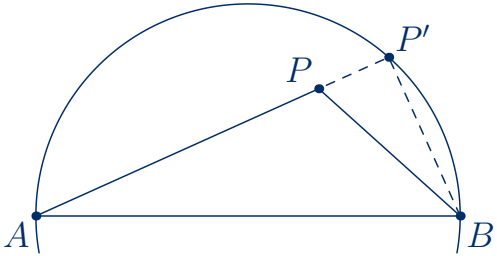
Oppervlakte$(R_1) >$ Oppervlakte$(R_2) \rightarrow$ grotere oppervlakte.

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L3 Stel gegeven een middellijn $[AB]$ van een cirkel en een punt P niet op die cirkel. Dan is $|\widehat{APB}| \neq 90^\circ$.

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

L3 Stel gegeven een middellijn $[AB]$ van een cirkel en een punt P niet op die cirkel. Dan is $|\widehat{APB}| \neq 90^\circ$.



Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

L2 $\implies$ mogen vertrek van een halve kromme op $[AB]$.

Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

L2 $\implies$ mogen vertrek van een halve kromme op $[AB]$.

L3 $\implies$ Er bestaat C op K zodat $|\widehat{ACB}| \neq 90^\circ$.

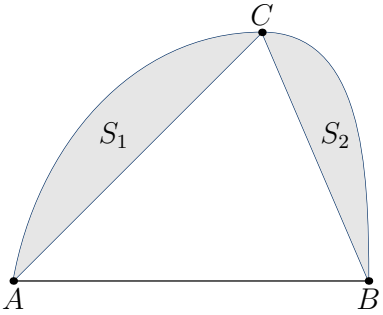
Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

L2 $\implies$ mogen vertrek van een halve kromme op $[AB]$.

L3 $\implies$ Er bestaat C op K zodat $|\widehat{ACB}| \neq 90°$.

Verdeel in drie: 2 segmenten S_1 en S_2 en de $\triangle ABC$.



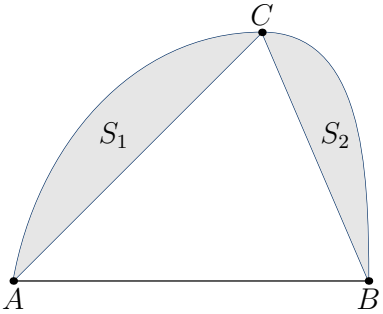
Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

L2 $\implies$ mogen vertrek van een halve kromme op $[AB]$.

L3 $\implies$ Er bestaat C op K zodat $|\widehat{ACB}| \neq 90°$.

Verdeel in drie: 2 segmenten S_1 en S_2 en de $\triangle ABC$.



$|\widehat{ACB}| \neq 90° \implies$ vervorm door S_2 rond het punt C te laten draaien tot rechte hoek!

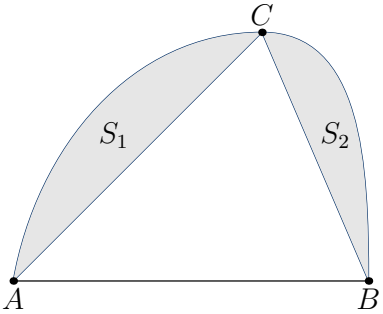
Waarom is de cirkel de vlakke figuur met voor een gegeven omtrek de grootst mogelijke oppervlakte?

Stel dat K geen cirkel is.

L2 $\implies$ mogen vertrek van een halve kromme op $[AB]$.

L3 $\implies$ Er bestaat C op K zodat $|\widehat{ACB}| \neq 90°$.

Verdeel in drie: 2 segmenten S_1 en S_2 en de $\triangle ABC$.



$|\widehat{ACB}| \neq 90° \implies$ vervorm door S_2 rond het punt C te laten draaien tot rechte hoek!

$\implies$ oppervlakte van de driehoek vergroot!

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2
	Kubus	6	1 dm^3	6 dm^2

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2
	Kubus	6	1 dm^3	6 dm^2
	Octaëder	8	1 dm^3	5.72 dm^2

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2
	Kubus	6	1 dm^3	6 dm^2
	Octaëder	8	1 dm^3	5.72 dm^2
	Dodecaëder	12	1 dm^3	5.32 dm^2

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2
	Kubus	6	1 dm^3	6 dm^2
	Octaëder	8	1 dm^3	5.72 dm^2
	Dodecaëder	12	1 dm^3	5.32 dm^2
	Icosaëder	20	1 dm^3	5.15 dm^2

Het 3D probleem (Steiner)

Welk lichaam heeft de kleinste oppervlakte?

	figuur	aantal zijvlakken	volume	oppervlakte
	Tetraëder	4	1 dm^3	7.21 dm^2
	Kubus	6	1 dm^3	6 dm^2
	Octaëder	8	1 dm^3	5.72 dm^2
	Dodecaëder	12	1 dm^3	5.32 dm^2
	Icosaëder	20	1 dm^3	5.15 dm^2
	Bol		1 dm^3	4.84 dm^2

