

# **CONFERENTIEGIDS**

**Noordwijkerhout  
5 en 6 februari 2010**

## Dagindeling NWD 16

Plenaire lezingen en parallelsessies	
vrijdag	
11.00 - 11.15	opening:
11.30 - 12.15	plenaire lezing:
12.30 - 14.00	lunch
14.00 - 14.45	parallelsessies 1
14.45 - 15.30	koffie/thee
15.30 - 17.00	parallelsessies 2
18.00 - 20.00	diner
20.30 - 21.30	plenaire lezing:
21.30	muziek, spellen en puzzels
zaterdag	
07.00	funrun
07.30 - 09.00	ontbijt
09.15 - 10.00	parallelsessies 3
10.00 - 10.30	kamer leegmaken, informatiemarkt
10.30 - 11.15	parallelsessies 4
11.15 - 11.45	koffie/thee
11.45 - 12.30	plenaire lezing:
12.30 - 13.00	sluiting
13.00 - 14.00	lunch

Let op: workshops hebben over het algemeen een lengte van 45 minuten. Er zijn echter een aantal werkgroepen die langer duren. Een gedetailleerd schema treft u aan in het midden van dit boekje.

# Inhoud

Voorwoord . . . . .	3
Organisatorische mededelingen . . . . .	4
Plenaire lezingen . . . . .	6

## Thema's

• Wiskunde van voortbewegen . . . . .	8
– Johan Deprez	
– André Heck en Peter Uylings	
– Mieke Abels	
– Rudi Penne en Paul Levrie	
• Wiskunde en ruimtevaart . . . . .	12
– Arthur Schoeters	
– Paul Vauterin	
– Vincent Icke	
• Wiskunde buiten het boekje . . . . .	15
– Michel Roelens	
– Quintijn Puite en Birgit van Dalen	
– Jan van Maanen	
– Leon van den Broek	
• Clay-problemen . . . . .	34
– Harry Buhrman	
– Joost Hulshof	
– Jan van de Craats	
– Josef Steenbrink	
• Wiskunde en taal . . . . .	20
– Alexander Ollongren	
– Antal van den Bosch	
– Dolly van Eerde	
• Wiskunde en logistiek - het vervolg . . . . .	23
– Jeroen Goes	
– Tom Goris, Lidy Wesker en Aldine Aaten	
– René de Koster	
– Marko Boon	
• Ludolph van Ceulen: veel meer dan $3141592/1000000$ . . . . .	27
– Steven Wepster	
– Marjanne de Nijs en Margot Rijnierse	

– Jantien Dopper en Wiggert Loonstra  
– Liesbeth de Wreede

- (Waarom) is wiskunde moeilijk? . . . . . 31
  - Elise Boltjes
  - Lut de Jaegher
  - Cristien van Dijk
  - Wim van Dooren
  
- BMW, bezig met wiskunde . . . . . 37
  - Bert Wikkerink
  - Hans van Lint en Jeanne Breeman
  - Odette de Meulemeester
  - Pedro Tytgat
  
- Diversen . . . . . 40
  - Tom Verhoeff
  - Aad Goddijn
  - Hans Melissen
  - Jan Jaspers, Jan van Eijck en Johan van Benthem
  - Vincent Jonker en Monica Wijers
  
- . . . . .

En verder

Winnaars workshop . . . . . 46

Informatiemarkt . . . . . 48

Avondprogramma . . . . . 48

Funrun . . . . . 50

Nationale Wiskunde Dagen 2011 . . . . . 51

# Voorwoord

Een inspirerende NWD2010 toegewenst!

Namens de organisatie,

Michiel Doorman  
Freudenthal Instituut

## Organisatorische mededelingen

De Nationale Wiskunde Dagen worden gehouden in NH Leeuwenhorst Hotel in Noordwijkerhout. Alle activiteiten vinden plaats onder één dak. In bijgevoegde folder wordt beschreven hoe u NH Leeuwenhorst Hotel kunt bereiken. U bent welkom op vrijdagochtend 5 februari vanaf 9.00 uur. Bij aankomst kunt u uw bagage kwijt in de daartoe aangewezen bagagekamers of in de bagagelockers. Vanaf de lunchpauze kunt u de sleutels voor uw kamer ophalen bij de receptie van NH Leeuwenhorst.

De NWD vindt plaats in de Boston-, Cambridge- en Harvardzalen. Zie de plattegrond achter in dit boekje. De restaurants – Dalí en Gaudí – zijn links en rechts van de centrale bar. Deze bar bevindt zich achter de vernieuwde receptie bij de hoofdingang.

### *Busservice*

Voor de treinreizigers is er een busservice geregeld. Er rijdt een extra bus van de Leeuwenhorst Express (fa. Beuk). Deze vertrekt om 10.05 uur vanaf station Leiden. Zaterdagmiddag na de lunch kunt u met de bus terug naar station Leiden. Het buskaartje (retour) koopt u in NH Leeuwenhorst bij het secretariaat van de NWD.

### *Programmaoverzicht*

Het globale programmaoverzicht kunt u vinden op de binnenkant van de voorkaft van dit boekje. Het detailschema van de parallelsessies staat op de middenpagina's. Het schema van de NWD is als volgt: er zijn drie plenaire lezingen en vier blokken parallelsessies. Blok 2 is voornamelijk gereserveerd voor werkgroepen van 90 minuten.

### *Vooraanmelding*

Voor *alle* parallelsessies kunt u van tevoren intekenen via de NWD-website: [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd). De voorintekeningen worden in volgorde van binnenkomst verwerkt. Voorintekenen kan tot en met *zondag 31 januari*.

Op de inschrijflijsten die in NH Leeuwenhorst worden opgehangen, (en op uw badge) kunt u zien of u geplaatst bent in de sessie van uw keuze. Het is ook mogelijk ter plekke in te tekenen, maar u kunt dan alleen kiezen uit de sessies waar nog plaats is.

**Teken alstublieft nooit in bij een werkgroep die al vol zit!**

### *Lezingen en zalen*

Alle plenaire lezingen worden gehouden in het Atrium. De zaalindeling van de parallelsessies wordt ter plekke bekend gemaakt.

### *Secretariaat*

Het secretariaat van de NWD bevindt zich in Boston 10, vanaf de hoofdingang links. Het secretariaat is gedurende de conferentie vrijwel continu open en u kunt er met al uw vragen en opmerkingen terecht.

### *Overige activiteiten*

In de Rotonde, Boston 12/14 en op de gangen is een informatiemarkt met stands van instanties die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden. Daarnaast zijn er diverse extra activiteiten in de wandelgangen en tijdens de pauzemomenten (zie verderop in deze gids).

Het avondprogramma speelt zich af rondom Boston 9. Daar kunt u muziek maken, spellen spelen of genieten van hoe anderen spelen.

Drankjes kunt u kopen met de kaart die tevens uw kamersleutel is. Bij inlevering van deze 'sleutel' bij de receptie betaalt u het openstaande bedrag op de kaart.

Ontbijt, lunches en diner vinden plaats in de restaurants van NH Leeuwenhorst.

Ten slotte verzoeken we u zaterdag vóór 10.30 uur uw kamer leeg achter te laten, consumpties en telefoonkosten af te rekenen bij de receptie van NH Leeuwenhorst en de sleutelkaart in te leveren. In de centrale hal bij de garderobe zijn kluisjes voor uw bagage.

## Plenaire lezingen

Er staan drie plenaire lezingen op het programma. Deze vinden plaats in het Atrium.

### **‘Kennismaken’: de wiskunde van communicatie en spel**

Prof.dr. Johan van Benthem  
ILLC, Universiteit van Amsterdam  
Department of Philosophy, Stanford University, USA  
Humanities, University of Beijing  
*vrijdag 11.30-12.15 uur*

De essentie van de wiskunde wordt vaak gezien in de eenzame denker die lange ‘dwingende’ bewijzen ontdekt, waar anderen het alleen maar mee eens kunnen zijn: als een soort koor dat de melodie nog eens nazingt. Maar er is ook een ander beeld denkbaar, waarbij de essentie van cognitieve rationaliteit schuilt in gesprek, discussie, en de verdere complexe sociale patronen die de mens in de loop van de evolutie heeft ontwikkeld. (De wetenschap is zelf een van die sociale patronen, dat al langer bestaat dan alle huidige wereldgodsdiensten en wereldrijken.) In deze voordracht zal ik enkele recente ontwikkelingen in de logica bespreken die nieuwe wiskundige modellen voorstellen voor communicatie, argumentatie, en spel in het algemeen.

Ik leg met name uit hoe dan twee wiskundige gezichtspunten elkaar op deze manier ontmoeten: de logica en de speltheorie.

Wiskunde is een beproefde manier om de natuur beter te begrijpen, maar het is ook een manier om een betere kijk te krijgen op \*onzelf\*.

### **Artifauna**

Theo Jansen  
Strandbeesten, Ypenburg Den Haag  
*vrijdag 20.00-21.00 uur*

Negentien jaar houdt kunstenaar Theo Jansen zich bezig met het maken van nieuwe vormen van leven. Het oermateriaal van zijn natuur is niet eiwit zoals van de bestaande natuur, maar elektriciteitsbuis (geel). Hij maakt daarvan geraamtes die kunnen lopen. Dat zijn een soort beesten. Hun energie halen ze uit de wind; ze hoeven dus niet te eten. In de loop van de tijd heeft zich een evolutie voltrokken, die zichtbaar is in de opeenvolgende generaties. Uiteindelijk wil hij deze beesten uitzetten op de stranden, waar zij een eigen leven gaan leiden.



*Animaris Percipere number one, may 2005. Foto Loek van der Klis*

## **Patiënten in getallen: een verrassend perspectief op de wiskunde**

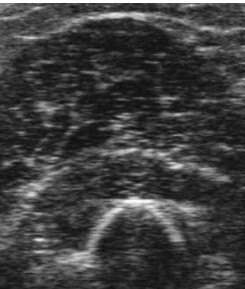
Prof.dr.ir. Natasha Maurits

Afdeling Neurologie, Universitair Medisch Centrum Groningen

*zaterdag 11.45-12.30 uur*

Wist u dat beschrijvende statistiek gebruikt kan worden om onderscheid te maken tussen spier- en zenuwziekten? Dat spectraalanalyse toegepast wordt om te meten of de hersenen hun doorbloeding op orde hebben? En dat bij het meten van de effecten van veroudering op motoriek differentiaalrekening een belangrijke rol speelt? Dit zijn slechts enkele manieren waarop wiskunde toegepast wordt in de dagelijkse praktijk van een neurologische afdeling in een academisch ziekenhuis. Aan de hand van enkele niet alledaagse voorbeelden die ik bij mijn huidige werkzaamheden in het UMCG tegen ben gekomen, hoop ik u een verrassende en vooral frisse blik op de toepassing van wiskunde te geven.

*A: normaal*



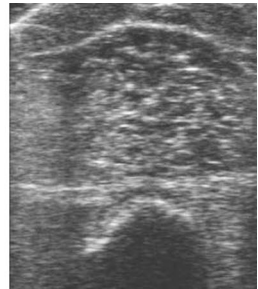
*28 jaar*

*B: spierziekte*



*51 jaar; myositis*

*C: zenuwziekte*



*68 jaar; ALS*

*Spierechografie: bicepsspier bij A: gezond persoon, B: patiënt met spierziekte en C: patiënt met zenuwziekte*

# Wiskunde van voortbewegen

De mens verplaatst zich te voet, op de fiets, met de auto, met het vliegtuig ... Steeds komt daar wiskunde bij kijken. Iedereen loopt op zijn eigen manier: kun je dit ook wiskundig analyseren? Kunnen meetkundige transformaties leiden tot ‘andere’ manieren van lopen? Fietsen gebeurt op cirkelvormige wielen, maar gaat het ook op vierkante wielen? Als je achter het stuur van een auto zit en je ziet in de verte het licht op rood springen, hoe kun je dan ‘het beste’ reageren? Wist je dat de vorm van verkeersdrempels bij wet vastligt? Waarom wordt van piloten een sterke wiskundige vooropleiding gevraagd? Om hier meer over te vernemen kom je naar de NWD... met één of ander vervoermiddel waar zeker wiskunde achter schuilt!



## Wiskunde in het verkeer

Johan Deprez

IOIW, Universiteit Antwerpen

vrijdag 14.00-15.00 uur (60 minuten)

In deze workshop ga je aan de slag met wiskundige problemen die hun wortels in het verkeer hebben. Een aantal van die problemen zijn bedoeld voor leerlingen uit de eerste jaren van het voortgezet onderwijs en vergen alleen eenvoudige meetkunde om ze op te lossen (gelijkvormige driehoeken, ...) en misschien een vleugje fysica (of beter: gewoon wat gezond verstand).



