Nationale Wiskunde Dagen

Noordwijkerhout, 3 en 4 februari 1995

Voorwoord en welkom

Welkom op de eerste Nationale Wiskunde Dagen! Toegegeven, het klinkt wat theatraal. *Nationale* Wiskunde Dagen? Nederland ligt er waarschijnlijk niet wakker van. Waarom dan toch deze naam gekozen?

De bedenkers van de Nationale Wiskunde Dagen zagen in het klachten- en moppercircuit dat Nederlanders zo eigen is een zeker patroon: leraren zien het inspirerende, het creatieve van de wiskunde niet meer. Leerlingen zien wiskunde als een dood en af vak, niet als een gelegenheid om interessante en uitdagende problemen op te lossen. Universitaire wiskundigen missen voeling met de realiteit van de schoolbanken. Leraren en universitaire docenten zouden eens met elkaar in discussie moeten gaan.

Natuurlijk, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren houdt regionale bijeenkomsten en een ieder jaar geslaagde inhoudelijke �landdag�. Bovendien heeft de verzorgingsstructuur een groot aanbod van allerlei cursussen waarin didactiek, pedagogiek en technologie in veel variaties aan de orde komen. De behoefte blijft echter groot aan leuke en echte wiskunde. Aan het praten met collega�s over deze turbulente tijden. Aan het leggen van contacten met universitaire wiskundigen en collega�s.

De eerste Nationale Wiskunde Dagen proberen in deze behoefte te voorzien. Er is getracht een inspirerend team van presentatoren aan te trekken, een grote variatie aan activiteiten aan te bieden en een ruime gelegenheid voor sociale contacten te cre�ren.

Door dit alles verwachten we dat u zaterdagmiddag voldaan, maar zeker ook vermoeid huiswaarts zult keren � en dat de tweede Nationale Wiskunde Dagen al in uw agenda zullen staan.

Veel plezier!

Jan de Lange
voorzitter programmacommissie / directeur Freudenthal instituut

Dank aan allen die bij de voorbereiding hun beste beentje hebben voorgezet en daarbij vanaf het allereerste begin vertrouwen hebben getoond in de Nationale Wiskunde Dagen.

Organisatie Nationale Wiskunde Dagen

De Nationale Wiskunde Dagen 1995 zijn een initiatief van het Freudenthal instituut. Het organiseert deze dagen onder auspici�n van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden (IVLOS) van de Universiteit Utrecht.

CONFERENTIEGIDS

NATIONALE WISKUNDE DAG

NOORDWIJKERHOUT

3 en 4 februari 1995

Inhoud

Bijzondere dank gaat uit naar Apple Computers voor het beschikbaar stellen van Power PC's, JCN Computersystemen voor het beschikbaar stellen van geavanceerde MS-DOS machines, en Philips voor het opstellen van een CD-i demonstratieset.

Plenaire lezingen

Het ontbinden van grote getallen in priemfactoren

Hendrik Lenstra
Department of Mathematics, University of California, Berkeley

Deze voordracht is gewijd aan het volgende probleem: hoe kan men van een groot natuurlijk getal zo snel mogelijk de ontbinding in priemfactoren bepalen?
Er zal een poging gedaan worden dit probleem in een bredere context te plaatsen, en geen beroep te doen op gespecialiseerde voorkennis.
De volgende aspecten zullen aan bod komen:

- waarom is het probleem interessant?
- heeft het enige toepassingen?
- wat is de geschiedenis van het probleem?
- wat zijn de technieken die men in de praktijk toepast?
- hoe groot zijn de getallen die men op het ogenblik in factoren kan ontbinden?
- wat zijn de voornaamste open problemen?

Literatuur en bronnen

Pomerance, C. (ed.). (1990). Cryptology and computational number theory. Proceedings of Symposium Applications. Mathematics 42, American Mathematical Society.
Lenstra, A.K. en H.W. Lenstra, Jr. (eds). (1993). The development of the number field sieve, Lecture Notes in Math. 1554. Springer-Verlag.

From figure to form - a geometrical excursion into nature

Vagn Lundsgaard Hansen
Mathematical Institute, Technical University of Denmark, Lygnby

The Greeks were convinced that the universe is structured according to mathematical laws. This lecture will focus on geometrical aspects of this philosophy and in particular on the interplay between the concrete and the abstract side of geometry.
Cosmic forms: From the planets' movements to the shape of an ellipse
We draw a line from the attempts in antiquity to model the movements of the planets, over Kepler and Copernicus to the shapes of the conics.
Polyhedra: From geometry to topology
We illustrate quantitative and qualitative aspects of geometry in the world of polyhedra, where Euler's theorem marks the step from geometry to topology.
Ornamental forms: From decorations to mathematical patterns
We examine the geometry of tilings of plane areas with regular polygons to demonstrate the limitations on the symmetries in regular patterns in the plane.
Optimal forms: From intuition to mathematical proof
By way of the isoperimetric problem we show the need for mathematical proofs.
Non-Euclidean geometry: From postulate to axiom
Around 1830 it turned out that the parallel postulate in Euclid's Elements cannot be proved; it has to be added as an axiom characterizing Euclidean geometry. We describe Poincaré's model of a non-Euclidean geometry: the hyperbolic plane.
Hyperbolic shapes: Tilings of the hyperbolic plane
Tilings of the hyperbolic plane are far richer than tilings of the Euclidean plane. We shall explain why.
Riemannian shapes: Geometry and topology of surfaces

As a topological object, a closed surface in 3-space without boundary edges is a sphere with a number (the genus of the surface) of handles attached. We shall explain how the geometry of the surface depends on the genus.
Curved shapes: From soap films to minimal surfaces
We take a look at curved shapes representable by soap films.
Forms in nature: The great book of geometry
As an example of geometry in nature, we describe the mathematics of the shell of a snail.