Jakob Steiner

Jakob Steiner

- 1796-1863

Jakob Steiner

- 1796-1863
- Zwitser

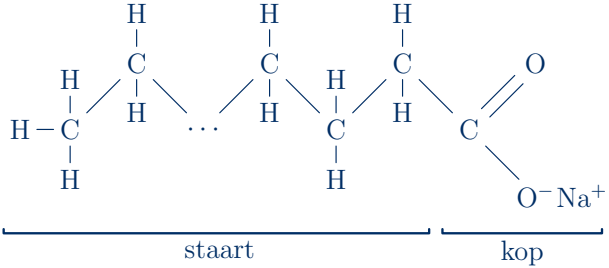
Jakob Steiner

- 1796-1863
- Zwitser
- Twee- en driedimensionale meetkundeproblemen

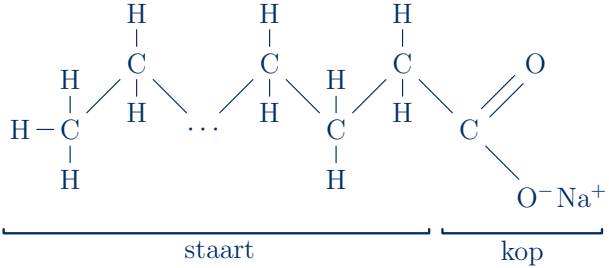
Jakob Steiner

- 1796-1863
- Zwitser
- Twee- en driedimensionale meetkundeproblemen
- Mee aan de basis van de projectieve meetkunde

De zeepmolecule

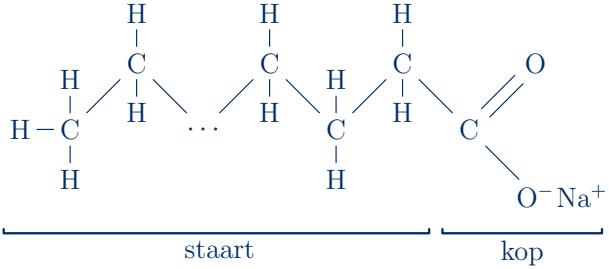


De zeepmolecule



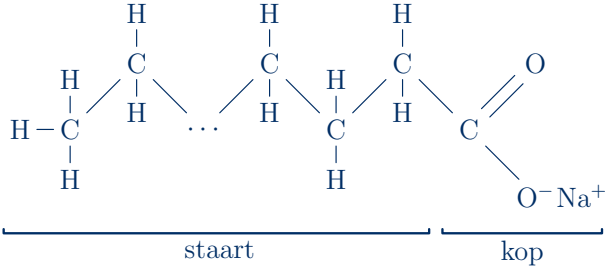
- C_nH_{2n+1} is de apolaire staart (hydrofoob).

De zeepmolecule



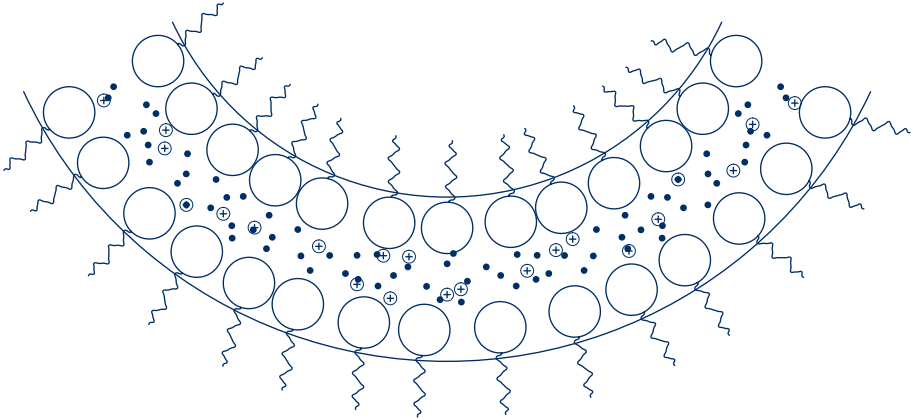
- C_nH_{2n+1} is de apolaire staart (hydrofoob).
- COO^- (of soms SO_3^-) is het ene deel van de polaire kop (hydrofiel).

De zeepmolecule



- C_nH_{2n+1} is de apolaire staart (hydrofoob).
- COO^- (of soms SO_3^-) is het ene deel van de polaire kop (hydrofiel).
- Na^+ is het andere deel van de polaire kop (hydrofiel).

Zeepvliezen



Experiment met eenvoudig materiaal

Benodigdheden:

- Een metalen kleerhanger of een stevige ijzerdraad van ingeveer 50cm.
- Een teil met zeepsop.
- Een garendraad of visdraad .

Vervorm je kleerhanger zo dat je een mooie (platte) lus krijgt, met een handvat aan. Als je deze nu voorzichtig in het zeepsop doopt zou je een mooie zeepfilm moeten krijgen die de rand van de kapstok verbindt.

Zeep zoekt naar ...

Zeep zoekt naar ...

... een situatie van zo weinig mogelijk energie.

Zeep zoekt naar ...

... een situatie van zo weinig mogelijk energie.

... een minimaal oppervlak.

Zeep zoekt naar ...

... een situatie van zo weinig mogelijk energie.

... een minimaal oppervlak.

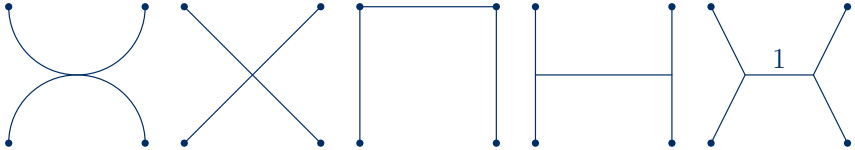
$$E = \rho \cdot A$$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

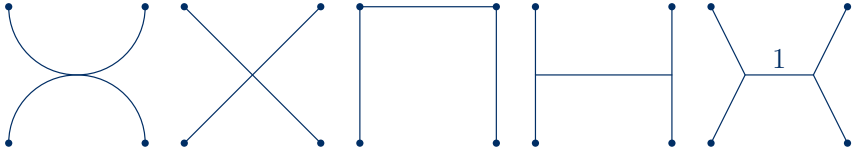
- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.