Het gaat dan over het oversteken tussen geparkeerde auto's en over een fietser die je vanuit de auto niet kon opmerken. Andere problemen uit de workshop los je op met functies en afgeleiden. Heel even komt ook een differentiaalvergelijking om het hoekje kijken. Deze problemen zijn bedacht voor iets oudere leerlingen die sterk zijn in wiskunde en die bovendien een flinke interesse voor fysica hebben. Zo zoek je uit hoe je ‘het beste’ kunt reageren als je een verkeerslicht in de verte op rood ziet springen en waarom de wettelijke voorschriften voor de vorm van een verkeersdrempel zijn wat ze zijn.

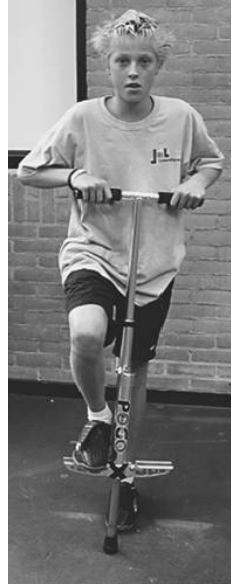
## Een sprong voorwaarts met wiskunde

Drs. André Heck en dr. Peter Uylings  
Amstel Instituut, Universiteit van Amsterdam  
vrijdag 15.30-16.15 uur

We springen wiskundig in op de volgende bewegingen:

- springen met een springstok
- touwtje springen
- huppen op de plaats
- kangoeroesprongen maken
- hinkelen.

Dergelijke bewegingen zijn op video vast te leggen en kunnen vervolgens met behulp van software worden geanalyseerd. We bespreken eenvoudige wiskundige modellen van deze bewegingen en vergelijken modelresultaten met resultaten van videometingen. De voorbeelden van video- en modelleeractiviteiten geven een goed beeld van de mogelijkheden die dit onderwerp biedt voor praktische opdrachten en profielwerkstukken.



## De juiste koers?

Mieke Abels  
Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde, Universiteit Utrecht  
zaterdag 9.15-10.00 uur

In de kleine luchtvaart is een navigatiekaart een belangrijk hulpmiddel voor het bepalen van koersen en voor oriëntatie onderweg. Als er geen wind is, dan is het simpel om van het ene naar het andere punt te vliegen: een rechte lijn op de kaart geeft de kortste afstand en de kaartkoers. Hiermee kan de kompaskoers bepaald worden en het is dan alleen nog maar een kwestie van precies in die richting vliegen.

Als er wel wind is, wordt het gecompliceerder. Om dan de juiste koers te bepalen, kunnen verschillende strategieën gebruikt worden. Een veelgebruikte methode is het construeren van een winddriehoek met behulp van een schaaltekening of een flight computer. Hulpmiddelen van een geheel andere aard bij het navigeren en het bepalen van posities zijn radiobakens. Het kunnen interpreteren van de informatie die zo'n baken geeft, vereist een goed meetkundig ruimtelijk

voorstellingsvermogen. De constructie van de winddriehoek en het gebruik van bakens zijn de hoofdactiviteiten van deze workshop.



## Nieuwe wielen, oude sporen

Prof.dr. Paul Levrie en Prof.dr. Rudi Penne  
Karel de Grote Hogeschool, Hoboken, België  
*zaterdag 10.30 -11.15 uur*

Waarschijnlijk werd het wiel ongeveer 5500 jaar geleden in Mesopotamië uitgevonden. De cirkel lijkt de meest optimale vorm, maar zijn er echt geen andere mogelijkheden? Typisch voor wiskundigen om zulke vragen te stellen, en het is dan ook geen toeval dat in 1999 een wiskundige een fiets met vierkante wielen bouwde. Hij kan hiermee zelfs zonder horten en stoten rijden, tenminste als de baan de aangepaste hobbels heeft.



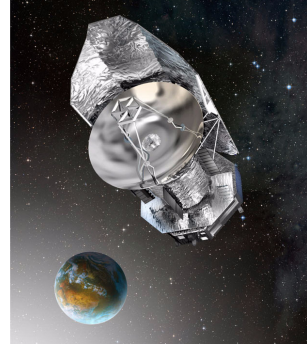
In juni 2009 verraste een Chinese uitvinder de wereld door zelfs over een vlakke baan gladjes te fietsen met vijfhoekige wielen. Zie: <http://www.howround.com/>  
Maar welke vorm de wielen ook hebben, in de sneeuw zal een fiets altijd een dubbel spoor achterlaten. Of misschien toch niet altijd? Omdat in iedere wiskundige ook een detective schuilt, wil hij het spoor van het voorwiel onderscheiden van het achterwiel. En vooral, in welke richting reed de fiets?

Zie: [http://www.myreckonings.com/Sherlock Holmes/Sherlock Holmes.htm](http://www.myreckonings.com/Sherlock%20Holmes/Sherlock%20Holmes.htm)

## Wiskunde en ruimtevaart

Niet alleen de Amerikanen en de Russen doen aan ruimtevaart, ook Nederland draagt een steentje bij: de kort geleden gelanceerde Herschel satelliet heeft een ingenieus instrument van Nederlandse makelij aan boord, de hifi. Deze zogenaamde spectrometer, die met behulp van infraroodstraling onder andere water in gaswolken probeert op te sporen, is een sterk staaltje hoogstaande techniek, met daarin natuurlijk de nodige wiskunde. Hoogstaand, maar zeker ook begrijpelijk, net als pas-klaar lesmateriaal over geostationaire banen. Hoe blijven die satellieten toch in de lucht?

Je komt ogen tekort op de NWD met het visueel indrukwekkende 3d-planetarium uit Gent. Dit thema biedt kortom een ruimtelijke blik op de wiskunde en brengt u gegarandeerd in hogere sferen.



### Wiskunde, sterrenkunde en ruimtevaart: een hemels trio

Arthur Schoeters

Euro Space Society, Brussel, België

Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars

vrijdag 14.00-15.00 uur (60 minuten)

Herhaling zaterdag 9.15-10.15 uur (60 minuten)

In januari 1610 richtte Galileo Galileï zijn verbeterde telescoop op de planeet Jupiter en ontdekte toen vier grote manen. Voor hem een voldoende aanwijzing dat de aarde inderdaad om de zon draait (heliocentrisme) zoals Nicolaas Copernicus reeds opperde in 1543. Bovendien publiceerde Johannes Kepler in 1609 zijn twee eerste wetten, die het heliocentrisme nog meer bewijskracht toekenden. Deze voordracht eert dan ook deze reuzen van de sterrenkunde.

In het kader van het Forum Ruimtevaart en Onderwijs van het Prins Filipfonds werden in België door een tachtigtal specialisten verschillende catalogi ontwikkeld die nuttig zijn voor al wie in het onderwijs gebruik wil maken van de thema's ruimtevaart en sterrenkunde. In de catalogus *Didactisch materiaal: Ruimtereisvoorbereiding voor beginners* (<http://www.prins-filipfonds.org/> en doorklikken naar specifieke initiatieven *ruimtevaart*) werden voorbeelden ontwikkeld van hoe men ruimtevaart en sterrenkunde concreet in de klas kan



brengen. De voordrachtgever zal twee bijdragen die hij hiervoor schreef uitvoerig behandelen: *planeten van ons zonnestelsel* (12-15 jaar) en *satellietbanen* (15-18 jaar).

Ook het Europees Ruimtevaartagentschap (ESA) richt zich meer en meer op de verspreiding van ruimtevaartitems in het onderwijs. Uit hun educatieve brochure *Lift-Off* wordt nader ingegaan op gewichtloosheid (parabolische vluchten), op het probleem van het ruimteafval en hoe luidruchtig een raket is.

De voordracht wordt besloten met nuttige tips waar men terecht kan voor meer goede didactische documentatie...

## Reizen door de Ruimte in 3D

Dr. Paul Vauterin

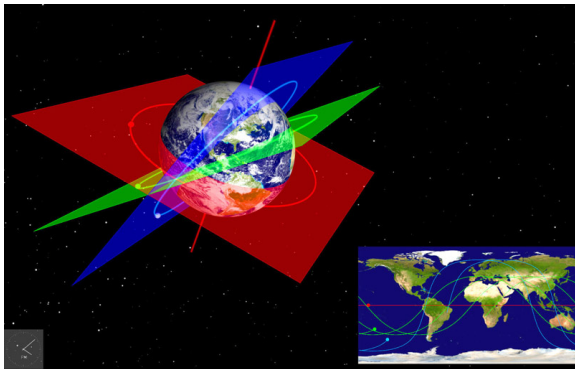
Applied Maths N.V. Sint Martens-Latem, België

*vrijdag 15.30-17.00 uur (45 minuten)*

*Herhaling zaterdag 10.30-11.15 uur*

Waarom valt een satelliet niet gewoon neer op Aarde? Hoe kan ik de wetten van Kepler in beeld brengen? Hoe verloopt een ruimtereis naar Mars? Wat is een lanceervenster? Wat is een zwaartekrachtslinger, en waarom is die zo belangrijk voor de ruimtevaart? Fascinerende vragen, en deze voordracht beantwoordt ze met behulp van een fascinerend medium: 3D projectie met polarisatie.

Op basis van eigen ontwikkelde realtime rendersoftware hebben we een interactief 3D planetarium ontwikkeld, dat toelaat om ingewikkelde concepten uit de sterrenkunde en ruimtevaart op een zeer inzichtelijke manier te visualiseren. De hardware benodigd voor 3D projectie is tegenwoordig zeer betaalbaar, en deze techniek biedt unieke mogelijkheden op gebied van wiskunde- en natuurkunde-onderwijs.



De software die gebruikt wordt in deze voordracht is gratis beschikbaar, en kan door iedereen gebruikt worden die hiermee aan de slag wilt.

Geen voorkennis vereist.

Prof.dr. Vincent Icke

*vrijdag 16.15-17.00 uur (45 minuten)*

## Wiskunde buiten het boekje

Wellicht een gevolg van onze calvinistische inslag: de Nederlandse (wiskunde-)docent staat bekend als bijzonder boekvast. Vaak kiest een wiskundesectie voor één bepaalde lesmethode en die wordt dan als leidraad voor het lesgebeuren gebruikt vanaf de eerste les in klas 1 tot aan het examen.

Gaat u wel eens buiten uw boekje?

Er zijn genoeg bronnen voor uitdagende activiteiten die binnen of buiten de les kunnen worden gebruikt: de Wiskunde A-lympiade, de Wiskunde B-dag, Kangoeroe, de Wiskunde Olympiade, het Wiskunde Toernooi, activiteiten van Stichting Vierkant, het blad Pythagoras, ... maar ook meer kleinschalige ideeën die bruikbaar zijn.

Laat u inspireren door het enthousiasme van de bedenkers en uitvoerders van dergelijke buiten-het-boekje-activiteiten.

### Het verborgen lichaam

Michel Roelens

Lerarenopleiding bachelor secundair, Katholieke Hogeschool Limburg, België  
*vrijdag 14.00-14.45 uur*

De deelnemers aan deze workshop spelen een spel dat ze nadien ook met hun leerlingen kunnen spelen. De ingrediënten van het spel zijn: logisch redeneren, duidelijk communiceren, samenwerking, competitie, ruimtemeetkunde, construeren... Welk groepje deelnemers zal als eerste genoeg informatie hebben verzameld over het 'verborgen lichaam' om het te kunnen namaken? Om misverstanden te voorkomen: het gaat niet over een menselijk lijk, maar over een ruimtelichaam. (Deze workshop vereist geen specifieke wiskundekennis van de bovenbouw.)

### Doe mee(r) met de Wiskunde Olympiade

Birgit van Dalen MSc en

Dr. Quintijn Puite

Universiteit Leiden en Technische Universiteit Eindhoven; Hogeschool Utrecht  
*vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)*

Wie zijn de knapste koppen in uw klas? Heeft u ook van die leerlingen die halverwege de les altijd al klaar zijn? Leerlingen die zitten te springen om meer uitdaging? De Wiskunde Olympiade biedt uitkomst! Elk jaar krijgen meer scholen en leerlingen de smaak te pakken: inmiddels doen zo'n 4000



havo/vwo-leerlingen, van de eerste klas tot en met de vijfde klas, in januari mee met de eerste ronde van de Olympiade, een wedstrijd vol speelse en pittige opgaven. Uw school doet toch ook mee?

In de workshop laten we zien hoe leuk het is om de Olympiade ook op uw school te laten plaatsvinden. Daarnaast gaan we in op de mogelijkheden om de olympiade ook de rest van het jaar onder uw leerlingen levend te houden. Wat dacht u van een puzzel van de week in de les? Of zet u juist de getalenteerde leerlingen op vrijdagmiddag bij elkaar om harde noten te kraken? Een heus schoololympiadeteam!

Na afloop van deze workshop gaat u naar huis vol met ideeën (en materiaal) om uw boekje te buiten te gaan.

### **Doorvertelwiskunde**

Prof.dr. Jan van Maanen

Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde, Universiteit Utrecht

*zaterdag 9.15-10.00 uur*

Er zijn dingen die je niet op school leert. Die leer je in een andere omgeving, in een ander circuit. Van je vriend(inn)en, je grootouders, op straat, in de kerk of in de kroeg, en op nog zoveel andere plekken.