Literatuur en bronnen
Hansen, V. L. (1993). Geometry in Nature. Massachusetts, USA: K. Peters Ltd. Wellesley.
Hansen, V. L. (1994). The Magic World of Geometry - I. The Isoperimetric Problem. Elemente der Mathematik, Vol. 49, No. 2, 61-65.

Gyroscopes and boomerangs

Sir Christopher Zeeman
Hertford College, Oxford, United Kingdom

This lecture is taken from material that the lecturer has been teaching in Mathematics Masterclasses to gifted 13 year-olds during the last 15 years.

Starting from a form of Newton's law the lecture will develop the theory of gyroscopes, both qualitative and quantitative. Since 13 year-olds will not have done calculus and relatively little algebra, the development uses no calculus and not much algebra. It will explain why gyroscopes process and in which direction they process, by proving the gyro law: the spin axis chases the torque axis. The lecture will then prove a quantitative formula for predicting the rate of procession of a spinning bicycle wheel, and will confirm the predictions by experiment. The experiments are simple and robust, using only home made equipment, and are therefore very suitable for classroom use.
The lecture will apply the theory with demonstrations to spinning tops, to explain why they go to sleep and then suddenly wake up. The lecture will then describe how to make and throw a boomerang, and will explain why a boomerang returns because it is both a gyroscope and an aircraft. Finally the lecturer will attempt to throw and catch a boomerang.

Literatuur en bronnen
The lecturer has made a video, also entitled `Gyroscopes and boomerangs', with an accompanying book containing notes, worksheets, solutions and appendices. The video lasts one hour, and is divided into three sections, between which the viewer is invited to tackle the worksheets. The video can be used either with teacher supervision in the classroom or by students studying alone. The appendices contain follow-up material including an introduction to calculus, the quantitative theory of boomerangs, and a rigorous proof of why a spinning hard-boiled egg will stand up on end.

The video and book can be purchased from the Royal Institution (attention Ms. Cripps), 21 Albemarle Street, London W1X 4BS, England. A copy will be on show at the meeting.

De betrekking tussen wiskunde en mijn kunst

Peter Struycken
Gorinchem

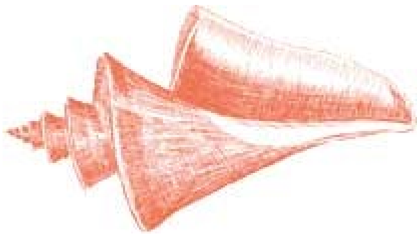
Wiskunde, in mijn geval een eenvoudige vorm van logica, bepaalt mijn beeldend werk. Voor mijn werk, met veranderende kleurverhoudingen als onderwerp, gebruik ik een computer. De rekenvoorschriften die ik bedenk - het geheel van voorwaarden en functies - bepalen de aard en het bereik van de visuele uitkomsten. Met deze rekenvoorschriften, die ik een functie laat zijn van tijd en ruimte, kunnen kleurbeelden van onbegrensde afmeting en detail onbeperkt in tijd veranderen. Maar nooit zal zelfs maar een fractie van een beeld op enigerlei tijdstip berekend worden dat niet volstrekt bepaald wordt door de logische vorm van de voorschriften.

Door de rekenvoorschriften te wijzigen kan ik andere beelden berekenen die, eveneens van onbegrensde afmeting, onbeperkt in tijd veranderen. Nooit zullen echter deze beelden overeenkomen met die uit eerdere voorschriften. Ieder voorschrift opent en begrenst een naar aard en bereik gescheiden visuele wereld die onbeperkt uitgebreid is.
En daarmee ligt ook de kwaliteit van de beelden vast. Die kwaliteit kan als goed of slecht beoordeeld worden door kenners van kunst, maar zij wordt iedere keer opnieuw en onveranderlijk door de aard en het bereik bepaald die de logische vorm van de voorschriften veroorzaakt op kleurverhoudingen in tijd en ruimte.

Alhoewel met bovenstaande de rol van de wiskunde voor aard, omvang en kwaliteit van mijn werk is aangegeven, blijft de vraag naar de zin om op deze gestructureerde manier kunst te maken onbeantwoord. Die vraag kan alleen vanuit de kunst beantwoord worden, waarbij de wiskunde geen rol speelt.

Thema wiskunde in de natuur

Fibonacci! Die naam schiet velen te binnen als we het over wiskunde in de natuur hebben. Konijnen worden al snel met Fibonacci geassocieerd, maar minstens zo mooi en zeker zo raadselachtig zijn de spiralen in het hart van de zonnebloem, of die van de denneappel. En schelpen, ook die van het logo van de Nationale Wiskunde Dagen, zitten vol wiskunde.



Exponentiële groei - is er een verband met Fibonacci, en met de Gulden Snede?
Maar er is meer - minimale oppervlakten in de natuur. De bijecel fascineert steeds weer om de prachtige wiskunde achter de zoemende bij. Trouwens, de navigatie van de bij is ook zo'n verbazingwekkend verschijnsel. Trekvogels blijken steeds weer in voor- en najaar ongelooflijke afstanden af te leggen zonder te verdwalen.
Natuur en periodiciteit horen bij elkaar als dag en nacht. En periodiciteit in de wiskunde is een belangrijk begrip.
Helaas zijn er binnen het programma keuzen gemaakt. Het gebied is te rijk. Maar wat dit jaar niet aan bod komt, bewaren we zeker voor toekomstige Nationale Wiskunde Dagen.