(A) (B) (C) (D) (E)

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

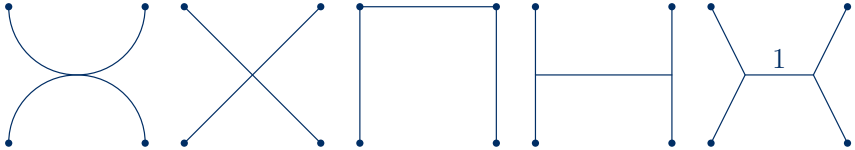


(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

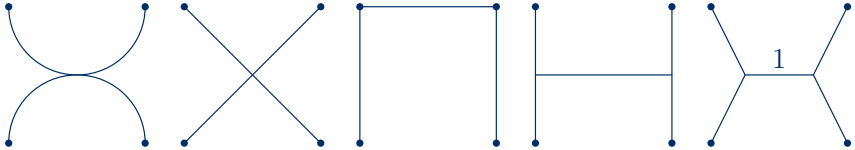


(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

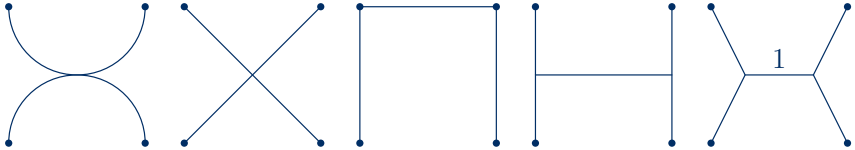


(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

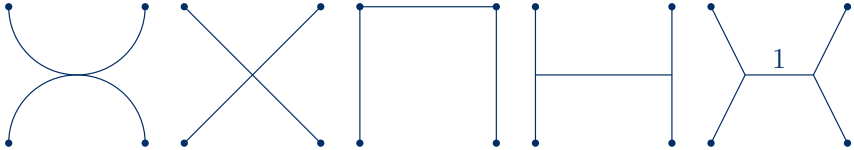


(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6
- (D) 6

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.



(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6
- (D) 6
- (E) $1 + 2\sqrt{5} \approx 5,47$

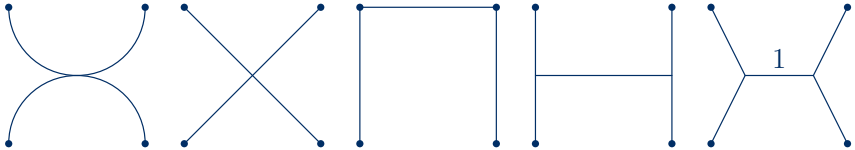
2D-Extremumproblemen

2D-Extremumproblemen

- Het punt van Torricelli in een driehoek ABC. Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.

2D-Extremumproblemen

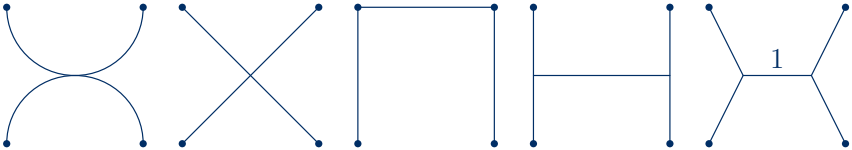
- Het punt van Torricelli in een driehoek ABC. Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.
- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.



(A) (B) (C) (D) (E)

2D-Extremumproblemen

- Het punt van Torricelli in een driehoek ABC. Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.
- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

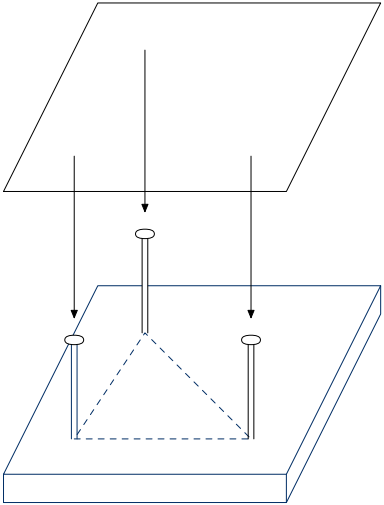


(A) (B) (C) (D) (E)

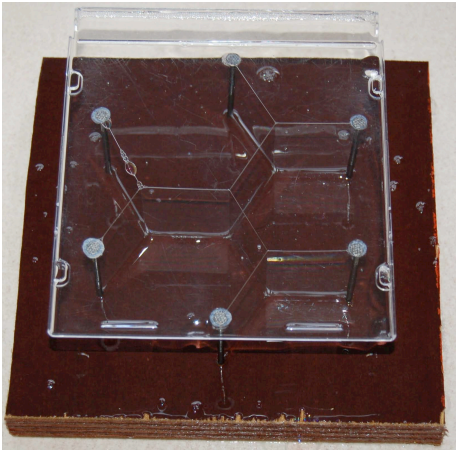
- Algemeen: Het afstandsprobleem van Steiner: gegeven n punten in het vlak. Bepaal de kortste manier om alle punten met elkaar te verbinden.

Experiment met spijkerplaatjes

- een houten plankje van ongeveer 15 op 15 cm.
- Spijkers met platte kop en een hamer.
- Secondenlijm.
- een CD-doosje.
- Een teil met zeepsop.
- Een geodriehoek en een rietje.