Velen van ons – wiskundigen – weten uit eigen ervaring dat dit ook kan slaan op stukken wiskunde, niet alleen op schaatsen, geloven en de nuances van de liefde.

In deze workshop onderzoeken we bovengenoemd fenomeen. Talrijke voorbeelden zullen de revue passeren, en als klap op de vuurpijl zullen we ons afvragen of we hiermee ook binnen school (dat mag ook een hogeschool of universiteit zijn) iets kunnen aanvragen. Voor het standpunt ‘Ja, zeker proberen!’ valt veel te zeggen, zo zal blijken. Kijk alvast in uw eigen geheugen terug of u iets hiervan herkent.

### **Uit de buidel van Kangoeroe**

Leon van den Broek

Radboud Universiteit Nijmegen

*zaterdag 10.30-11.15 uur*

Vindt u Kangoeroe buiten het boekje? Staat Kangoeroe al op de jaaragenda van uw school?

Kangoeroe is in beweging. Er zijn allerlei nieuwe ideeën; hoe staat u daartegenover? Uw inbreng wordt zeer gewaardeerd om Kangoeroe nog beter te maken.



Wij zullen tijdens de workshop bespreken:

- Tien redenen om met Kangoeroe mee te doen. Uw aanvulling is welkom.
- Wat is een goede Kangoeroe-opgave?
  - Hoe komen de opgaven tot stand? Over de internationale Kangoeroe meeting
  - Met voorbeelden worden criteria voor een goede opgave ontwikkeld.
  - We construeren de ‘ideale’ Kangoeroevraag.

Aanstaande geboortes uit de buidel van Kangoeroe:

- Nieuwe naam: Kangoeroe W4, WereldWijde WiskundeWedstrijd.
- Onze zorgen: wedstrijd karakter, aantal vragen, niveau vragen, scores van leerlingen.
- Nieuw: Junior Wiskunde Olympiade = tweede ronde Kangoeroe.
- Kangoeroesite wordt toegankelijker = aantrekkelijker, ook voor de docent.
- Nieuw idee: Kangoeroe in duo’s!

## Clay-problemen

Wiskundige problemen zijn van alle tijden. Beroemd zijn de 23 problemen van David Hilbert en de ‘7 millennium problems’. Het Clay Institute looft een geldprijs van 1 miljoen dollar uit voor de oplossing van elk van deze zogenoemde Clay-problemen.

Zoals Wiles heeft ook Grigory Perelman (foto hiernaast in volledige afsluiting van de buitenwereld, zonder salaris of formele aanstelling, tien jaar lang aan een van deze problemen gewerkt. Maar anders dan Wiles voelt Perelman geen behoefte om deel uit te maken van de officiële academische wereld. Hij wenst zich buiten iedere kring te plaatsen en weigerde de Fields Medal in 2006. Met zijn uiterlijk en ascetische levensinstelling is Perelman in Rusland snel tot een cultfiguur geworden.

De één-miljoen-dollar-vraag is of hij nu ook het geldbedrag van de Clay-prijs zal gaan weigeren.



In dit thema lichten wiskundigen een tipje van de sluier op van enkele van de Clay-problemen (Riemann-hypothese, Navier-Stokes, vermoeden van Poincaré, ...).

### De status van het P versus NP probleem

Prof.dr. Harry Buhrman  
Centrum Wiskunde & Informatica, Amsterdam  
*vrijdag 14.00-14.45 uur*

Het **P** versus **NP** probleem is het enige ‘Clay probleem’ waarbij zowel een positieve als een negatieve oplossing een miljoen dollar oplevert. Het is een van de fundamentele wiskundige puzzels van onze tijd en het belang ervan groeit met het steeds krachtiger en goedkoper worden van hardware. Snellere processoren, grotere harde schijven alles aan elkaar gekoppeld via het internet. Computers zijn een essentieel deel geworden van ons dagelijks leven, industrie en de wetenschap. Vooral binnen de wetenschap, maar zeker ook daarbuiten, staat keer op keer de vraag centraal of een bepaald rekenprobleem nu opgelost kan worden of dat we moeten wachten tot de volgende generatie snellere computers een oplossing uitrekent. Er bestaat echter een grote en groeiende groep van belangrijke problemen waarbij een snellere computer niet veel soelaas biedt. Deze problemen vergen dermate veel rekentijd dat een computer die 1000 sneller is nog steeds jaren moet rekenen. Een snellere computer is dus geen optie. De enige uitweg is het ontwikkelen van een slimmere methode of algoritme waarmee we het probleem ook op onze huidige computers kunnen oplossen. Maar is dit wel altijd moge-

lijk? Hiermee geraken we aan de kern van het **P** versus **NP** probleem.

Stel je hebt een landkaart met steden en wegen en afstanden voor de lengte van de wegen en je wilt weten wat de kortste weg van stad A naar stad B is. Je kunt uiteraard alle mogelijke routes van A naar B proberen maar dat loopt bij 30 steden al behoorlijk uit de klauwen. Gelukkig is er een efficiëntere oplossing voor dit probleem, ontwikkeld door Edsger Dijkstra de enige Nederlander die ooit de Turing award, de belangrijkste internationale informatica prijs, ontving. Je kunt op een slimme manier gericht naar een oplossing zoeken en dat is precies waar Tom Tom gebruik van maakt. Problemen die snel opgelost kunnen worden behoren tot de klasse **P** (Polynomiale tijd). In plaats van de kortste weg had ik ook naar de langste weg van A naar B kunnen vragen, zonder twee keer dezelfde stad aan te doen natuurlijk. Ik had bijvoorbeeld kunnen vragen of er een weg is met lengte minstens 100 km van A naar B. Het vreemde is dat dit probleem veel lastiger is op te lossen dan het eerste probleem. Alle wegen van A naar B langslopen en de langste eruit pikken werkt zeker ook voor dit probleem, maar een wezenlijk betere methode is niet bekend! Als ik echter een weg van A naar B onder ogen krijg dan is gemakkelijk te zien of hij langer dan 100 km is. Goede oplossingen voor het langste pad probleem zijn dus eenvoudig te verifiëren. Zulk soort problemen, waarbij de oplossing snel te controleren valt, behoren tot de klasse **NP** (Non-deterministisch Polynomiale tijd). De grote vraag is of **P** gelijk is aan **NP**. Anders gezegd kunnen we als we een oplossing snel kunnen verifiëren ook snel een oplossing genereren.

Ik zal de huidige stand van zaken schetsen en duidelijk maken wat de verregaande consequenties zijn, voor bijvoorbeeld de cryptografie, quantum computers en de wiskunde, van het positief dan wel negatief oplossen van dit fascinerende probleem.

Een voorbeeld van efficiënt verifiëren (**NP**) versus efficiënt genereren (**P**) is Tangram. Het is lastig om de vormen in figuur 1 met de 7 puzzelstukken te maken. In figuur 2 zie je dat gegeven de oplossing het eenvoudig is te verifiëren of die correct is.

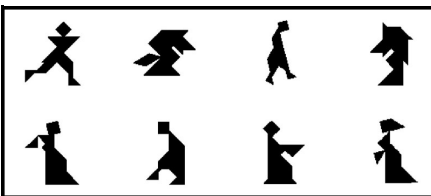


Fig. 1: Genereer deze vormen uit de 7 puzzelstukken

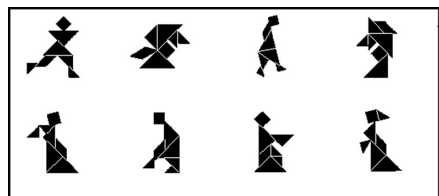


Fig. 2: Controleer of de oplossing correct is

## Titel????

Prof.dr. Joost Hulshof

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Universiteit van Amsterdam

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

Al lang voor de lijst met millenniumproblemen door het Clay Institute was opgesteld circuleerde een grap over de grote openstaande problemen in de wiskunde die God in een interview met wiskundigen zou behandelen. De grap had vele versies maar de punch line was meestal een door een fysicus gestelde vraag in de trant van ‘What about well-posedness for the Navier-Stokes equations in dimension 3?’ en het antwoord ‘Next question’. Wiskundigen schrijven de eerste van de twee Navier-Stokes vergelijkingen meestal in de vorm:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v}$$

In deze vergelijking zijn  $\mathbf{v}$  en  $p$  de onbekenden, namelijk de snelheid en de druk van (bijvoorbeeld) stromend water, en is  $\mu$  een parameter die iets met de viscositeit te maken heeft. De wiskunde symbolen vergen enige uitleg, maar de eerste twee termen hebben met versnelling te maken. Het symbool  $\nabla$  komt ook voor in de tweede vergelijking  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , die in wiskundige termen formuleert dat de vloeistof niet-samendrukbaar is. De eerste vergelijking beschrijft hoe onder invloed van de ten gevolge van drukverschillen en andere in het water werkzame krachten de stroming en daarmee ook de druk verandert.

Twee vergelijkingen voor twee onbekenden, waaruit de  $p$  kan worden weggewerkt, zodat een vergelijking overblijft die niet-lineair is in  $\mathbf{v}$ . Het probleem is echter dat niemand weet of deze vergelijkingen voldoende zijn om de stroming te beschrijven. Dat hangt nauw samen met het ook fysisch bij lange na niet begrepen fenomeen van turbulentie. Wiskundig gezien zijn de vergelijkingen prachtig in dimensie 2, in Flatland dus, maar in dimensie 3 is het een ramp. Hoe zit dat?

Kom luisteren waarom dit probleem maar niet opgelost wordt. Uitleggen wat hierboven staat is al een hele klus. Alle aspecten van het probleem zijn echter te relateren aan simpele vragen zoals die van een mathematisch fysicus: wat gebeurt er als ik de een-

heden schaal? Schalen is een onmisbare brug die wiskunde met de natuurwetenschappen verbindt. Net als de stelling van Pythagoras. Van:

$$3^2 + 2^2 = 5^2 \text{ via } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6};$$

tot turbulentie als het misgaan van oneindige Pythagoras-sommen. Waarbij ook simpele differentiaalvergelijkingen zoals:  $\frac{dv}{dt} = v - v^2$  nog langskomen, ook niet-lineair, of toch wel?

## De Riemann-hypothese

Prof.dr. Jan van de Craats

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

*zaterdag 9.15-10.15 uur (60 minuten)*

De Riemann-hypothese is het belangrijkste open probleem van de wiskunde. Als je dat oplost, word je wereldberoemd en bovendien verdien je dan een prijs van één miljoen dollar! De Riemann-hypothese heeft te maken met de rij van alle *priemgetallen*, de gehele getallen groter dan 1 die alleen maar deelbaar zijn door 1 en door zichzelf:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots$$

Hoe liggen de priemgetallen verspreid tussen de andere getallen? Hoeveel priemgetallen zijn er? Hoeveel priemgetallen zijn er van honderd cijfers? Van een miljoen cijfers? Bernhard Riemann schreef over dit soort vragen in 1859 een baanbrekend artikel. Daarin formuleerde hij ook zijn beroemde vermoeden, min of meer als een losse opmerking terzijde. Maar niemand heeft het probleem nog op kunnen lossen. De Riemann-hypothese is direct verbonden met allerlei andere vragen uit de meest uiteenlopende wiskundige onderzoeksgebieden, tot aan cryptografie (geheimschriftkunde) toe. In mijn voordracht zal ik laten zien wat de Riemann-hypothese te maken heeft met priemgetallen, maar ook met complexe getallen, oneindige reeksen en oneindige producten.

De Riemann-hypothese is ook het onderwerp van een *UVA-webklas wiskunde*, een intensieve interactieve internetcursus wiskunde voor vwo-B-leerlingen die willen kennismaken met wiskunde op universitair niveau. Deze webklas heeft al drie maal met veel succes gedraaid; de volgende ronde wordt in maart 2010 georganiseerd. Ik zal vertellen over mijn ervaringen daarmee. Het lesmateriaal voor de webklas is te vinden op mijn homepage:

<http://staff.science.uva.nl/~craats/#webklas>



*Bernhard Riemann, 1826 - 1866*

## Het Poincaré-vermoeden

Prof.dr. Josef Steenbrink

Faculteit NWI, Radboud Universiteit Nijmegen

*zaterdag 10.30-11.15 uur*

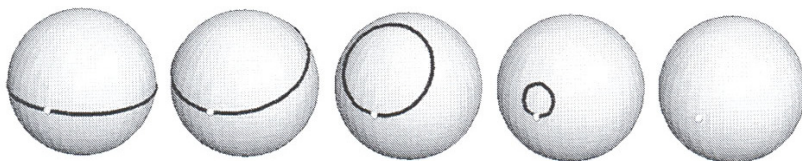
Van oppervlakken (compact, zonder rand, oriënteerbaar) is een volledige lijst bekend: het geslacht (aantal gaten) van zo'n oppervlak karakteriseert het volledig.

Het eenvoudigste oppervlak, van geslacht nul is het oppervlak van een bol. Deze tweedimensionale sfeer wordt gekenmerkt door het feit dat je elke lus op dat oppervlak kunt vervormen tot een punt.