Optimaliseren in de natuur

Hans van Lint
Van der Capellen SG, Zwolle

In deze werkgroep worden voorbeelden van optimaliseringsproblemen uit de natuur gebruikt om docenten te stimuleren hun lessen te verrijken. Er wordt een keuze gemaakt uit:

- isometrie en allometrie bij plant en dier; hierbij zijn veel toepassingen van dubbel logaritmisch papier;
- oppervlaktespanning, adhesie en cellen;
- dichtste pakking van cirkels en bollen.

De wiskunde die bij deze voorbeelden aan de orde komt omvat:

- kortste en vlugste verbindingen;
- minimaliseren van de omtrek bij gegeven oppervlak, en andersom;
- minimale oppervlakken.

Er wordt een practicum uitgevoerd waarbij de deelnemers de hierboven genoemde voorbeelden zelf kunnen ervaren en bestuderen. In het practicum wordt gebruik gemaakt van zeepvliezen op allerlei draadmodellen, zal gekeken worden hoeveel stuivers in een doosje passen en wordt onderzocht hoeveel ballen in een doos passen als je ze mag stapelen.

Phyllotaxis: wiskunde of erfelijkheid?

Frank van der Linden
Faculteit Bouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven

Het ontstaan van phyllotaxis, de regelmatige plaatsing van plantedelen, vormt een oude onopgeloste puzzel. In het algemeen ontwikkelen natuurlijke patronen zich door herhaalde aanwending van zeer eenvoudige procedures. Bij veel organismen zien we een relatief geleidelijke algehele uitdijing. Aan het slakkehuis daarentegen wordt slechts van buitenaf materiaal toegevoegd. Door deze groeifenomenen te vergelijken vond ik een elementair algoritme voor phyllotactische patronen. Het Verdringingsmodel vertrekt van een groeikern en stapelt bollen `van top tot teen'. Het vervolgens ontwikkelde stapel- en trekmodel is het eerste in zijn soort dat helices (schroefspiralen) ontwikkelt in een integrale constructie van zaad tot bloem, `van teen tot top'. Daarbij verschaft het een machtig stuk gereedschap bij het simuleren van een uitgebreide reeks phyllotactische verschijningsvormen.

Om de gepresenteerde theorie te kunnen bevatten volstaat voeling met de natuur en de stelling-van-Pythagoras-in-een-boerenverstand! De volgende begrippen komen aan de orde:

- Gnomonische groei. Groei met behoud van vorm. Voorbeeld: het steeds toegevoegde deel aan een slakkehuis, waarbij de totale vorm niet verandert, noemt men ook steeds gnomon.
- De rij van Fibonacci. Wiskundige reeks (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 211, …) waarvan de termen als exacte aantallen spiralen in zonnebloemen zijn af te tellen. Voor de term, die volgt op de n-de term, geldt:

  Naast deze rij komen ervan afgeleide reeksen voor, hetzij minder frequent.
- De Gulden Snede. Snede in een lijnstuk, zódanig dat het langste stuk (de Major M) zich verhoudt tot het kortste stuk (de minor m) als het geheel (M + m) tot het langste (M). Dus M/m = (M + m)/M.
  Voor de Gulden Snede geldt:

  Deze maatverhouding wordt benaderd in de hoekverdraaiing tussen opeenvolgende uitsteeksels aan vele plantestengels; de verdraaiing (222.5°), gedeeld door de resterende hoek-tot-360° (het explement, 137.5°) is 1.618. Ook opeenvolgende pitten op een zonnebloemhoofd maken de bewuste hoek met elkaar. In dit verband is het grappig dat opeenvolgende termen in de rij van Fibonacci ernaar neigen samen de Gulden Snede te bepalen.

De multidisciplinaire zoektocht leidt tot:
- een antwoord op de vraag: wat is de aard van phyllotaxis?
- modellering van de phyllotaxis van vele bloeiende planten.

literatuur en bronnen

Linden, F. van der (1990). Creating Phyllotaxis: The Dislodgement Model. Mathematical Biosciences, Vol 100/2, 161-199.
Linden, F. van der (1994). Phyllotactic Patterns for Domes. Space Structures `94, Vol. I, 9-19.
Linden, F. van der (in press). Creating Phyllotaxis: The Stack and Drag Model. Binnenkort te publiceren in Mathematical Biosciences.
Linden, F. van der (1994). Phyllotactic Patterns for Domes. Proefschrift en tevens uitgave in eigen beheer.

Wiskunde op Delta-niveau

Arnold Heemink
Rijkswaterstaat, Technische Universiteit Delft

De stormvloedkering in de Oosterschelde is inmiddels al weer een aantal jaren in gebruik, de kering in de Nieuwe Waterweg zal binnen enkele jaren gereed zijn. Zowel bij het maken van een ontwerp, als bij het bouwen en beheren van een dergelijke kering spelen wiskundige voorspeltechnieken een belangrijke rol. Een rol die voor de buitenwereld grotendeels onzichtbaar is. Zo wil men bij het ontwerp van een kering van tevoren nauwkeurig weten wat de invloed zal zijn van de kering op de stromingen in het gebied. Wiskundige stromingsmodellen zijn hierbij onmisbaar. Als de kering in gebruik is wil men natuurlijk ruim van tevoren weten of de kering dicht moet of open kan blijven. Hierbij worden moderne wiskundige voorspellingstechnieken gebruikt, die eerder al met succes zijn toegepast bij het navigeren van een ruimteschip dat terugkeert in de dampkring.
In de lezing zal vooral nader worden ingegaan op de rol van de wiskunde bij grote waterbouwkundige werken. Een kijkje achter de schermen.