Prachtige resultaten

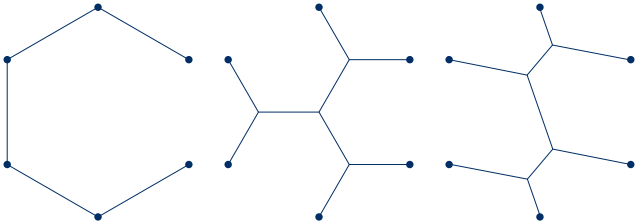


Verschillende mogelijkheden

Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We krijgen voor de regelmatige zeshoek verschillende situaties:

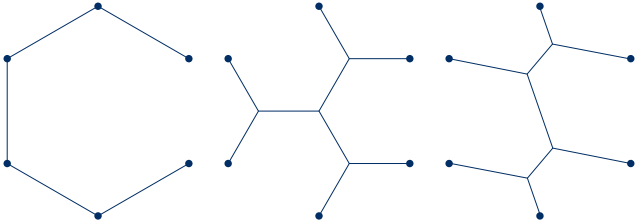
Verschillende mogelijkheden

Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We krijgen voor de regelmatige zeshoek verschillende situaties:



Verschillende mogelijkheden

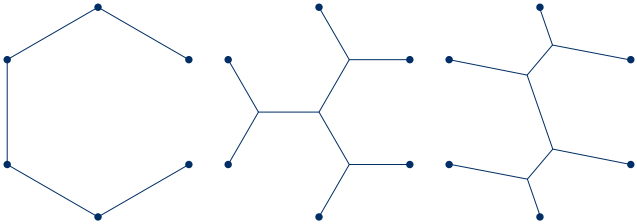
Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We krijgen voor de regelmatige zeshoek verschillende situaties:



5

Verschillende mogelijkheden

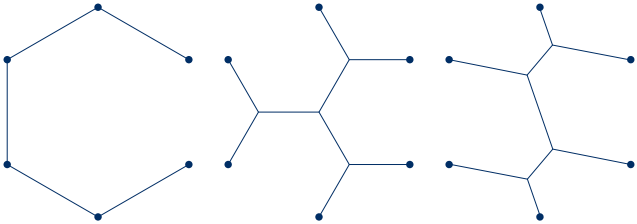
Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We krijgen voor de regelmatige zeshoek verschillende situaties:



5 $\qquad$ $3\sqrt{3} \approx 5,20$

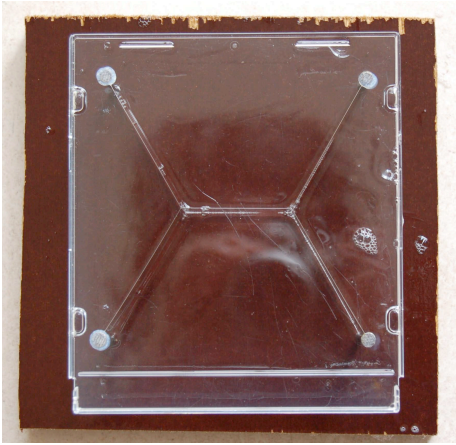
Verschillende mogelijkheden

Soms zijn er verschillende mogelijkheden. We krijgen voor de regelmatige zeshoek verschillende situaties:

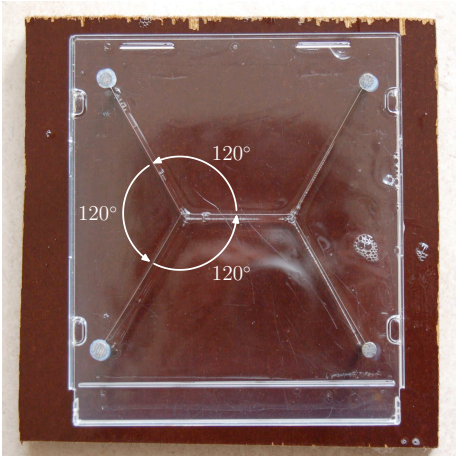


5 $\qquad$ $3\sqrt{3} \approx 5,20$ $\qquad$ $2\sqrt{7} \approx 5,29$

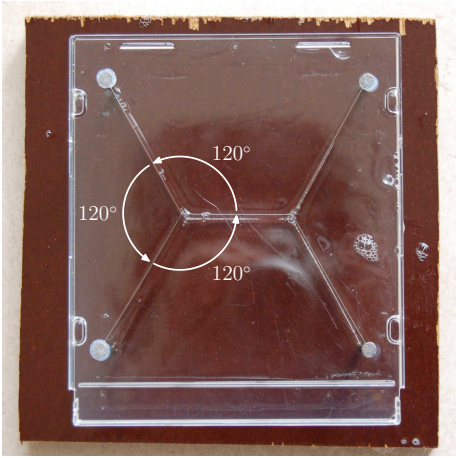
De hoeken



De hoeken



De hoeken



Steeds 120°

Jozef Plateau

Jozef Plateau

- 1801-1881

Jozef Plateau

- 1801-1881
- Belgisch natuurkundige

Jozef Plateau

- 1801-1881
- Belgisch natuurkundige
- Zeepvliezen en zeepbellen

Jozef Plateau

- 1801-1881
- Belgisch natuurkundige
- Zeepvliezen en zeepbellen
- Blind op zijn 40ste

Jozef Plateau

- 1801-1881
- Belgisch natuurkundige
- Zeepvliezen en zeepbellen
- Blind op zijn 40ste
- Film

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

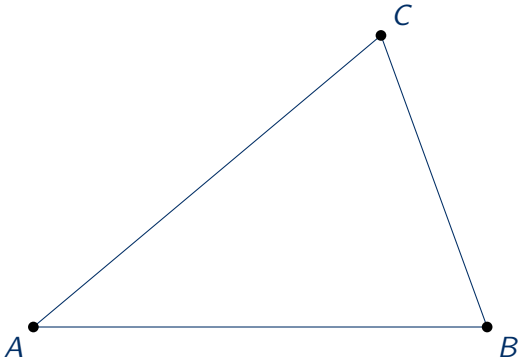
Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