In 1904 stelde de Franse wiskundige Henri Poincaré de volgende vraag: als een driedimensionale variëteit (een 'lichaam') de eigenschap heeft dat elke lus in dit lichaam kan worden vervormd tot een punt, is dat lichaam dan een driedimensionale sfeer? Met 'is' wordt hier bedoeld: topologisch gelijk.

In een reeks van drie artikelen in 2002 en 2003 heeft de Russische wiskundige Grisha Perelman een bewijs gegeven van dit vermoeden. Dit werk vond erkenning tijdens het International Congress of Mathematicians van 2006, waar Perelman de Fields medaille was toegekend. Hij heeft deze echter niet in ontvangst willen nemen.

In de voordracht zal dit vermoeden worden toegelicht. Ook zal iets worden verteld over het project Diswis Poincaré, waarin een Wiskunde D-module over het Poincaré-vermoeden is ontwikkeld. De veronderstelde voorkennis is niveau klas 5 vwo.



Voor nadere informatie kan de lezer het item 'Solution of the Poincaré conjecture' op Wikipedia raadplegen. Daar zijn ook diverse links naar andere bronnen te vinden.

# Wiskunde en taal

Met wiskunde leer je analytisch en logisch denken. Taal is essentieel bij het ordenen en communiceren van kennis. Met andere woorden: wiskunde speelt een rol bij het leren hanteren van taal en taal is ook van wezenlijk belang bij het leren van wiskunde. Maar wat betekent dat voor de onderwijspraktijk?

De structuur van diverse talen lijkt op het eerste gezicht erg verschillend. Toch is het bouwplan in zekere zin vaak hetzelfde. De relatie met axiomatische systemen is snel gelegd. Volgens Galileo Galilei was het ‘Boek van de Natuur’ in wiskundige taal geschreven. Geldt hetzelfde voor het ‘Boek der Taal’?

In dit thema willen we echter benadrukken dat de relatie tussen taal en wiskunde niet alleen te vinden is via de bekende structurele invalshoek, maar ook van betekenis is voor het onderwijs en in het dagelijkse taalgebruik bij kwesties als betekenistoekenning en informatie-uitwisseling.

## Lingua Cosmica

Prof.dr. Alexander Ollongren

Advanced Computer Science en Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

vrijdag 14.00-14.45 uur

In deze bijdrage wordt nagegaan hoe het wiskundige formalisme van de getypeerde  $\lambda$ -calculus gebruikt kan worden voor de opzet van een taalkundig systeem bestemd voor het weergeven van informatie\* dat begrepen zou kunnen worden door buitenaardse intelligente beschavingen: een Lingua Universalis of – Cosmica. LINCOS, voorgesteld en ontwikkeld door Professor Freudenthal in de jaren vijftig van de vorige eeuw, was het eerste systeem van deze soort. Met behulp van vele voorbeelden werden wiskundige concepten in de ‘normale’ notatie ten tonele gevoerd. De infix- en prefix-notaties werden beide gehanteerd. Juist en onjuist, waar en onwaar werden apart behandeld. Vele nieuwe notationale conventies werden geïntroduceerd. Het ziet er echter naar uit dat een intelligente buitenaardse ontvanger heel veel moeite zal hebben met de interpretatie van teksten in dit systeem geformuleerd.

Sindsdien is een nieuw LINCOS door de spreker ontwikkeld. Als grondslag wordt de constructieve (intuitionistische) logica gebruikt, ondergebracht in de gtypeerde  $\lambda$ -calculus. Als gevolg daarvan wordt uitsluitend de prefix-notatie gebruikt. De uitdrukingskracht is niet minder dan die van Freudenthals systeem, maar logische relaties ‘liften’ elegant en met gemak mee. Zo zijn bijvoorbeeld Aristotelische syllogismen (deducties en conversies) moeiteloos in het nieuwe systeem ondergebracht. In plaats van juist *versus* onjuist, waar *versus* onwaar, wordt het begrip contrasruerbaar gehanteerd. Een belangrijk aspect hierbij is dat iedere logische gevolgtrekking gegarandeerd

correct kan worden bewezen. Alle formuleringen zijn in ‘platte’ tekst, het aantal speciale tekens is sterk beperkt. Als een intelligente buitenaardse ontvanger de  $\lambda$ -calculus (her)kent zal hij/zij naar verwachting niet te veel moeite hebben met de interpretatie van teksten in het nieuwe systeem.

Voor een iets uitvoeriger indruk van de nieuwe LINCOS en relaties met astrolinguïstiek, zie [www.alexanderollongren.nl](http://www.alexanderollongren.nl). Zelfs een summiere kennis van de conventies van de  $\lambda$ -calculus is voldoende om een indruk te krijgen van de uitdrukingskracht van het communicatiesysteem.

\* Op een andere manier dan met de bekende Pioneer plaquette, aan boord van de Pioneer sondes van 1970-1972.

## Zonder taal geen wiskunde!?

Dr. Dolly van Eerde

Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde, Universiteit Utrecht  
*vrijdag 15.30-16.30 uur (60 minuten)*

Wiskunde lijkt misschien geen talig vak, maar niets is minder waar: het leren van wiskunde en van taal zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Reeds in de jaren dertig van de vorige eeuw wees de psycholoog Vygotskij al op de relatie tussen taal en denken. Freudenthal bepleitte al in de jaren tachtig van de vorige eeuw de integratie van wiskunde- en taalonderwijs. In de internationale literatuur bestaat inmiddels consensus over het feit dat wiskunde en de daarbij behorende taal zich samen ontwikkelen en elkaar beïnvloeden. Elke leerling moet het wiskundig register ontwikkelen, leren om de taal van de wiskunde te begrijpen en te spreken om zo toegang te krijgen tot het vak. Het gaat hierbij om de ontwikkeling van wiskundige begrippen en betekenissen, inclusief de formuleringen om deze begrippen en betekenissen uit te drukken.

De rol van taal binnen wiskundeonderwijs lijkt evident maar krijgt pas recent belangstelling vanwege de taalproblemen van de groep taalzwakke allochtone en autochtone leerlingen. De laatste jaren komt men echter steeds meer tot het inzicht dat het noodzakelijk is bij alle leerlingen aandacht te besteden aan de ontwikkeling van het wiskundig register.

De benadering die taalontwikkeling binnen de vakles beoogt staat bekend als taalgericht vakonderwijs. Deze visie vormt ons vertrekpunt voor onderzoek en ontwikkelwerk op weg naar taalgericht wiskundeonderwijs.



In de workshop laten we aan de hand van illustraties en videofragmenten zien om welke taal het gaat en hoe docenten deze taalontwikkeling van hun leerlingen kunnen stimuleren. Ook worden voorbeelden gegeven van prototypisch materiaal voor taalgericht wiskundeonderwijs.

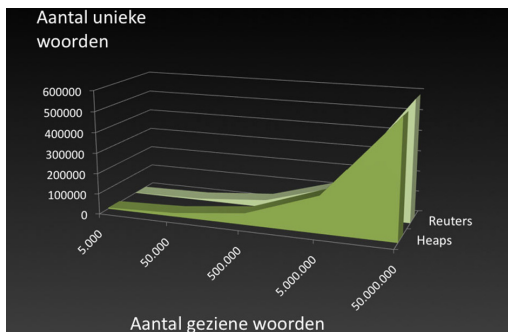
## Wiskundige Wetmatigheden in Taal

Prof.dr. Antal van den Bosch

Tilburg centre for Creative Computing Universiteit van Tilburg

*zaterdag 9.15-10.00 uur*

In het Nederlandse taalonderwijs zul je niet snel de namen horen van George K. Zipf en Harold S. Heaps. Beiden gaven hun naam aan een wetmatigheid, een empirische wet, die bij benadering (en vaak akelig nauwkeurig) voorspellingen doet over het voorkomen van woorden in willekeurige teksten geschreven in willekeurige talen. De Wet van Zipf legt een wiskundige relatie tussen hoe vaak een woord voorkomt in een taal, en de plaats van dat woord in de rangorde van meest frequente woorden. Deze relatie blijkt log-lineair te zijn, in welke tekst en welke taal dan ook. De wet is een wiskundige variant van het taalkundige verschil tussen korte functiewoorden en langere inhoudswoorden. De wet van Heaps geeft een schatting van het aantal nieuwe woorden dat je tegenkomt als je alsmaar meer tekst leest. Dat aantal neemt altijd toe, maar het duurt wel steeds langer voordat je weer een nieuw woord tegenkomt. In de voordracht leg ik de werking van de wetten uit, en laat zien hoe ze de basis vormen van efficiënte zoekmachines zoals die van Google.



*De wet van Heaps voorspelt hoeveel nieuwe woorden verschijnen in alsmaar meer tekst. De wet lijkt de werkelijkheid (gemeten in zeer veel Engelse tekst van het persbureau Reuters) zeer goed te benaderen.*

Websites: Zipfs wet: <http://en.wikipedia.org/wiki/Zipf%27s>

LawHeaps' wet: [http://en.wikipedia.org/wiki/Heaps%27\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Heaps%27_law) en

Het 'Implicit Linguistics' project: <http://ilk.uvt.nl/il>

# Wiskunde en logistiek

Tijdens de vorige NWD bleek wiskunde en logistiek een onuitputtelijk onderwerp. Vandaar dat dit thema terugkeert. Wilt u weten hoe wiskundige modellen een rol spelen in de wereld van ‘bedrijfsinterne logistiek’, op welke wijze uw koffer bijna altijd in het juiste vliegtuig belandt of hoe wiskunde gebruikt wordt bij stoplichtafstellingen en groene golven? Op de 16e NWD is er ruimte voor leren, informeren en participeren. Wees alvast eens verkeersregelaar op: <http://www.win.tue.nl/cow/trafficjam/>

## Wiskunde in de praktijk bij Vanderlande Industries

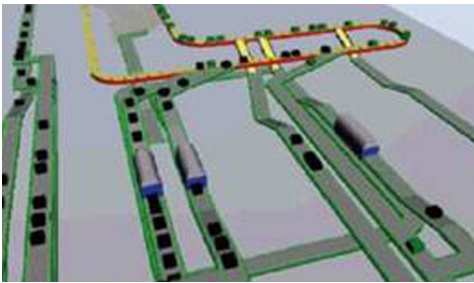
Ir. Jeroen Goes

Vanderlande Industries, Veghel

vrijdag 14.00-14.45 uur

Als wiskundige en als medewerker op de simulatieafdeling van Vanderlande Industries, een material handling systems leverancier, aan mij de uitdaging om u in deze presentatie mee te nemen in de toepassingen van de wiskunde in de praktijk.

In deze presentatie wordt aan de hand van voorbeelden een aantal vraagstukken aangestipt. Denk hierbij aan aankomsten van passagiers bij een check-in balie en hoe lang ze moeten wachten. Wat is de beste route voor een koffer in het bagageafhandelings-systeem om zo snel mogelijk bij zijn vlucht te komen? Hoe zien de orders eruit van een klant in een distributiecentrum en wat kan je daarmee? Hoe moet de snelheid van een pakketje worden aangepast, zodat hij ‘ritst’ tussen twee andere pakketjes?



Sommige voorbeelden zijn relatief simpel en eenvoudig op te lossen door ‘slechts’ logisch redeneren. Andere vereisen bepaalde kennis. Voor vrijwel alle voorbeelden is basiswiskundekennis voldoende. Grafentheorie, Statistiek, Grafieken, Kansen en wellicht een klein uitstapje naar de wachtrijtheorie zijn onderdelen van de presentatie.

Interessante links: <http://www.wisactueel.nl/>

De website van Vanderlande Industries. <http://www.vanderlande.nl/>

Daar vindt u interessante artikelen over wiskunde in de praktijk. In maart 2009 is daar een artikel over de spreker verschenen.

# Containerlogistiek op de A-lympiadefinale

Tom Goris, Aldine Aaten en Lidy Wesker met leerlingen  
 Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde Universiteit Utrecht  
 Bonhoeffer College, Castricum  
 vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

## Het A-team

Maart jongstleden vond voor de 21<sup>e</sup> keer de finale van de A-lympiade plaats. Zeventien teams uit Nederland, Aruba, St Maarten, Duitsland, Denemarken en Iran hielden zich een weekend lang bezig met een opdracht over containerlogistiek. Die opdracht was onder andere gebaseerd op een voordracht van Iris Vis op de NWD van vorig jaar. De finale werd gewonnen door het team van het Bonhoeffer College uit Castricum: Fayette Klaassen, Femke Dam, Elzemeik Rensen en Nina Enthoven. De A-lympiadefinale is een behoorlijk ‘besloten’ aangelegenheid: zij vindt letterlijk plaats in hutjes op de hei, namelijk een bungalowpark te Garderen. Speciaal voor deze NWD is er een A-team samengesteld dat alle geheimen rond de A-lympiadefinale zal onthullen. Het team bestaat uit het winnende team plus enkele mensen ‘achter de schermen’.