Thema wiskunde, voorspellen en beslissen

`De Duitse en de Nederlandse spoorwegen hebben zeer uiteenlopende verwachtingen over de omvang van het goederenvervoer per spoor.'
`Intel schat dat de frequentie waarin de fout in hun Pentium-chip voorkomt gemiddeld eens in de 27.000 jaar is. Volgens IBM kan de fout bij ingewikkelde berekeningen al één keer in de 24 dagen optreden.'
`De economische groei in 1995 zal drie procent van het bruto binnenlands produkt bedragen.'
`De kans op kernsmelting in een reactor is 1/20.000 per jaar.'
`Morgen is er 75% kans op regen.'

Bij allerlei voorspellingen worden wiskundige modellen gebruikt. De lezingen in dit thema bekijken de problematiek rond voorspellen en beslissen vanuit verschillende invalshoeken.

Bij voorspellingen is het niet altijd mogelijk om gebruik te maken van ervaringen of simulaties. In dergelijke gevallen moeten voorspellingen gebaseerd worden op uitspraken van experts. Cooke geeft aan welke problemen dan naar voren komen en hoe je expert-meningen kunt combineren tot een `betrouwbare' voorspelling.

Het Centraal Planbureau maakt bij haar voorspellingen gebruik van analyses van de nationale economie en econometrische modellen. Van Nes zal in gaan op de aard en de verscheidenheid van deze modellen.

Inzichten en resultaten uit de speltheorie hebben een belangrijke bijdrage geleverd aan de moderne economische wetenschap. In de economie moet je immers rekening houden met het gedrag van partners, concurrenten en consumenten. Een beslissing wordt genomen op grond van voorspellingen over elk van de deelnemers aan de economie. Dit lijkt op een beslissing van een speler in een spel met andere spelers. Van Damme legt uit wat speltheorie is en waaruit die bijdrage aan de economische wetenschap bestaat.

Tot slot zal Takens enkele voorbeelden geven van systemen waarbij een kleine verandering in de beginsituatie enorme gevolgen kan hebben. Aan de hand van deze voorbeelden laat hij zien dat er ook grenzen aan de voorspelbaarheid zijn. Bovendien zal hij ingaan op de praktische betekenis van deze grenzen.

Subjectieve waarschijnlijkheid

Roger Cooke
Technische Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Delft

Bij voorspellingen doet men meestal geen absolute uitspraken, maar geeft men aan wat de kans is op een bepaalde gebeurtenis. Die kans is nauwkeurig te berekenen wanneer het gaat om gebeurtenissen die zich regelmatig hebben herhaald. Vaak is dit niet het geval, bijvoorbeeld bij een risico-analyse voor een kerncentrale. In dergelijke situaties maakt men meestal gebruik van voorspellingen door experts.

Het probleem is dat voorspellingen door experts vaak enorm blijken te verschillen. De vraag is hoe je die meningen kunt combineren. De theorie over subjectieve kansen biedt een mechanisme om met expert-meningen om te gaan. Het gebruik van expert-meningen zal worden geïllustreerd met data uit een recent onderzoek, uitgevoerd in opdracht van de Europese Commissie in samenwerking met de US Nuclear Regulatory Commission.

Tijdens deze lezing zullen enkele aspecten van subjectieve waarschijnlijkheid aan de orde komen. Deskundigen geven maar al te vaak hun privé-mening zonder argumentatie als een wetenschappelijk oordeel. De theorie van subjectieve waarschijnlijkheid is een krachtig instrument om de deskundigheid van de experts te toetsen. De grafiek hieronder is een typisch voorbeeld van een empirische ijking van een overmoedige expert: zijn uitspraken met een lage toegekende kans komen te vaak uit en zijn uitspraken met een hoge toegekende kans niet vaak genoeg.

literatuur en bronnen

Cooke, R.M. (1991). Experts in Uncertainty: Expert Opinion and Subjective Probability in Science. Oxford: University Press.
Kahneman, D., P. Slovic and A. Tversky (eds.) (1982). Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases. Cambridge: University Press.
Raiffa, H. (1968). Decision Analysis, Reading Mass: Addison Wesley.

Hoe het Centraal Planbureau bijdraagt aan voorspellen en beslissen in de Nederlandse economie

Floor van Nes
Toegepaste Wiskunde en Informatica, Centraal Planbureau, Den Haag

Het Centraal Planbureau is een wetenschappelijk onderzoeksinstituut van de Rijksoverheid. Taak van het CPB is het maken van analyses van de nationale economie en van ramingen van het toekomstig verloop van economische grootheden in hun onderlinge samenhang. De analyses moeten relevant zijn voor beleidsvragen van de overheid. Het CPB gebruikt daarvoor een aantal wiskundige, of preciezer gezegd, econometrische modellen. Met deze modellen worden simulaties gemaakt van het macro-economische systeem. In de lezing wordt aandacht besteed aan aard en verscheidenheid van deze modellen. In de empirische macromodellen die worden gebruikt speelt chaostheorie geen rol.

De rol die wiskundige modellen via CPB-prognoses in Nederland spelen bij het nemen van beslissingen door de Rijksoverheid is betrekkelijk uniek in de wereld. Tijdens de lezing wordt uitgelegd hoe dit proces in de praktijk werkt bij het opstellen van de Rijksbegroting. Beslissingen worden niet direct door, of op basis van een wiskundig model genomen. Het beslissingsproces zelf is dan ook niet wiskundig gemodelleerd. De resultaten van de wiskundige modellering van de economie spelen wel een belangrijke rol in het beslissingsproces. Daarbij spelen voorspellingsvarianten in de praktijk een grotere rol dan de voorspelling zelf.

literatuur en bronnen

Central Planning Bureau, FKSEC (1992). A macro-econometric model for The Netherlands. Leiden: Stenfert Kroese.
Centraal Planbureau, FKSEC (1992). Variantenboek. Leiden: Stenfert Kroese.
Central Planning Bureau (1992). Scanning the future. The Hague: SDU publishers.