Plateau en zijn Phenakistoscope

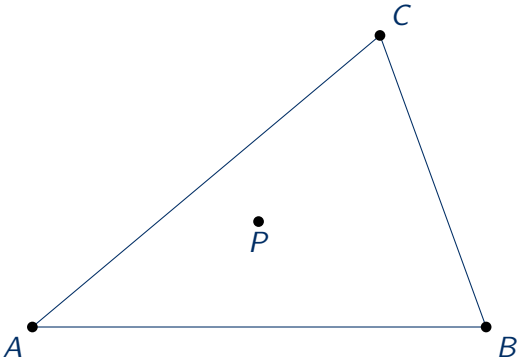
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



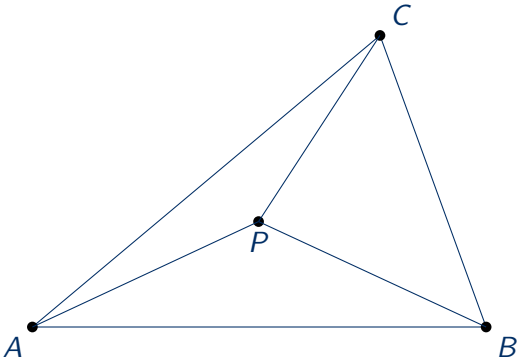
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



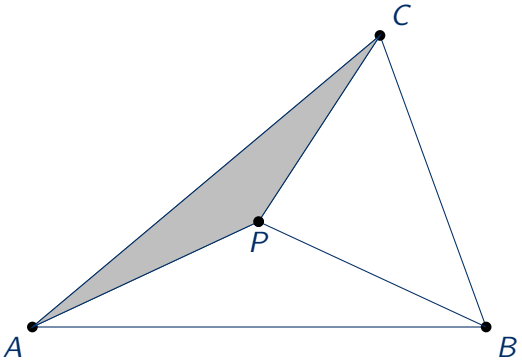
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



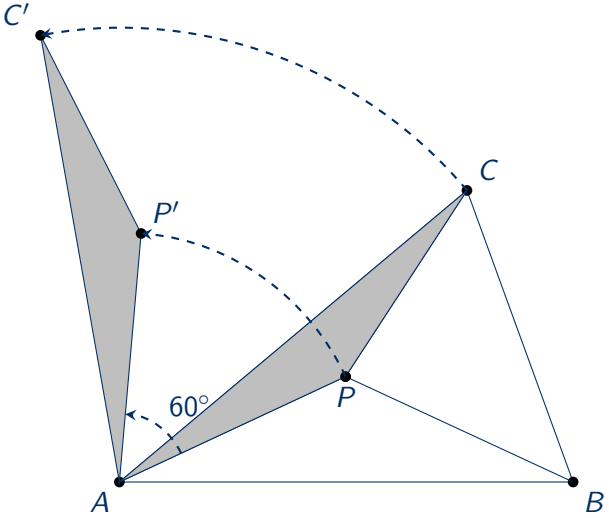
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



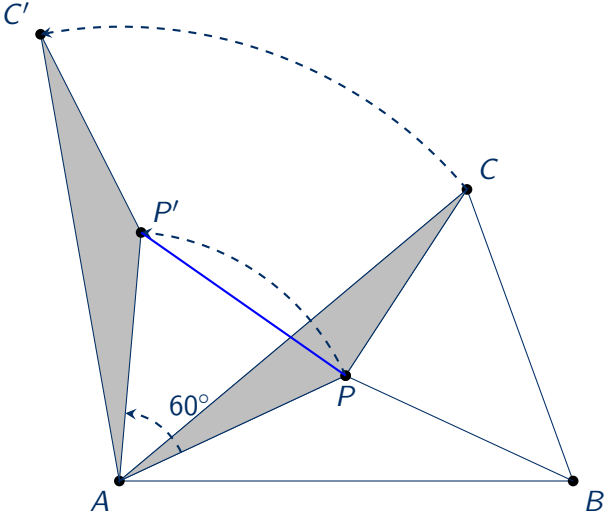
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



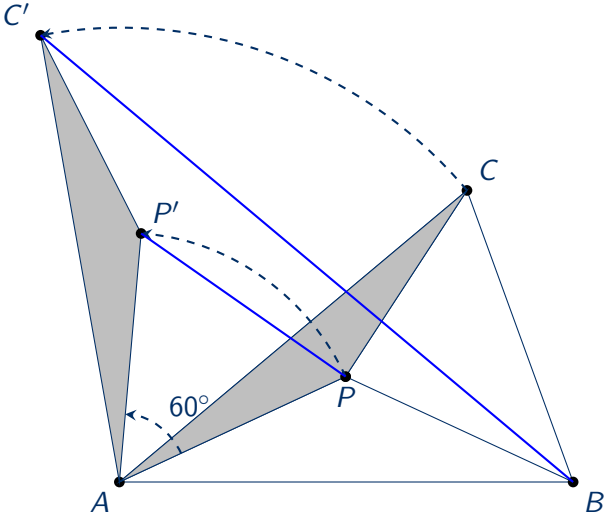
Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.