## Wiskunde in de interne logistiek (Facility Logistics)

Prof.dr. René de Koster  
 Logistiek, Erasmus Universiteit Rotterdam  
 zaterdag 9.15-10.00 uur

Facility logistics (interne logistiek) houdt zich bezig met ontwerp en besturing van goederen-, mensen- of informatiestromen binnen bedrijven (fabrieken, container terminals, magazijnen, overslagcentra, ziekenhuizen), met als oogmerk een optimale afhandeling te krijgen (kosten, duur, capaciteit).

In mijn bijdrage zal ik vooral ingaan op voorbeelden van het gebruik van wiskunde in magazijnontwerp en besturing. Voorbeelden van vragen die aan de orde komen zijn:

- Hoeveel voorraad moet er liggen in een magazijn?
- Wat is de optimale afmeting (lengte/breedte) van een magazijn of van een magazijnstelling?

- Hoeveel magazijnkranen (zie foto) zijn nodig om een bepaalde doorzet te halen?
- Hoe diep moeten we stapelen?
- Hoe moeten we het magazijn indelen?
- Hoeveel laad- en losdeuren zijn nodig?
- Welk magazijn is het best?

En mogelijk nog andere. Alle bovenstaande vragen kunnen (tenminste deels) beantwoord worden met wiskunde op vwo-niveau. Gebruikte technieken zijn: optimalisatie van niet-lineaire functies, kansrekening, wiskundige programmering (lineair, niet-lineair) en elementaire wachtrijtheorie.

Zie ook <http://www.rsm.nl/rdekoster>



## Waarom wachten voor verkeerslichten?

Ir. Marko Boon

Faculteit wiskunde en informatica, TU Eindhoven

*zaterdag 10.30-11.15 uur*

Iedereen die regelmatig in aanraking komt met verkeerslichten, zal zich ongetwijfeld hebben afgevraagd waarom ze vaak zo onlogisch zijn afgesteld. Je zou toch mogen verwachten dat uitgerekend hier wiskundige methoden uitermate geschikt zijn om een afstelling te vinden die leidt tot de kortst mogelijke wachttijden? In dit praatje bekijken we een typische kruising met verkeerslichten in detail en wordt een overzicht gegeven van wiskundige technieken die in de laatste decennia ontwikkeld zijn om de wachttijden te analyseren. Via een korte introductie in de wachtrijtheorie, wordt duidelijk waarom het analyseren van wachttijden op kruisingen een lastig probleem is waardoor exacte analysemethoden zelden werken en toenadering tot benaderingsformules of simulaties gezocht zal moeten worden. Tot slot laten we een computerprogramma zien dat verkeer op de ingewikkeldste kruising van Eindhoven simuleert. Door samen te proberen om betere verkeerslichtafstellingen te vinden, zal duidelijk worden waar de knelpunten zitten, maar ook waar ruimte voor verbetering ligt.

## Ludolph van Ceulen: veel meer dan $3141592/1000000$

Wie de wereld van Ludolph van Ceulen (1540-1610) betreedt, gaat mooie dingen beleven. Van Ceulen onderrichtte de goede burgers (en hun zoons) in de reken- en schermkunst. Hoe hij als schermmeester presteerde weten we niet maar als rekenmeester stak hij met hoofd en romp boven de concurrentie uit. Dat blijkt uit een paar wiskunderuzies waar hij bij betrokken was, ruzies die draaiden om de vraag wie er zich een competent rekenmeester kon noemen. Dat was belangrijk vanwege de aanloop van klandizie, daarnaast geeft het ons smeuege literatuur rondom aardige wiskundepuzzels.



Intussen kreeg de Republiek vorm, en haar veldheer Prins Maurits had ingenieurs nodig voor zijn leger. Daarom richtte hij met Simon Stevin in Leiden een ingenieursschool op, waar Van Ceulen les ging geven in de landstaal. Dat bleef de rekenmeester doen tot zijn dood. In de twee belangrijkste boeken van Van Ceulen vinden we onder meer een keur van prachtige meetkundige problemen, die hij vaak met algebra oplost. Die combinatie van algebra en meetkunde was toen nog heel vooruitstrevend, en er zijn voorbeelden bij waar Van Ceulen (die geen academische vorming had genoten) duidelijk bij de wereldtop meedraait.

In dit jubileumjaar (400 jaar na zijn overlijden) laten we u kennismaken met de veelzijdigheid van Van Ceulens werk. Bovendien is er lesmateriaal waarmee u in de klas aan het werk kunt.

### Van cirkelkwadraturen, recht en krom

Dr. Steven Wepster

Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

vrijdag 14.00-14.45 uur

In de tijd van Ludolph van Ceulen heette pi nog geen pi. Men had het over cirkelkwadratuur, een benaming die verwijst naar een van de centrale problemen uit de klassieke Griekse meetkunde: een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel. Men had het ook wel over de verhouding tussen omtrek en diameter. Uit die Griekse oudheid kennen we een paar manieren om het probleem op te lossen die geen van alle louter passer- en liniaalconstructies gebruiken. In de Renaissance daarentegen vinden we volop constructies die dat juist wel doen.

Lindemann bewees pas in de 19e eeuw dat passer- en liniaalconstructies voor pi niet mogelijk zijn. Geen constructie maar wel fraai is deze: neem een cirkel en zijn ingeschreven regelmatige zeshoek. Tussen deze twee figuren zitten zes onderling gelijke

cirkelsegmenten. De bewering is nu dat 36 van zulke segmenten precies gelijk zijn aan het cirkeloppervlak. Waar of niet waar?

Ludolph van Ceulen nam een aantal van de vermeende cirkelkwadraturen op de korrel en hij berekende zelf een voor die tijd enorm groot aantal decimalen van  $e$ ,  $\pi$ , zullen we maar zeggen. We gaan kijken naar een aantal juiste en onjuiste benaderingen van het probleem. Hoe zat Van Ceulens berekening in elkaar? Welke in omloop zijnde alternatieven bekritiseerde hij? Welke argumenten gebruikten de partijen, en op welke tradities konden ze zich beroepen? En wat kunnen we leren van de discussies uit het verleden? Kortom, u krijgt enerzijds een brokje geschiedenis rondom het eerste transcendente getal waar uw leerlingen mee in aanraking komen, en anderzijds krijgt u, die dagelijks beroepsmatig bezig bent met het verbeteren van fouten, een blik op de fouten uit het verleden.

## Ludolph van Ceulen – Lesmateriaal van toen bewerkt voor leerlingen van nu

Ing. Marjanne de Nijs en Margot Rijnierse  
Chr. Scholengemeenschap De Populier, 's-Gravenhage  
vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)



Het leuke aan de wiskunde uit de tijd van Ludolph is, dat veel onderwerpen van de wiskunde waar de leerlingen van nu mee te maken krijgen toen nog volop in beweging waren. Wiskunde en rekenen hadden nog geen belangrijke positie op school en school was nog niet verplicht. Veel ouders lieten hun kinderen lessen volgen bij privédocenten (rekenmeesters) als Ludolph van Ceulen. Het werk van Ludolph loopt dan ook uiteen van het uitleggen van het positiestelsel van getallen en het omrekenen van ponden in penningen, miten en groten, tot meetkundige problemen waarmee hij zich kon meten met de beste Nederlandse en buitenlandse wiskundigen.

In de boeken van Van Ceulen voor studenten van toen hebben we gezocht naar onderdelen die geschikt zijn als lesmateriaal voor de leerlingen van nu. De landmeetproblemen, sinustabellen en tafels van interest, het wortelrekenen en koordenvierhoeken hebben ons geïnspireerd. We hebben de soms wonderlijk mooie, maar soms ook wonderlijk onbeholpen meetkunde van Van Ceulen tot leven gebracht en de lessen van Van Ceulen vertaald in wandpuzzels en 'gegoochel' met driehoeken. Een intrigerend vraagstuk rond de koordenvierhoek leidde zelfs tot een zebraboekje.

Voor bijna elke klas van het havo/vwo ligt er een les, lessenserie of spel klaar om met Ludolph aan de gang te gaan. U gaat in de workshop op verschillende manieren aan het werk om de rijkdom van het materiaal te ervaren. En u gaat uiteraard niet met lege handen naar huis!

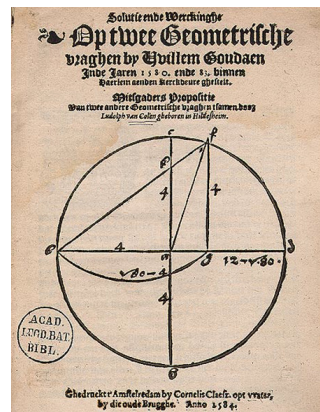
N.B. In de workshop komen passer, potlood en liniaal goed van pas!

## Ruzie en rekenvaardigheden onder rekenmeesters: Van Ceulen, Petri en Goudaen in conflict

Drs. Jantien Dopper en Wiggert Loonstra  
Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht  
zaterdag 9.15-10.00 uur

Rekenmeesters in de zestiende en zeventiende eeuw hadden de gewoonte meetkundige opgaven te verspreiden door middel van pamfletten en aanplakbiljetten. Door het uitschrijven van deze vraagstukken daagde een rekenmeester de ‘liefhebbers van de edel kunst’ uit en door het oplossen van de vraagstukken kon een rekenmeester zijn talenten laten zien. Een karakteristieke rekenmeesteropgave vereiste niet enkel meetkundig inzicht, maar ook een flinke dosis rekenvaardigheid. Met enige regelmaat ontstond er echter ruzie tussen vraagsteller en inzender over de geldigheid van de oplossing. Deze ruzie kon zowel betrekking hebben op de geldigheid van de meetkundige redeneringen als op juistheid van de berekeningen. De inzet van deze ruzies was de vraag wie een bekwame rekenmeester was en wie niet, en aan welke eisen een bekwame rekenmeester moest voldoen. Rekenvaardigheden en algebraïsche vaardigheden speelden hierbij een belangrijke rol.

In de jaren 1580–1584 kregen zowel Ludolph van Ceulen als de Amsterdamse rekenmeester Nicolaas Petri aanvaringen met de Haarlemse rekenmeester Willem Goudaen. In deze workshop zullen we deze ruzie bestuderen. Naast een smeug verhaal met vele verbale uitspattingen zullen we u de meetkundige problemen presenteren die de aanleiding waren tot deze ruzie. We zullen zien dat Van Ceulen en Petri verschillende oplossingstechnieken gebruikten: zowel met als zonder algebra. Tevens zullen we aandacht besteden aan de rekenvaardigheden van Van Ceulen en Petri en in het bijzonder aan het rekenen met wortelvormen. We zullen laten zien onder welke voorwaarden de wortel uit een getal van de vorm  $\sqrt{a} + b$  zelf weer van de vorm  $\sqrt{c} + d$  is.



Kortom: rekenmeesters uit vervlogen tijden dagen u uit. Durft u de uitdaging aan te gaan?

## **Van Ceulen en Snellius over paren van een lijnsegment en een getal: een dialoog**

Dr. Liesbeth de Wreede

Medische statistiek en Bioinformatica, LUMC Leiden

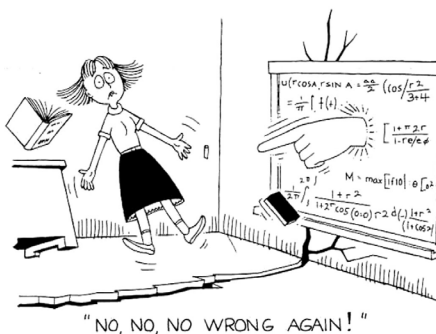
*zaterdag 10.30-11.15 uur*

Ludolph van Ceulens belangrijkste leerling was Willebrord Snellius (1580-1626). Snellius, die later hoogleraar wiskunde aan de Leidse Universiteit werd, is nu vooral bekend vanwege zijn ontdekking van de brekingswet van licht, maar in zijn eigen tijd was zijn reputatie gebaseerd op zijn werk in andere delen van de wiskundige wetenschappen. Dankzij de lessen van Van Ceulen was hij geïnteresseerd geraakt in het oplossen van meetkundige problemen. Waar Van Ceulen graag nieuwe technieken onderzocht en de bestaande creatief gebruikte, was Snellius terughoudender, omdat hij zich zorgen maakte over de grondslagen van die technieken.

De verschillen tussen hun manieren van werken kunnen we heel mooi terugvinden in de *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*, Snellius' Latijnse vertaling en bewerking van Van Ceulens *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*, beide verschenen in 1615. Van Ceulen en Snellius koppelden getallen aan lijnsegmenten en gingen daarmee optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De klassieke, Euclidische meetkunde werkte zonder getallen en dus vernieuwden Van Ceulen en Snellius hier de traditie. De obstakels die ze daarbij ondervonden helpen ons te begrijpen waarom Descartes' iets latere vernieuwing van de meetkunde – het systematisch inzetten van algebra om meetkundige problemen op te lossen – door wiskundigen niet zonder slag of stoot geaccepteerd werd. In deze workshop gaat u zich verwonderen over de combinatie van meetkunde en getallen en voorbeelden zien waarmee uw leerlingen ook kunnen leren dat die combinatie niet altijd vanzelfsprekend geweest is.