Speltheorie

Eric van Damme
Katholieke Universiteit Brabant, Tilburg

Speltheorie is een wiskundige theorie voor het modelleren en analyseren van beslissingssituaties waarin meerdere beslissers samen de uitkomst bepalen. In zo'n beslissingssituatie (spel) moet iedere beslisser een voorspelling maken over wat elk van de andere spelers zal gaan doen. De speltheorie onderzoekt onder welke voorwaarden er situaties (evenwichten) bestaan waarin iedereen juist voorspelt en, gegeven dat iedereen juist voorspelt, toch niemand van de voorspelling wil afwijken. De theorie werd ontwikkeld door John von Neumann in de jaren twintig van deze eeuw. De eerste

toepassingen in de economie werden beschreven in het boek Theory of Games and Economic Behavior dat Von Neumann samen met de econoom Oskar Morgenstern schreef. Afgelopen jaar (1994) werd de Nobelprijs in de economie aan drie speltheoretici (wiskundigen) John Nash, John Harsanyi en Reinhard Selten toegekend. Deze prijs kan gezien worden als erkenning van het feit dat de moderne economische theorie zonder het speltheoretische instrumentarium ondenkbaar is.
In de voordracht wordt besproken wat speltheorie is en wat de theorie voor inzichten aan de economische wetenschap heeft bijgedragen. De volgende voorbeelden worden aangestipt:

- onderhandelen;
- het gevangene-dilemma;
- financiële markten;
- de evolutie van coöperatie.

literatuur en bronnen

Dixit, A. and B. Nalebuff (1991). Thinking Strategically. New York: W.W. Norton & Co. Inc. Schelling, T. (1960). The Strategy of Conflict. Cambridge MA: Harvard University Press.
Poundstone, W. (1993). Prisoner's dilemma. In: John von Neumann. Game Theory and the Puzzle of the Bomb. Oxford: University Press.
Axelrod, R. (1984). The Evolution of Cooperation. New York: Basic Books.
Sigmund, K. (1993). The Game of Life. Oxford: University Press.
Dawkins, R. (1976). The Selfish Gene. Oxford: University Press.

Thinking Strategically is een elementaire inleiding in de speltheorie op vwo 6-niveau. Geeft referenties voor verdere studie.
The Strategy of Conflict is een informele beschrijving, geschikt om een aantal belangrijke onderhandelingsprincipes te leren.
Game Theory and the Puzzle of the Bomb is een biografie van John von Neumann, die ook op een aantal speltheoretische aspecten ingaat. Leest snel weg.
The Evolution of Cooperation is een klassieker in de sociale wetenschappen. Wiskundig soms onjuist, maar een bron van inspiratie.
The Game of Life is een link tussen sociale wetenschappen en biologie.
The Selfish Gene is een informele toepassing van speltheorie op problemen van evolutie.

Gevoelige afhankelijkheid van begintoestand en grenzen van voorspelbaarheid

Floris Takens
Faculteit Wiskunde, Universiteit Groningen

Het is de bedoeling op verschillende voorbeelden in te gaan waarbij `gevoelige afhankelijkheid van begintoestand' bij deterministische systemen een rol speelt. Deze voorbeelden zullen gebruikt worden om de abstracte wiskundige concepten toe te lichten. We zullen ons hierbij niet beperken tot wiskundige voorbeelden, zoals de Logist, een wiskundig model uit de populatiedynamica, maar vooral ook ingaan op voorbeelden uit de `werkelijkheid' zoals de dobbelsteen, het weer, de beurskoersen en de `random generator' zoals die in een computer wordt gebruikt om het toeval te simuleren.
Daarna zullen we het verband aangeven tussen de gevoelige afhankelijkheid van begintoestanden en het `echte toeval'. Ten slotte zullen we proberen een analyse te geven van de praktische betekenis van deze concepten.

literatuur en bronnen

Gleick, J. Chaos: making a new science. Viking press.
Ekeland, I. Le calcul, l'imprévu. Edition du Seuil.
Stewart, I. Does God play dice? Penguin.

Dit zijn drie boeken voor algemeen publiek waarin de ideeën rond gevoelige afhankelijkheid van begintoestand uiteengezet worden. Het eerste is sterk journalistiek en concentreert zich duidelijk op de menselijke kant van de onderzoekers, het tweede geeft een meer filosofische beschrijving en bevat veel mooie voorbeelden, het derde is het meest wiskundig van aard en is een goede toegang tot verdere literatuur.

Peitgen, H.O. and P. H. Richter. *The beauty of fractals*. Springer-Verlag.

Hier gaat het vooral om fractalen maar wordt ook goed het verband gelegd met chaos (dat wil zeggen systemen met gevoelige afhankelijkheid van begintoestand). Dit boek bevat schitterende illustraties.

Thema wiskunde en kunst

Hoewel wiskunde en kunst in sommige opzichten op gespannen voet lijken te staan (volgens het cliché: wiskunde als het streven naar regels en kunst als het spelen met uitzonderingen) is er toch al lang aandacht voor dit intrigerende onderwerp. Hiervan getuigt de lange rij boeken die over wiskunde en kunst geschreven zijn.

In de muziek spelen natuurkundige fenomenen, zoals het trillen van een snaar, een belangrijke rol bij het vormen van een toon, een kwint of een dissonant, die vervolgens een idee van muziek kunnen geven. J. van der Craats beschrijft deze fenomenen vanuit een wiskundige invalshoek.

A. Goddijn geeft een reeks van voorbeelden waarin de wiskunde een rol speelt in de literatuur, van ruim 2000 voor Christus tot aan heden.