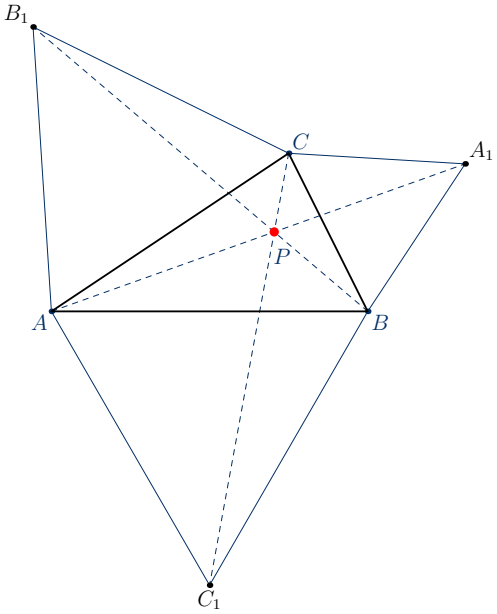


Het punt van Torricelli

Bepaal een punt P zodat $|PA| + |PB| + |PC|$ minimaal is.



Het punt van Torricelli

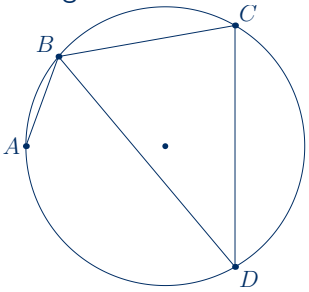


Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 21 (2006), 2^e ronde, vraag 12) In een cirkel geldt:

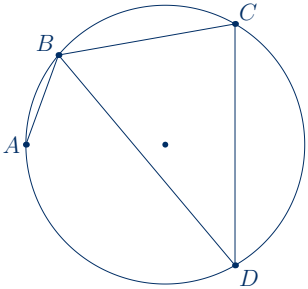
$$|\overset{\frown}{AB}| = 40^\circ, |\overset{\frown}{BC}| = 80^\circ \text{ en } |\overset{\frown}{CD}| = 120^\circ,$$

Dan geldt voor de koorden:



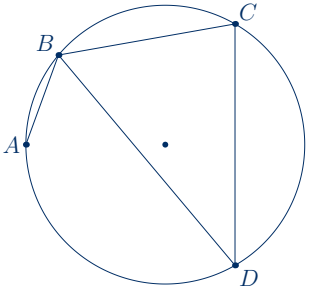
(A) $|AB| + |BC| = |CD|$
(B) $|AB| + |BC| = |BD|$
(C) $|AB| + |CD| = |BD|$
(D) $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$
(E) geen van de vorige

Vlaamse Wiskunde Olympiade



(A) $|AB| + |BC| = |CD|$
(B) $|AB| + |BC| = |BD|$
(C) $|AB| + |CD| = |BD|$
(D) $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$
(E) geen van de vorige

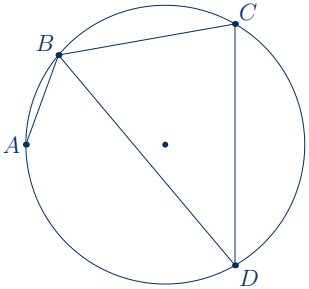
Vlaamse Wiskunde Olympiade

- 

  (A) $|AB| + |BC| = |CD|$
  (B) $|AB| + |BC| = |BD|$
  (C) $|AB| + |CD| = |BD|$
  (D) $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$
  (E) geen van de vorige

- $\triangle ACD$ is gelijkzijdig en dus is $|AC| = |CD| = |DA|$.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- 

(A) $|AB| + |BC| = |CD|$
(B) $|AB| + |BC| = |BD|$
(C) $|AB| + |CD| = |BD|$
(D) $|AB| + |BD| = |BC| + |CD|$
(E) geen van de vorige

- $\triangle ACD$ is gelijkzijdig en dus is $|AC| = |CD| = |DA|$.
- De stelling van Ptolemaeus zegt dan

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

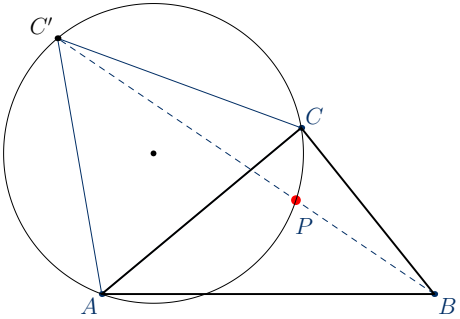
en we krijgen antwoord (B).

Het punt van Torricelli

Alternatieve methode:

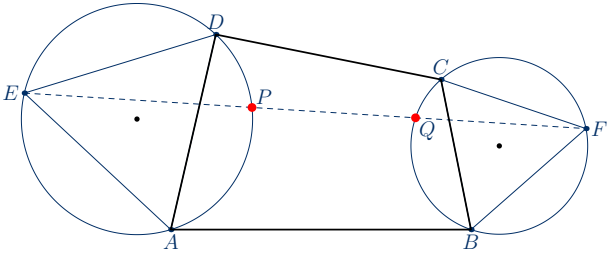
Het punt van Torricelli

Alternatieve methode:



Het punt van Torricelli

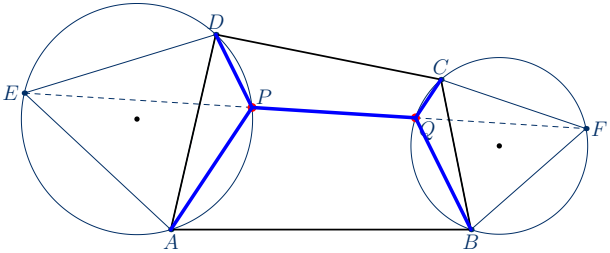
Alternatieve methode:



Dit werkt ook voor vierhoeken.