## (Waarom) is wiskunde moeilijk?

Leerlingen zien vaak weinig of geen betekenis in de abstracte wereld van de wiskunde: ze kunnen ‘het’ en zijn bereid zich verder te verdiepen, of ze haten het, waardoor ze ook in hun vervolgopleiding geen enkele voeling of band meer willen hebben met wiskunde. Waarom speelt dit nu juist bij het vak wiskunde? Waarom is dat zo moeilijk? In dit thema gaan we op zoek naar antwoorden op de vraag: ‘Waarom wordt wiskunde door leerlingen als moeilijk ervaren?’



### Voorbeeldgestuurd onderwijs: lesgeven vanuit de onzekerheid

Dr. Elise Boltjes

Noordelijke Hogeschool, Leeuwarden

vrijdag 14.00-15.00 uur (60 minuten)

Voorbeeldgestuurd onderwijs is een onderwijsmethode die uitgaat van de onzekerheid van de leerling. De onzekerheid van de leerling vermindert door niet aan het begin van het leertraject naar de oplossing van een probleem te vragen. Voorbeeldgestuurd onderwijs begint met een opgelost probleem waarvan de leerling aanvoelt dat het klopt. De vraag aan de leerling is dan ‘Hoe kom je tot de gegeven oplossing?’ De leerling formuleert vervolgens met eigen woorden de grote lijnen om tot de oplossing te komen: zijn eigen oplossingsrecept. Met behulp van zijn eigen oplossingsrecept kan de leerling gelijksoortige problemen oplossen. In traditioneel onderwijs ga je meestal op zoek naar de oplossing van een probleem. Voorbeeldgestuurd onderwijs is net andersom: je hebt een opgelost probleem en de vraag is ‘puzzel uit hoe je aan de oplossing komt’.

Start bij wiskunde met de leerling minstens twee opgeloste problemen te geven en laat ze zelf uitpuzzelen hoe ze aan de oplossing komen.

Als didactische ondersteuning volgt dan de uitleg van een eerste voorbeeld op het bord. Als de leerling het begrijpt, dan wordt vaak het bord schoongemaakt en volgt er een tweede voorbeeld. Zonde, dan doe je jezelf als leerkracht te kort! Het eerste voorbeeld laten staan, het tweede toevoegen en vervolgens kan het abstraheren beginnen: wat zijn de overeenkomsten en verschillen van deze twee voorbeelden? Wat doen we in beide problemen om tot een oplossing te komen? Het oplossingsrecept is daarbij weer het eindresultaat. Aan het begin van het leertraject zijn bij voorbeeldgestuurde didactiek de antwoorden gegeven, dus de vraag over goed of fout blijft achterwege.

Daar voelen meisjes zich veel zekerder bij en jongens ook.

Tijdens de workshop wordt de essentie van voorbeeldgestuurd onderwijs weergegeven aan de hand van voorbeelden uit het dagelijks leven, natuurkunde en rekenen/wiskunde.

Zie: [www.VoorbeeldgestuurdOnderwijs.nl](http://www.VoorbeeldgestuurdOnderwijs.nl)

## **Math anxiety en self efficacy: van waar komt die angst voor wiskunde vandaan en wat is eraan te doen?**

Lut De Jaegher

Lerarenopleiding Arteveldehogeschool, Gent, België

*vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)*

MovingMath is ontstaan vanuit de vaststelling dat heel wat kinderen, jongeren en volwassenen het vermogen om spontaan en creatief oplossend te denken verliezen, zodra ze dit kaderen binnen de context 'wiskunde'. Als je bijvoorbeeld aan een jongere vraagt hoeveel procent hij heeft behaald voor een bepaald vak, zal hij dat snel voor je kunnen uitrekenen. Maar stel je dezelfde vraag in de context van een wiskunde vraagstuk, dan lukt het plots niet meer. Het vermogen om probleemoplossend te denken is niet zoek, maar wel het geloof in het eigen kunnen op dat vlak. De context wiskunde blokkeert bij veel mensen het denken door wiskundeangst (math anxiety) en verdwenen zelfvertrouwen (self efficacy). Om wiskunde aantrekkelijk te maken staat vaak in de richtlijnen dat men de wiskunde zo praktisch mogelijk moet maken. Jongeren moeten ondervinden wat ze met wiskunde kunnen doen.

MovingMath keert deze redenering om. Als je kinderen en jongeren bewust maakt van het feit dat ze probleemoplossend denken en abstraheren altijd al in zich hebben gehad en het spontaan toepassen in hun dagdagelijks leven, zullen ze het ook gemakkelijk durven doen in een wiskunde context.

Bij MovingMath gebeurt het 'ontdekken' via dans en beweging. Dansen, ritme, muziek en het creëren van eigen choreografieën staan hierbij centraal. Abstract en probleemoplossend denken, wiskundig communiceren of aan wiskunde doen, is geen uitgangspunt, maar wel een spontaan gevolg. Pas helemaal aan het einde van elke danssessie wordt hiernaar teruggekoppeld.

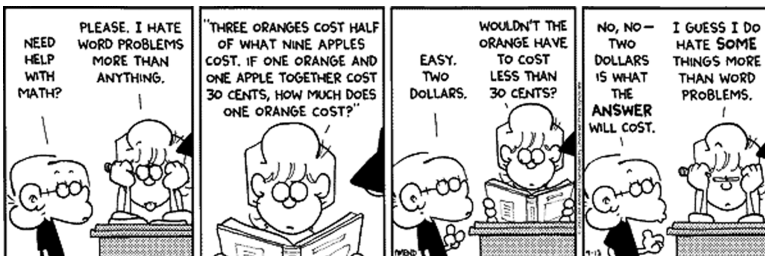
## Het wat en waarom van obstakels in wiskundig redeneren

Prof.dr. Wim van Dooren  
Katholieke Universiteit Leuven, België  
zaterdag 9.15-10.15 uur

Heel wat onderzoekers binnen de ‘psychologie het wiskundeonderwijs’ hebben een bijzondere interesse voor de fouten die leerlingen maken bij het oplossen van wiskunde-problemen, en voor het verklaren van deze fenomenen. Vaak blijkt dat leerlingen alle nodige kennis hebben om de problemen correct op te lossen, maar om allerlei redenen maken ze toch fouten. Is wiskunde dan werkelijk zo moeilijk? Of is wiskunde doen moeilijk? Leren we het verkeerd aan? Waar komen de moeilijkheden precies vandaan? Zijn ze te vermijden? Of moeten leerlingen door een fase waarin ze die fouten maken? In deze workshop gaan we op zoek naar allerlei obstakels die zich kunnen voordoen wanneer leerlingen wiskundig redeneren, en naar de achterliggende oorzaken van die obstakels. We zullen vertrekken van een grote set voorbeelden uit de onderzoeksliteratuur, die telkens een fout illustreren die leerlingen vaak maken bij het oplossen van wiskundige problemen.

We zullen het hebben over fouten op heel erg eenvoudige tot wat complexere problemen uit diverse gebieden van de wiskunde (rekenvraagstukken, meetkunde, kansrekening, calculus, getaltheorie, ...), die gemaakt worden door leerlingen van uiteenlopende leeftijden en expertiseneiveaus. Eerst gaan de deelnemers zelf in kleinere groepen op zoek naar mogelijke verklaringen voor de gemaakte fouten. Daarna vatten we deze samen, en proberen we ze van wat meer theoretische achtergrond te voorzien. In bepaalde gevallen zal blijken dat de problemen intrinsiek (dus wiskundig) moeilijk zijn, terwijl fouten in andere gevallen te wijten zijn aan de manier waarop het menselijk denken zelf is georganiseerd, en in nog andere gevallen kan gewezen worden naar de onderwijsaanpak. Maar meestal zal een combinatie van verklaringen nodig zijn.

P.S. Fouten maken is in deze sessie toegestaan! (Graag zelfs 😊)



## **Meisjes en Wiskunde**

Drs. Cristien van Dijk  
VHTO, Amsterdam  
*zaterdag 10.30-11.30 uur*

In deze werksessie zal ingegaan worden op de verschillende keuzes die jongens en meisjes op havo en vwo maken als het om wiskunde gaat. Zowel bij de profielkeuze als bij de keuze voor een vervolgopleiding kiezen meisjes veel minder vaak voor wiskunde (B) dan jongens. Uit een internationale vergelijking zal blijken dat deze keuze voor bèta/techniek in het algemeen met name in Nederland erg verschillend is voor jongens en meisjes.

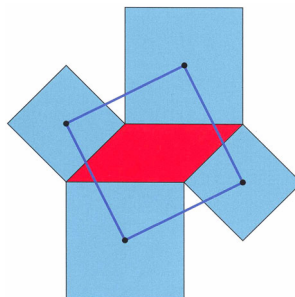
Vervolgens zal ingegaan worden op de oorzaken van deze keuzeverschillen. Waarom kiezen in Nederland zo weinig meisjes voor wiskunde (B)? Hoe is de houding van meisjes ten opzichte van wiskunde? En hoe kunnen wiskunde-docenten invloed uitoefenen op die keuze?

## BMW, bezig met wiskunde

Tijdens de NWD kun je volop luisteren en kijken naar mooie presentaties, maar het is ook leuk om zelf wiskunde te doen.

In dit thema gaan de deelnemers actief aan de slag met wiskunde. Zo is er een workshop waarin weer eens duidelijk wordt waarom digitale tools niet in de meetkundeles mogen ontbreken. Uit Vlaanderen komen puzzels en spelletjes met een typisch Belgische inslag. Liefhebbers van meetkundig redeneren kunnen hun hart ophalen in een workshop over sangaku's. Tijdens een historisch getinte workshop over 'driepoot-meetkunde' kunt u weer even ervaren hoe het is om leerling te zijn.

Kortom, een serie praktische, uitdagende workshops waarin u niet achterover kunt leunen maar zelf aan het werk gaat!



### Sangaku's

Hans van Lint en Jeanne Breeman

Zwolle

vrijdag 14.00-15.00 uur (60 minuten)

Eeuwen geleden al hingen er in sommige Japanse tempels houten paneeltjes met een meetkundige tekening erop. De tekening beeldt een stelling uit, terwijl er geen tekst bij staat. De toeschouwer moet zien wat gegeven is en wat hij zou moeten bewijzen.

Zo'n paneeltje heet een sangaku.

Nu er in de bovenbouw van het vwo veel meer vlakke meetkunde voorkomt lijkt het ons leuk en nuttig om met elkaar en in groepjes een aantal sangaku's te gaan onderzoeken. De vlakke meetkunde is bij uitstek geschikt om het deductieve vermogen te oefenen. Naast het toepassen van een diversiteit aan eigenschappen en stellingen: Pythagoras, goniometrie, hoeken en bogen, rotaties en dergelijke, is het ook vaak gewoon mooi om naar zo'n plaatje te kijken. Soms verbeeldt een sangaku een elegante stelling, soms is hij visueel aantrekkelijk.

In de workshop zal blijken dat er soms naast een berekening ook een meetkundige oplossing te bedenken is. De deelnemers zullen het grootste deel van de beschikbare tijd in groepjes werken aan het bestuderen, bewijzen en beoordelen op wiskundige en esthetische waarde van een groot aantal sangaku's. Er zullen eenvoudige, gewone en ook vrij moeilijke voorbeelden te zien zijn. Indien het organisatorisch mogelijk is, zullen enkele groepjes af en toe gebruik kunnen maken van CABRI.

We hopen dat de groepen zelf de oplossingen vinden, maar we zullen ook een lijst geven met meetkunde stellingen, als aanvulling op de formulekaarten, en ook tips om tot een oplossing te komen.

De workshop is geschikt voor liefhebbers van vlakke meetkunde, van mooie geometrische plaatjes en vooral voor liefhebbers van de uitdaging om zelf een bewijs te zoeken. Deelnemers wordt verzocht passer en liniaal mee te nemen.

## **Driepootmeetkunde – diepzinnige wiskunde voor beginners**

Pedro Tytgat

Sint-Pieterscollege, Leuven, België

*vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)*

Hoe kun je leerlingen laten kennismaken met het voor hen vrij onbekende ‘abstract redeneren’, zonder echter meteen de hele klas beduusd achter te laten?

Aangezien ze zijn opgegroeid met realistische wiskunde zou zo’n kennismaking moeten starten vanuit een zeer concrete context, die een snelle en zinvolle overschakeling naar een abstracte behandeling mogelijk maakt. De bedoeling zou zijn om deze voor leerlingen nieuwe maar fundamentele wiskundige denkwijze op een haalbare manier in te voeren en bij de echte wiskundezielen uit de groep hopelijk een gevoelige snaar te raken, die hun interesse voor een verdere wiskundestudie aanwakkert.