F. van der Blij werpt een uitgebreide blik op het Moiré effect, dat tot zoveel intrigerende kunst kan leiden. Tenslotte zal W. Vastrick zich in zijn workshop meer op enkele architectuur aspecten richten.

Bij wiskunde en kunst blijft het spanningsveld tussen de regelmaat, de wetmatigheid en de creatieve inval het interessante onderzoeksobject.

Muziek en wiskunde

Jan van de Craats

Koninklijke Militaire Academie, Breda

Volgens de overlevering was het Pythagoras die ontdekte dat getallen iets met muziek te maken hebben. Hij verdeelde een gespannen snaar in tweeën, tokkelde de stukken afzonderlijk aan, en ontdekte dat welluidende, harmonieuze samenklanken corresponderen met eenvoudige getalsverhoudingen voor de lengten van de snaardelen. Dat heeft, zoals we inmiddels weten, te maken met eenvoudige frequentieverhoudingen, met tonen en boventonen. Octaven, kwinten en grote tertsen, de eenvoudigste muzikale intervallen, kunnen volgens de ideeën van de achttiende-eeuwse wiskundige Leonhard Euler gebruikt worden om toonsystemen te construeren die goed aansluiten bij de majeur- en mineursystemen van de klassieke muziek.

Aan de hand van voorbeelden uit composities van Bach, Mozart, Beethoven en Schubert zullen we deze theorie illustreren.

Craats, Jan van de (1989). De Fis van Euler. Bloemendaal: Aramith. ISBN 90-6834-0514.

Fokker, A.D. (1944). Rekenkundige bespiegeling der muziek. Gorinchem.

Hermann, L.F. and Helmholtz (1954). On the sensations of tone (vertaling (1885) van Die Lehre von den Tonempfindungen, Heidelberg, 1862, 1877). Heruitgave New York: Dover.

Jeans, Sir James (1937). Science and Music. Cambridge. Heruitgave New York: Dover, 1968.

4000 jaar wiskunde in de literatuur

Aad Goddijn

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

`Als de wiskunde echt bij het volle leven hoort, moet zij regelmatig figureren in verhalen die mensen elkaar vertellen, in liederen en literatuur.'

Zo is het inderdaad en in deze voordracht komen talloze voorbeelden aan bod. Bijvoorbeeld:

- de oudst bekende breuk in de literatuur, 2200 jaar voor het begin van onze jaartelling;
- de obsessie met tellen van regisseur Peter Greenaway in Rosa, de opera uit 1994, met muziek van Louis Andriessen;
- het gebruik van de koele meetkunde om de heetste der hartstochten te beschrijven.

De voorbeelden worden gerangschikt rond enkele thema's van min of meer wiskundige aard, zoals:

- getallen van nul tot over oneindig;
- van de uitvinding van de passer (Ovidius) tot de kwadratuur van de cirkel (Joyce);
- de tijd en de vierde dimensie;
- haat en liefde voor de wiskunde;
- computers lezen poëzie;
- de wereldliteratuur over het wiskundeleerplan van Nederland-Nu;
- bijzondere schrijvers: Thomas Mann, Gerrit Achterberg, Stefan Themerson, Jorge Luis Borges.

Voor zover nodig wordt bij elk thema het betrokken wiskundige onderwerp toegelicht.

Aan de deelnemers wordt na afloop een `leesboek' uitgereikt waarin alle voorbeelden die gebruikt worden - en meer - kunnen worden nagelezen.

Gebruik van voorbeelden uit dit leesboek in allerlei vormen van onderwijs wordt aanbevolen.

Mooie moiré: trillende tralies en zachte zwevingen

F. van der Blij

Bilthoven

Het stemmen van piano's en andere muziekinstrumenten gebeurt soms met behulp van zwevingen; als twee tonen met dicht bij elkaar liggende frequentie voortgebracht worden, horen we een afwisseling van zachter en harder geluid. Een enkele componist gebruikt dit verschijnsel.

Wanneer we de hal van het Centre Pompidou in Parijs binnenkomen zien we een traliewerk van draden, ontworpen door de kunstenaar Jesus Soto. Goed kijken laat allerlei vreemde coïncidenties zien.

Verschillende (kinder)boeken bevatten beweegbare platen, die op moiré berusten. Als we de wiskunde te hulp roepen is wel iets te verklaren van de optredende verschijnselen.

Jaren geleden wijdde Scientific American een coverstory aan dit onderwerp.

Wanneer we twee transparante stroken, de ene met 1 mm brede zwarte strepen op onderlinge afstanden van 1 cm en de andere met 1 mm brede zwarte strepen op onderlinge afstand van 2 cm over elkaar leggen, zullen op ten hoogste één plaats de strepen geheel over elkaar vallen. Verder zien we een patroon met zwevingen.

We voelen ons zelf haast kunstenaar als we dit principe op tweedimensionale roosters toepassen.

Indertijd gebruikte de Bijenkorf dit idee als ontwerp voor design-pakpapier.

De Gulden Snede voorbij

Waldy Vastrick

Utrecht

In deze werkgroep kunnen deelnemers aan de hand van een algemeen reken- en meetkundig proportiesysteem zelf een architectonische maquette maken.

Zij kunnen alvast kennis maken met dit nieuwe systeem daar het - voor een deel - reeds gepubliceerd is in de Nieuwe Wiskrant, januari 1995. Op de omslag ervan staat een schilderij afgebeeld dat Vastrick met dit door hem ontworpen proportiesysteem vervaardigde. De inhoud van het tijdschrift bevat het artikel `Van gulden snede naar zevensnede' van de

hand van F. van der Blij en W. Vastrick, aangevuld met een tekening en een architectonische maquette van Vastrick.