Het punt van Torricelli

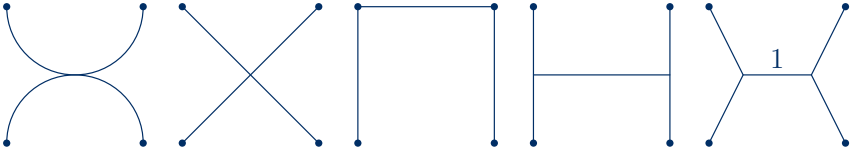
Alternatieve methode:



Dit werkt ook voor vierhoeken.

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

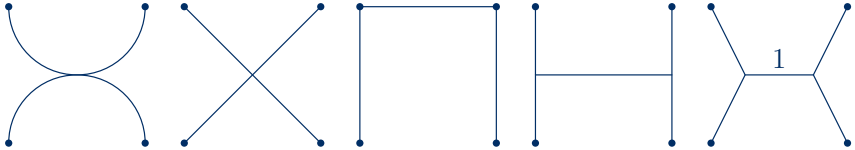


(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6
- (D) 6
- (E) $1 + 2\sqrt{5} \approx 5,47$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.



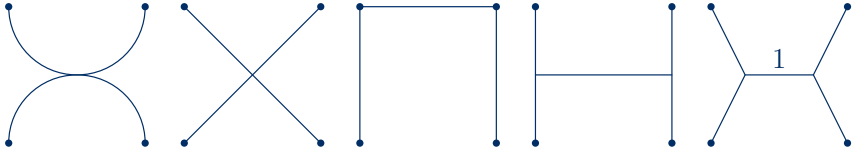
(A) (B) (C) (D) (E)

- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6
- (D) 6
- (E) $1 + 2\sqrt{5} \approx 5,47$

Is dit laatste wel de kortste weg?

Vlaamse Wiskunde Olympiade

- (VWO 11 (1996), 2de ronde, vraag 22) Gegeven 4 steden op een vierkant met zijde 2. Verbind de 4 steden met zo weinig mogelijk asfalt.

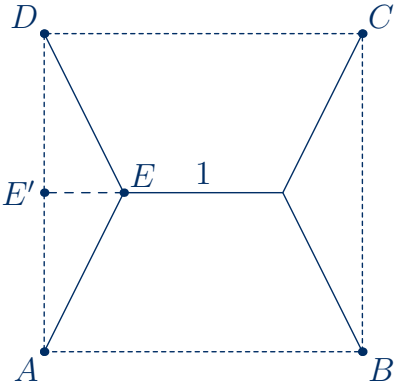


(A) (B) (C) (D) (E)

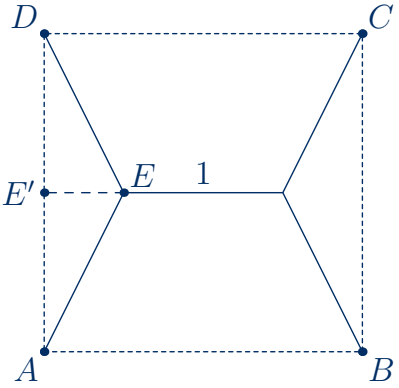
- (A) $2\pi \approx 6.28$
- (B) $4\sqrt{2} \approx 5,66$
- (C) 6
- (D) 6
- (E) $1 + 2\sqrt{5} \approx 5,47$

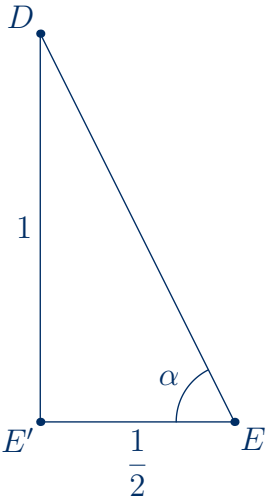
Is dit laatste wel de kortste weg? $\rightarrow$ hier geen hoek van 120°.

Vierkant

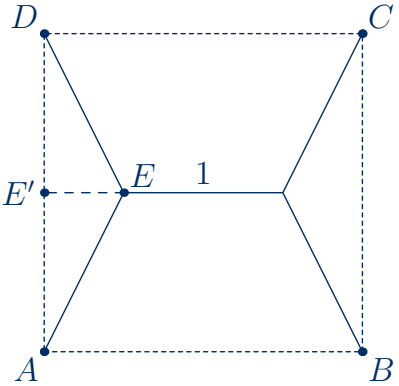


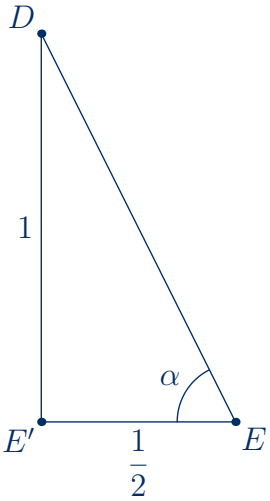
Vierkant





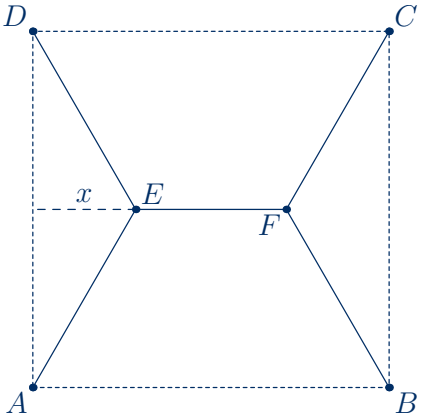
Vierkant





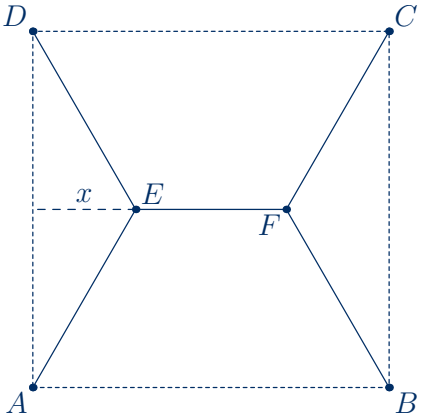
$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{1}{1/2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63^\circ 25' \implies |\widehat{AED}| = 126^\circ 52'$$