Ik was al een tijdje op zoek naar een context die de bovenstaande onderneming mogelijk zou maken, toen ik eind 2007 via het leerkrachtentijdschrift *Uitwiskeling* precies vond wat ik zocht. Vertrekend van een eenvoudige mini-meetkunde (de zgn. ‘driepootmeetkunde’) gaan wiskundig sterke leerlingen van het 6e jaar zelf op zoek naar eigenschappen, wordt hen aangeleerd hoe ze binnen een abstract kader dergelijke eigenschappen kunnen bewijzen en hoe ze uit een reeks eigenschappen verschillende axiomasysteem kunnen destilleren. Dit vormt een prima voorbereiding op een verdere studie van axiomatische systemen, modellen, bewijsbaarheid, ...



In deze workshop laat ik u kennismaken met de ‘driepootmeetkunde’ en haar mogelijkheden, door u zelf aan het werk te zetten. Op het eind van deze praktische sessie geef ik u een overzicht van het verdere verloop van mijn cursus, waarbij een meer algemene behandeling van axiomatische systemen het mogelijk maakt om op een betekenisvolle manier euclidische en niet-euclidische meetkunde(n) te bespreken.

## De mirascoop

Bert Wikkerink

CSG Liudger, Drachten

vrijdag 15.30-16.30 uur (60 minuten)

Het lijkt een beetje op een ufo. Een soort schotel waarop een voorwerp ligt, maar als je het probeert aan te raken is het er niet. Het ziet er raadselachtig uit en nodigt uit tot verder onderzoek. Hoe werkt het? Waarom zie je een voorwerp op een plek waar het niet ligt?

Is er ook een wiskundige verklaring voor?



In deze workshop gaan we op zoek naar de werking van deze zogenaamde mirascoop. Aan de hand van een serie opdrachten komen we achter het geheim van de mirascoop en met behulp van een dynamisch meetkunde pakket onderzoeken we de meetkunde die hier bij hoort.

Het onderwerp leent zich bij uitstek voor een toepassing in de klas.

## Leuke problemen oplossen

Odette De Meulemeester

KSO Glorieux, Ronse (België)

vrijdag 15.30-17.00 uur (90 minuten)

De workshop gaat over een verzameling van leuke onderwerpen uit mijn wiskundeonderwijs. (leerlingen van +/- 14 jaar). Je maakt kennis met een aantal kleine puzzeltjes die dienen om de aandacht voor een probleem aan te wakkeren. Onze 'rekenrups' kan heel makkelijk opgelost worden met excel maar is ook te vinden met het oplossen van ongelijkheden.

Iedere deelnemer krijgt een rechthoekpuzzel waarmee oefeningen op omtrek en oppervlakte gemaakt kunnen worden. Met Pythagoras kan men de diagonalen berekenen. Deze laatste stelling beheerst de workshop. Mooie toepassingen kunnen bedacht worden met piramidepuzzeltjes. We gaan figuren versnijden. Ik kan het niet laten van hierbij een paar prachtige voorbeelden met pentomino's te geven. Een voorsmaakje kan je vinden op de site <http://pentomino.wirisonline.net> bij versnijdingen.

In deze workshop gaat het vooral over het bekijken van problemen op verschillende manieren, je te laten verwonderen en te laten verrassen.



Voorbeeld: we bekijken een probleem dat je kan oplossen met gelijkvormige driehoeken maar even goed op te lossen is met het bepalen van de afstand van twee punten die de snijpunten zijn van rechten waarvan we de vergelijking kunnen opstellen.

Als we de tijd vinden eindigt de workshop met een beetje magie.

Vragen en wensen kan je altijd vooraf mailen naar o.d.m@fulladsl.be

## Ruimtelijke polygonen versterken: (geen) kunst

Dr.ir. Tom Verhoeff

Faculteit Wiskunde & Informatica, TU Eindhoven

*zaterdag 9.15-10.00 uur*

Een (vlak) schilderijlijstje wordt meestal gemaakt door vier balkjes middels verstek te verbinden tot een rechthoek. De naden van de balkjes sluiten dan overal netjes aan. Het lijstje omvat misschien kunst, maar is het zelf niet. Als de balkjes echter een ruimtelijk polygoon moeten volgen, dan sluiten de naden bij gebruik van verstekverbindingen in het algemeen niet meer netjes. Je moet er wat (wiskunde) voor bedrijven om dat toch voor elkaar te krijgen. Daarvoor zijn verschillende technieken.

We bespreken er hier drie: (wiskundig) prutsen, roosterpaden en polygonen met constante torsie. Om meer inzicht te krijgen is het handig om drie-dimensionale turtle geometry te gebruiken (onze ruimtelijke intuïtie blijkt erg beperkt).

We illustreren een en ander aan de hand van de wiskunst van Koos Verhoeff.

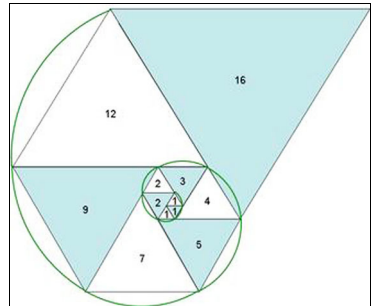


# Losse lezingen

## Hexadecicuriosa

Dr. Hans Melissen  
Faculteit EWI, TU Delft  
vrijdag 14.00-14.45 uur

In 2010 wordt de 16e NWD gehouden. Dat zou een reden kunnen zijn om eens stil te staan bij wiskundige aspecten van het getal 16. Maar is die aandacht eigenlijk wel op zijn plaats? Zestien is weliswaar een kwadraat en ook een van de vele machten van twee, maar het lijkt het wel mee op te houden. Toch lijkt wiskunde soms net politiek, over elk onderwerp valt wel iets te vertellen. Nadere studie leert dat ook 16 wel eigenschappen heeft die het tot een bijzonder getal maken. Zo is 16 te schrijven als 24, maar ook als



42 en dat is bijzonder. Er blijkt zelfs een speciaal verband te bestaan tussen het jaartal 2010 en het getal 16. Tijdens deze lezing zullen we zien dat een saai getal toch ook boeiend kan zijn en waarom 16 niet meer weg te denken is uit onze maatschappij.

## Open Courseware Logica

Prof.dr. Johan van Benthem, Jan Jaspers en Prof.dr. Jan van Eijck  
ILLC, Universiteit van Amsterdam en  
CWI, Amsterdam  
vrijdag 14.00-14.45 uur

Medio 2009 ging het Open Course Logic Project, op initiatief van prof. Van Benthem (UvA), van start. In dit project wordt vrij toegankelijk onderwijsmateriaal voor logica-cursussen ontworpen. Dit materiaal bestaat uit wereldwijd, via internet, aangeboden e-books voorzien van geavanceerdere elektronische ondersteuning, met name interactieve animaties en programmatuur.

De eerste categorie beoogt vooral de visualisatie van de lesstof, en de laatst genoemde is bedoeld om studenten zelfstandig te laten oefenen.

In eerste instantie richt het project zich op inleidende cursussen voor het universitaire onderwijs. In een later stadium zal zowel voor gevorderd universitair onderwijs als ook voor de bovenbouw van het middelbaar onderwijs vergelijkbaar lesmateriaal gemaakt worden.

In de presentatie zullen we vooral aandacht besteden aan de eerder genoemde interactieve middelen die het Open Course Logic Project aanbiedt.

Het materiaal wordt op het ogenblik al op verschillende plekken in het onderwijs gebruikt en getest. De eerste twee cursussen zijn in het afgelopen najaar van start gegaan op het Amsterdam University College en aan de Tsinghua Universiteit in Beijing. Volgend jaar zullen gelijksoortige cursussen ook gegeven worden in Sevilla (Spanje) en Stanford (VS).

Voor meer informatie zie: [www.science.uva.nl/~jaspars/logicinaction](http://www.science.uva.nl/~jaspars/logicinaction)

## Ieder zijn eigen dageraad!

Aad Goddijn

Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde, Universiteit van Utrecht

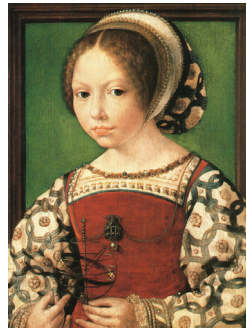
*vrijdag 15.30-17.00 uur*

In deze werkgroep bepaalt u zelf de tijden van zonsopgang en -ondergang op uw geboortedag op uw geboorteplek. Daartoe maken we samen eerst een armillarium van 120-grams papier; dat is wat minder kostbaar dan het armillarium van het meisje dat Jan Gossaert schilderde in het begin van de 16e eeuw.

We bepalen daarmee de lengte van de uitverkoren dag, maar daarmee zijn we bepaald nog niet klaar. De zon is namelijk wel een prachtige lichtgevende klok, maar helaas niet van nauwkeurige Zwitserse makelij. De laatste zonsopkomst van het jaar bijvoorbeeld valt op het noordelijk halfrond meestal op 30 december, de vroegste zonsondergang op 12 december, de kortste dag daartussen op 21 december. Midzomers zijn er soortgelijk onwaarschijnlijkheden te beleven, maar die zijn stevast minder extreem. Toch gaat het met behoorlijke nauwkeurigheid bepalen van de juiste tijden in deze werkgroep vast lukken.

De werkgroep is gebaseerd op materiaal dat gebruikt is in 5 vwo-klassen met wiskunde B.

U neemt zelf me: een goede passer, liniaal met millimeterverdeling, een gradenboog waar de puntjes nog niet van zijn afgebroken. Verder een rekenmachine die sinus en tangens aan boord heeft, een schaar met scherpe punt, een rolletje plakband en de nauwkeurige coördinaten van uw geboortelocatie, vooraf verkregen via Google Maps. U krijgt: bouwplaten voor het armillarium en informatie met inzicht over aarde, zon, tijdsvereffening, tijdszones, zomertijd en het beroemde analemma, de achtvormige jaardans van de zon. Na de werkgroep is er voor elke deelnemer aan de werkgroep bovendien nog een gulle 37 minuten en 20 seconden gratis daglicht beschikbaar, want dit is Noorwijkerhout!



## **Boekbespreking: 100 essential things you didn't know you didn't know**

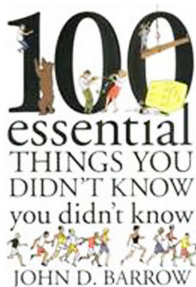
Lidy Wesker

Bonhoeffer College, Castricum

ILO, Universiteit van Amsterdam

*zaterdag 9.15-10.00 uur*

Het lijkt wel of er de laatste tijd steeds meer boeken verschijnen met, over of rondom wiskunde. Veel boeken gaan over de ontstaansgeschiedenis van de wiskunde, over historische figuren die belangrijk zijn geweest voor de wiskunde of over de wiskunde zelf in toepassingen of in de wetenschap. Wiskunde komt in alle facetten naar voren in romans, stripverhalen, anekdotes of korte verhalen. De vraag is of en hoe je deze schat aan informatie met je leerlingen kunt delen.



In deze workshop wordt er geëxploreerd hoe je de 'wiskunde' boeken de klas in kunt halen. De start van deze workshop bestaat uit de bespreking van één van de vele mogelijke boeken; '100 essential things you didn't know you didn't know' van John D. Barrow (isbn 9781847920034). Het is daarom van belang om dit boek van te voren gelezen te hebben en om alvast een idee te hebben hoe je dit specifieke boek in de klas in zou kunnen zetten.

Natuurlijk is er in deze workshop ook gelegenheid om uw eigen mooie voorbeelden van het gebruik van boeken in uw klas met anderen te delen. Neem daarvoor ook zeker uw eigen voorbeeldboeken en lessen mee. Op deze manier hopen we op een uitgebreid repertoire aan mogelijkheden om het boek een plek in de klas te geven.

## **RekenVOort: rekenen in3/4 vmbo**

Vincent Jonker en Monica Wijers

Freudenthal Instituut, wiskunde, Universiteit Utrecht

*zaterdag 10.30-11.15 uur*

In twee sectoren van het vmbo (Zorg & Welzijn en Economie) is er geen verplichting om het vak wiskunde te volgen in de leerjaren 3 en 4. Deze leerlingen moeten wel het rekenniveau 2F halen aan het eind van het vmbo.

Voor de leerlingen uit de beroepsgerichte leerwegen kan het rekenen gekoppeld worden aan de beroepsgerichte vakken uit de sector.

We beschouwen bovenstaande op twee niveaus:

1. Breder perspectief

Wat voor rekenen heb je nodig voor jouw schoolloopbaan vmbo-mbo (en evt. daarna hbo) en wat heb je al als bagage aan boord als je van de basisschool af komt. Als er in detail naar het vmbo gekeken wordt blijkt deze vraag niet eenvoudig te beantwoorden te zijn. Een veelgehoorde opmerking uit het vmbo is dat het o.a. moet gaan om functioneel gebruik van rekenen, rekening houdend met de specifieke vragen van de betreffende sector.

## 2. Project-perspectief

In het project RekenVOort vmbo worden hiervoor rekenmodules ontwikkeld.

Functioneel rekenen staat daarbij voorop, dit wordt ondersteund met oefenmodules. Er is ook een website met extra materiaal, waaronder oefenspelletjes. In deze presentatie maakt u kennis met de achtergronden en het materiaal en hoort u iets over de eerste praktijkervaringen op de pilotscholen.