Een goede voorbereiding van de zijde van de deelnemers wordt op prijs gesteld; enige teken- en handvaardigheid is gewenst, doch niet vereist. Deelnemers aan deze werkgroep wordt verzocht een zakrekenmachine mee te brengen.

Thema wiskunde in de geschiedenis

`Hebt u wel eens van *x* gehoord?' Deze gedenkwaardige woorden sprak Hans Freudenthal op de avond van 24 november 1989 in hotel De Mallejan te Vierhouten tijdens een bijeenkomst over algebra.

De aanwezigen keken even verbaasd op: x en algebra is toch zoiets als een twee-eenheid? De werkelijkheid is dat er een tijd was dat nog niemand van *x* gehoord had, terwijl er wel al algebra was. Er was een tijd dat uit de pen van de statisticus beschrijvingen vloeiden, maar geen berekeningen, en zeker geen *x* . Wat zit er historisch gezien achter deze veranderingen? Wat hebben ze opgeleverd? Waar schiet de wiskund(ig)e echt iets mee op? Over deze vragen, toegespitst op algebra en statistiek, gaan de bijdragen in het kader van dit thema. Voor docenten, die constant veranderingen meemaken (in de leerplannen) en hun leerlingen begeleiden, lijken dat belangrijke vragen.

Een uitgebreide lijst met bronnen en literatuur die betrekking hebben op dit thema wordt tijdens de Nationale Wiskunde Dagen uitgereikt.

De met cijfers bedekte negentiende eeuw

Ida Stamhuis
Vrije Universiteit, Amsterdam

`Theorie der Statistiek of Staats-kunde' is de titel van een boek dat in 1807 werd uitgebracht door H.W. Tijdeman, hoogleraar in de statistiek aan de Leidse universiteit. Voor ons is het merkwaardig dat hij `statistiek' met `staatskunde' identificeerde en verder dat de statistiekcolleges die hij gaf niet verplicht waren voor wiskundigen of bijvoorbeeld sociale wetenschappers, maar wel voor juristen. Wat verstond hij eigenlijk onder statistiek? Een woordenboek uit 1826 omschreef statistiek als volgt:

`Statenkunde, statenbeschrijving, uit staatkundige oogpunten beschouwd. Zij (…) draagt dus den tegenwoordigen toestand van eenen staat voor (…). Hierdoor is zij een (…) leerrijk oefenschool voor den staatsman; alleen moet zij in geen bloot tabellenwerk en getalregisters ontaarden.' Niet teveel getallen dus, wel relevante kennis voor een toekomstige ambtenaar of politicus.

Statistiek was in het midden van `de met cijfers bedekte negentiende eeuw' een modieus vakgebied. Statistische gegevens hadden veel gezag en werden dan ook gebruikt om beweringen overtuigingskracht te geven. De `Lady with the Lamp', ofwel Florence Nightingale, gebruikte ze dan ook als zodanig. Ze beschouwde statistiek als de belangrijkste wetenschap in de hele wereld, omdat het de ervaring in exacte resultaten omzet. Ze verzamelde getallen en nog eens getallen om aan te tonen dat de sterfte onder soldaten meer veroorzaakt werd door deplorabele hygiënische omstandigheden dan door verwondingen op het slagveld. Om het de politici, voor wie ze haar rapporten schreef, zo makkelijk mogelijk te maken, bedacht ze nieuwe grafische representaties van het statistische materiaal, zodat ze in één oogopslag konden zien waarvan ze hen wilde overtuigen.

Aan het eind van de eeuw was er de bekende Engelse wetenschapper Francis Galton die een hartstochtelijke neiging had om alles in getallen uit te drukken: niet alleen zoiets als hoofdomvang en beenlengte maar hij definieerde ook een `vervelingscoëfficiënt' of een `schoonheidscoëfficiënt'. Hij werkte met de normale verdeling: vrouwen waren volgens hem één standaarddeviatie dommer dan mannen. Hij kwam met het idee van correlatie en van regressie naar het gemiddelde. Ook voor Galton was de statistiek een middel; hij wilde zijn genetische en eugenetische ideeën hierdoor kracht bijzetten.

Zo veranderde de statistiek in de loop van de tijd. De inhoud, die aanvankelijk heel breed was, versmalde zich. Er ontwikkelde zich een notatie waarbij symbolen een rol gingen spelen. Het zou echter tot in de twintigste eeuw duren voor er een vak mathematische statistiek ontstond. Een centraal begrip werd de stochastische grootheid X, die als jongere broer van Descartes' x kan worden beschouwd.

Cohen, I.B. (1984). Florence Nightingale. Scientific American 250 (3), 98-107.
Diamond, M. and M. Stone (1984). Nightingale on Quetelet (Part 1). Journal of the Royal Statistical Society A 144, 66-79.
Hacking, I. (1990). The taming of chance. Cambridge: Cambridge University Press.
Porter, T. M. (1986). The rise of statistical thinking, 1820-1900. Princeton: Princeton University Press.
Stamhuis, I.H. (1989). Cijfers en Aequaties en kennis der staatskrachten. Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw. Amsterdam: Rodopi, 295 pp.
Stamhuis, I.H. en A. de Knecht-van Eekelen (red.) (1992). De met cijfers bedekte negentiende eeuw. Toepassing van statistiek en waarschijnlijkheidsrekening in Nederland en Vlaanderen tussen 1840 en 1920. Themanummer van Gewina, tijdschrift voor de geschiedenis der geneeskunde, natuurwetenschappen, wiskunde en techniek. Rotterdam: Erasmus Publishing, 78 pp.
Stigler, S.M. (1986). The history of Statistics. The measurement of uncertainty before 1900. Cambridge: Cambridge University Press.