Vierkant



We zullen nu op zoek gaan naar de echte minimale figuur. We gaan uit symmetrieoverwegingen (en uit de experimentele waarneming) wel uit van deze configuratie.

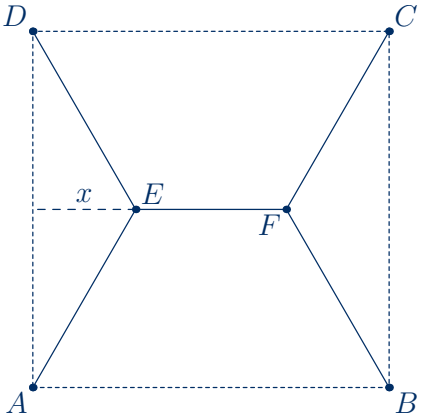
Vierkant



We zullen nu op zoek gaan naar de echte minimale figuur. We gaan uit symmetrieoverwegingen (en uit de experimentele waarneming) wel uit van deze configuratie.

1. Schrijf de totale afstand L in functie van x.

Vierkant



We zullen nu op zoek gaan naar de echte minimale figuur. We gaan uit symmetrieoverwegingen (en uit de experimentele waarneming) wel uit van deze configuratie.

1. Schrijf de totale afstand L in functie van x.
2. Los dan het extremum probleem op door gebruik te maken van afgeleiden: bepaal eerst de x waar $L(x)$ minimaal is en vul dan de gevonden x in in $L(x)$. Controleer dat je oplossing inderdaad beter is dan de beste oplossing uit het olympiadevraagje.

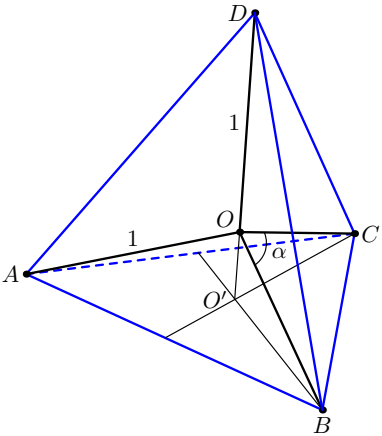
Hoe zit het in 3 dimensies?

Hoe zit het in 3 dimensies?

- Hoeveel bedraagt de tetraëderhoek?

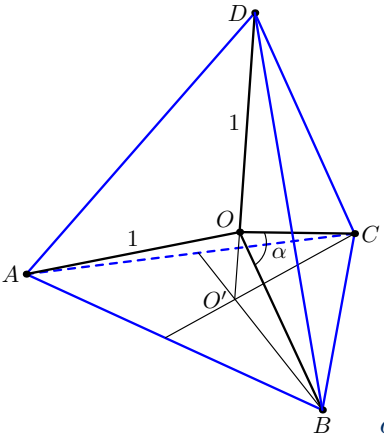
Hoe zit het in 3 dimensies?

- Hoeveel bedraagt de tetraëderhoek?



Hoe zit het in 3 dimensies?

- Hoeveel bedraagt de tetraëderhoek?



$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109^\circ 28' 16''$$

De wetten van plateau?

Voor minimale oppervlakken (ofwel zeepvliesoppervlakken) gelden de volgende eigenschappen:

De wetten van plateau?

Voor minimale oppervlakken (ofwel zeepvliesoppervlakken) gelden de volgende eigenschappen:

- Het zijn gladde oppervlakken (overal afleidbaar).

De wetten van plateau?

Voor minimale oppervlakken (ofwel zeepvliesoppervlakken) gelden de volgende eigenschappen:

- Het zijn gladde oppervlakken (overal afleidbaar).
- In elk punt van het oppervlak is de gemiddelde kromming 0.

De wetten van plateau?

Voor minimale oppervlakken (ofwel zeepvliesoppervlakken) gelden de volgende eigenschappen:

- Het zijn gladde oppervlakken (overal afleidbaar).
- In elk punt van het oppervlak is de gemiddelde kromming 0.
- Op plaatsen waar 3 vliezen samenkomen wordt steeds een hoek van 120° gemaakt.

De wetten van plateau?

Voor minimale oppervlakken (ofwel zeepvliesoppervlakken) gelden de volgende eigenschappen:

- Het zijn gladde oppervlakken (overal afleidbaar).
- In elk punt van het oppervlak is de gemiddelde kromming 0.
- Op plaatsen waar 3 vliezen samenkomen wordt steeds een hoek van 120° gemaakt.
- Op plaatsen waar 4 vliezen samenkomen wordt steeds een hoek van $109^\circ 28' 16''$ gemaakt.

Slides

Deze slides zijn te vinden op

http://atlas.uantwerpen.be/∼ssymens/ZEEP-NWD2022.pdf

Het eindwerkje is te vinden op

http://atlas.uantwerpen.be/∼ssymens/ZEEP-eindwerk.pdf