Zie voor de oefensite: [www.nvww.nl](http://www.nvww.nl) - rekenvoort



## Winnaars workshop

Zeven docenten stuurden dit jaar een voorstel in om een werkgroep op de NWD te verzorgen. De jury koos er twee uit.

### **Workshop Levende statistiek: Statistiek-module Wiskunde D**

Dr. Liesbeth de Wreede en drs. Jacob van Eeghen  
Medische statistiek en Bioinformatica, LUMC Leiden en  
*zaterdag 9.15-10.15 uur*

Statistiek is het meest gebruikte onderdeel van de wiskunde. Veel leerlingen met een N&G- of een N&T-profiel leren elementaire statistiek bij Wiskunde D op hetzelfde niveau als leerlingen met wiskunde A, maar dat niveau is nét niet hoog genoeg om het geleerde ook toepasbaar te maken in de praktijk. In het kader van ‘wiskunde in wetenschap’ hebben wij daarom materiaal voor een wiskunde-D-module ontwikkeld die wat dieper in de statistiek duikt.

In ons materiaal tonen we de relevantie van statistiek aan de hand van realistische, niet-triviale voorbeelden, die voor het grootste deel afkomstig zijn uit de biostatistiek, omdat statistiek veel wordt toegepast in de levenswetenschappen en omdat de gekozen voorbeelden toegankelijk zijn en goed op de interesses van een grote groep leerlingen aansluiten. Ook laten we hen kennismaken met echte data-analyse met behulp van een computerpracticum. Het materiaal wordt ontwikkeld door Jacob van Eeghen, leraar, en Liesbeth de Wreede, biostatistisch onderzoeker. Deze combinatie zorgt voor materiaal dat goed toegankelijk is voor leerlingen, met relevante methodes en aan de praktijk ontleende voorbeelden. De indeling van de workshop is als volgt:

- laten zien wat nodig is om een eenvoudig realistisch praktijkvoorbeeld aan te pakken
- uitleg van een stukje theorie over de t-toets en bijbehorende betrouwbaarheidsintervallen (5 vwo-niveau)
- voorbeeld van een profielwerkstuk waarin statistiek vruchtbaar toegepast is
- zelfwerkzaamheid: opgave aan de computer met speciale aandacht voor de interpretatie van de resultaten. We gebruiken de gratis te downloaden software R.

We vragen geen speciale voorkennis van de deelnemers, interesse in het onderwerp is genoeg.

Rob van Oord  
Coenecoop College, Waddinxveen  
*zaterdag 10.30-11.15 uur*

## Informatiemarkt

Op de informatiemarkt in de Rotonde, in de Boston 12/14 zaal en in de gangen kunt u stands vinden van organisaties, instellingen en instituten die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden. Er zijn stands van:

- APS, Utrecht [www.aps.nl/exact](http://www.aps.nl/exact)
- Boerhaave museum [www.museumboerhaave.nl](http://www.museumboerhaave.nl)
- Busy Brains/Denkspellen [www.denkspellen.nl](http://www.denkspellen.nl)
- Casio Benelux [www.casio.nl](http://www.casio.nl)
- CTWO [www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl)
- Day for Change [www.dayforchange.nl](http://www.dayforchange.nl)
- Educatieve Partners Nederland [www.epn.nl/getalenuimte](http://www.epn.nl/getalenuimte)
- Epsilon Uitgaven [www.epsilon-uitgaven.nl](http://www.epsilon-uitgaven.nl)
- Freudenthal Instituut [www.fi.uu.nl/nl](http://www.fi.uu.nl/nl)
- ITS Academy [www.itsacademy.nl](http://www.itsacademy.nl)
- Kangoeroe [www.math.ru.nl/kangoeroe](http://www.math.ru.nl/kangoeroe)
- Lekopro [www.lekopro-polydron.nl](http://www.lekopro-polydron.nl)
- Math4all [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl)
- NKBW [www.nkbw.nl](http://www.nkbw.nl)
- Noordhoff Uitgevers [www.noordhoffuitgevers.nl](http://www.noordhoffuitgevers.nl)
- NWO - LIO [www.nwo.nl/lio](http://www.nwo.nl/lio)
- NVvW [www.nvww.nl](http://www.nvww.nl)
- Optische Fenomenen [www.optische-fenomenen.nl](http://www.optische-fenomenen.nl)
- (Productief)
- Pythagoras [www.pythagoras.nu](http://www.pythagoras.nu)
- Selexyz [www.selexyz.nl](http://www.selexyz.nl)
- SLO [www.slo.nl/](http://www.slo.nl/)
- Stichting IMO 2011 [www.imo2011.nl](http://www.imo2011.nl)
- Texas Instruments [education.ti.com/educationportal/sites/NEDERLAND/homePage/index.html](http://education.ti.com/educationportal/sites/NEDERLAND/homePage/index.html)
- Twente Academy [www.onlineleeromgeving.nl](http://www.onlineleeromgeving.nl)
- Vierkant voor Wiskunde [www.vierkantvoorwiskunde.nl](http://www.vierkantvoorwiskunde.nl)
- Visiria Uitgeverij [www.visiria.nl](http://www.visiria.nl)
- Wiskunde Olympiade [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

De openingstijden van de informatiemarkt zijn:

vrijdag 10.00 - 11.00 uur

12.00 - 18.00 uur

zaterdag 08.30 - 11.45 uur

## Happy math hour (vrijdag)

- 17:00 tot 18:00 uur: signeersessie Vincent Icke ‘De ruimte van Christiaan Huygens’
- 17:30 tot 18:00: rondleiding kunstwerken Koos Verhoeff door Tom Verhoeff
- 17:15 tot 18:15: 15 minuten workshops van diverse organisaties op de infomarkt

### programma

- *APS*:  
Met een A4-tje kunnen verschillen interessante vouw-opdrachten worden uitgevoerd om in de klas te doen, als opdracht met verrassende uitkomst: (hé leuk!), als onderzoekopdracht (hè hoe zit dat?), als creatieve opdracht (ah, mooi!) of als didactische methode (oh, zo!). Het zal blijken dat niet alleen meetkunde zich voor een vouwopdracht leent, maar ook de parabool, hyperbool en dan ook de ellips(?). Wanneer je een gelijkzijdige driehoek vouwen kunt, komt de tetraëder in zicht. Gaat dat lukken? Veel inspiratie gewenst!
- *EPN*:  
Pilot algebraïsche vaardigheden.  
In het najaar 2009 organiseert getal & ruimte voor 50 scholen een pilot voor het gebruik van ict bij het oefenen van algebraïsche vaardigheden. In samenwerking met het Freudenthal Instituut is een reeks algebra-applets ontwikkeld die aansluiten bij Hoofdstuk 14 Algebraïsche vaardigheden van vwo B. Docenten en leerlingen gebruiken wisselend het boek en de applets om de algebraïsche vaardigheden te oefenen; een en ander afhankelijk van de beschikbaarheid van beamers, laptops en pc's. De docenten gebruiken de applets bij de klassikale instructie en nabespreking en volgen middels het leerlingvolgsysteem de vorderingen van de leerlingen; leerlingen hebben profijt van de applets door onmiddellijke feedback en van de zelftoetsen die een beeld van hun niveau generen. In de werkgroep doen Harm Houwing, auteur van getal & ruimte, en Peter Boon, medewerker van het Freudenthal Instituut, verslag van de ervaringen van docenten en leerlingen.
- *Math4All*:  
AlgebraKIT is een tool waarmee een leerling eindeloos algebraïsche vaardigheden kan oefenen, zoals differentiëren, integreren, vergelijkingen oplossen, ontbinden in factoren, rekenen met breuken. Naast eindeloos veel oefeningen, zijn er automatische gegenereerde antwoorden, uitwerkingen en uitleg. In deze workshop laten we zien hoe eenvoudig de tool vrij te gebruiken is voor docenten en leerlingen. Bovendien laten we extra mogelijkheden zien die de kracht van de tool (ook voor de toekomst) en de flexibiliteit illustreert. Meer informatie over AlgebraKIT op <http://www.math4all.nl> en <http://www.algebrakit.nl>

## Avondprogramma

- 21:00 tot 22:00 uur: vrijdagavond wiskundequiz
- 21:00 tot 22:00 uur: muziek en zang: Paul Drijvers
- 21:00 tot 0:00 uur: spelletjesavond
- 22:00 tot 0:00 uur: de band Swamp (Cajun, Zydeco, Blues)

De NWD is in belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes bieden u de gelegenheid van gedachten te wisselen met collega's. Maar, zoals u op de volgende pagina's kunt lezen, er is meer te doen!

Vrijdagavond na de hoofdlezing is er nog ruim gelegenheid om bij te praten en te ontspannen.

Het avondprogramma is dit jaar rondom Boston 9.

*De spelletjes* staan in de Atriumlounge. Dat geeft meer ruimte en lucht voor dit populaire onderdeel, daarnaast zullen er verschillende activiteiten plaatsvinden variërende van *quiz* tot *muziek*. Op enkele plekken in de gangen en lounge staan barren opgesteld waar u een drankje kunt bestellen en een plek kunt zoeken om met elkaar bij te kletsen. Ook het Cheers sportcafé (in de kelder) en de centrale bar (achter de receptie) zijn open.

### *De vrijdagavondquiz*

Na het overweldigende succes van vorig jaar, dit jaar weer een wiskundequiz op de vrijdagavond. Met de hele zaal spelen we een spannende voorronde, waarna ongeveer tien finalisten de eindstrijd met elkaar aangaan. Voor de beste drie deelnemers aan de finale zijn er leuke prijzen.

De quiz vindt plaats in Boston XX en begint om XX:XX uur. Zorg dat u er ruim op tijd bent, want het aantal plaatsen in de zaal is beperkt. De voorronde is een afvalrace met tweekeuzevragen. De opgaven van de quiz vereisen weinig wiskundige voorkennis, maar doen wel een beroep op uw creativiteit!

De quiz wordt dit jaar georganiseerd door de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade en wordt gepresenteerd door Marjolein Kool.

Ben je even klaar met wiskunde? Kom dan om 21.30 uur naar Boston 9, daar treedt vanaf 22 uur voor u op: 'Swamp'; een vijfköppige *band* met stomende Cajun, Zydeco en Blues.

[ERGENS EEN OPMERKING OVER DAY FOR A CHANGE (MICROKREDIET),  
michiel]

## Funrun

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de funrun op zaterdagochtend. We lopen weer het bekende rondje van precies 6 km. Deelname is gratis en als beloning krijgt u na afloop een T-shirt.

Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte (wissel)beker.

De snelste tijd in 2009 was 21:38, gelopen door Bas van Os. Nellie Verhoef liep met 30:43 de snelste tijd bij de vrouwen.



Vanaf 6.30 uur staan er koffie, thee en een banaan klaar in de lobby. De start van de funrun 2009 is stipt om 7.00 uur in de morgen, voor de ingang van NH Leeuwenhorst. Wandelen mag trouwens ook, maar dan adviseren we u het halve rondje van 3 km te doen en wat eerder te vertrekken. U kunt de funrun ook skeeleren.

Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn.

# Nationale Wiskunde Dagen 2011

De zeventiende Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op *vrijdag 4 en zaterdag 5 februari 2011*. Bij het organiseren van deze zeventiende NWD hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de NWD van dit jaar. U ontvangt daartoe ter plekke een *evaluatieformulier*.

Wij hopen dat u uw opmerkingen gedurende de twee dagen wilt noteren en het formulier aan het eind wilt deponeren in de blauwe bakken. Wij stellen uw mening zeer op prijs!

## Programmacommissie

Jan Aarts	Jan van Maanen
Hester Bijl	Hans van Lint
Henk Broer	Hans Melissen
Joke Daemen	Martin v. Reeuwijk
Michiel Doorman	Sjoerd Rienstra
Swier Garst	Michel Roelens
Tom Goris	Dirk Siersma
Job van de Groep	Hans Sterk
Adri Knop	Lidy Wesker
Marjolein Kool	

## Uitvoerend comité

Aldine Aalten	Tom Goris
Mieke Abels	Ank v.d. Heiden
Barbara v.Amerom	Bas Holleman
Theo v.d. Boogaart	Henk v.d. Kooij
Michiel Doorman	Jan de Lange
Paul Drijvers	Sonia Palha
Sylvia Eerhart	Wim v. Velthoven

Nationale Wiskunde Dagen  
Freudenthal Instituut  
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht  
tel. 030-263 55 54, fax 030-266 04 30  
email: [nwd@fi.uu.nl](mailto:nwd@fi.uu.nl), website: [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)

De Nationale Wiskunde Dagen worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden (ivLOS) van de Universiteit Utrecht.

De zesiende NWD wordt gesteund door bijdragen van NH Leeuwenhorst Hotels, Texas Instruments, Casio en 'getal en ruimte'.

**NH**  
HOTELES

 **TEXAS INSTRUMENTS**  
**CASIO.**

**getal & ruimte**  
op getal en ruimte kun je rekenen