De wortels van de algebra

Jan Hogendijk
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

Deze lezing gaat over de geschiedenis van de kwadratische vergelijking in de Babylonische en Arabische cultuur. De lezing is toegankelijk voor iedereen die kwadratische vergelijkingen kan oplossen. We zullen eerst een Babylonisch kleitablet uit omstreeks 2000 voor Chr. behandelen, waarop een kwadratische vergelijking wordt opgelost. Dit zullen we vergelijken met een gedeelte van het leerboek over algebra van de Arabische wiskundige al-Khwarizmi (ca. 830).

Teksten en vertalingen zullen aan de deelnemers worden uitgereikt. Ook zullen we ingaan op het feit dat de algebra uitgebreid bestudeerd werd in zowel de Babylonische als de Arabische cultuur, hoewel het vak geen maatschappelijke relevantie had en er nauwelijks serieuze toepassingen van de algebra in andere wetenschappen bestonden.

Neugebauer, O. (1935-1937). Mathematische Keilschrift-Texte, 3 delen. Berlin.
Neugebauer, O. (1957). The exact sciences in antiquity. Providence.
Rosen, F. (ed.) (1831). The algebra of Mohammed ben Musa (al-Khwarizmi). London.
Scholz, E. (1990). Geschichte der Algebra, eine Einfuehrung. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
Waerden, B.L. van der (1950). Ontwakende wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde. Groningen.

Toen x nog een grote onbekende was

Marjolein Kool
Domstad Akademie, Utrecht

Twee vrienden, Willem en Wouter, willen een paard van zestig gulden kopen. `Geen punt', zegt Willem, `leen mij van jouw geld en ik betaal dat paard wel even.' `Nee', zegt Wouter, `leen mij van jouw geld en ik zal het beestje betalen.' Hoeveel geld bezaten de beide vrienden?

Je hoeft niet veel van wiskunde te weten om dit vraagstukje uit het rekenmanuscript van Christianus van Varenbraken (1523) op te kunnen lossen. Je stelt een stelsel vergelijkingen op en daar rolt al snel het goede antwoord uit. Christianus van Varenbraken maakte echter bij het oplossen van dit vraagstuk geen gebruik van een stelsel van vergelijkingen; x was voor hem nog een onbekende. Daarin was hij geen uitzondering, ook zijn zestiende-eeuwse collega's rekenboek-schrijvers losten de ingewikkeldste vraagstukken op met `handig rekenen'. Slechts een enkele rekenmeester maakte destijds gebruik van de Regula Cos, de algebra. Daar zal ik op het eind van mijn lezing een voorbeeld van laten zien.

Tijdens mijn lezing ontmoeten we niet alleen paardenkopers, we maken ook kennis met een man op zijn sterfbed, een vrouw die bevalt van een hermafrodiet, een vrijster in een appelboomgaard en nog vele andere curieuze hoofdrolspelers in zestiende-eeuwse vraagstukken. Ik hoop de wiskundeleraren die naar mij komen luisteren zo te inspireren met bizarre verhalen en fraaie staaltjes rekenkunst, dat ze net als ik af en toe een stukje geschiedenis in hun wiskundeles zullen gaan toepassen. Vandaar ook dat iedereen die komt luisteren een pakketje materiaal mee naar huis krijgt.

Ik ben ervan overtuigd dat het voor sommige leerlingen een troost zal zijn als ze ontdekken dat algebra ook maar een keuze is geweest en dat je ook zonder x op veel vragen een antwoord kunt vinden. Zelfs op de vraag: wat is er nou zo leuk aan wiskunde?

Arrighi, G. (1964). Trattato d'arithmetica. Pisa.
Arrighi, G. (1969). Trattato di aritmetica. Florence.
Deschauer, S. (1992). Das zweite Rechenbuch von Adam Ries. Braunschweig.
Flegg, G. (1985). Nicolas Chuquet: Renaissance mathematician. Dordrecht.
Kool, M. (1988). Christianus van Varenbrakens Die Edel Conste Arithmetica. Brussel.
The Mathematical Gazette, vol. 76, nr. 475, maart 1992.
Swets, F. (1987). Capitalism and Arithmetic: The New Math of the 15th century. La Salle.
Tropfke, J. (1980). Geschichte der Elementarmathematik. `Das angewandte Rechnen', p. 513-660. New York.
Vogel, K. (1954). Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. München.
Vogel, K. (1977). Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert. München.

Hebt u wel eens van z gehoord?

Jan van Maanen
Faculteit Wiskunde, Universiteit Groningen

Vergelijkingen zijn van alle tijden. De taal waarin ze gesteld werden veranderde, van een volledige zin over onbekende getallen tot een zin met daarin een aantal afkortingen, en van daaruit stap voor stap tot een sliert symbolen die getallen, operaties en relaties voorstellen. Dit proces verliep niet lineair. Zo noteerde Diophantus (rond 250 na Chr.) machten van de onbekenden al met korte symbolen, terwijl middeleeuwse Arabische en zestiende-eeuwse Italiaanse algebrateksten vergelijkingen wel weer voluit schreven. Van getallenraadsels werd het algebra doordat wiskundigen (vooral de Arabische) inzagen dat vergelijkingen in te delen waren in typen, die elk een vaste manier van oplossen kenden of die zich hardnekkig tegen een oplossing bleven verzetten (zoals de derdegraads vergelijking).

In de zestiende eeuw raakte de algebra in een stroomversnelling, en dat is, na een korte terugblik op het voorafgaande, ook het punt waarop we de draad zullen oppakken. Italiaanse rekenmeesters deden grote stappen voorwaarts, met Cardano's Ars Magna (De Grote Kunst, 1545) en Bombelli's Algebra (1572) als hoogtepunten. De Fransman Viète voerde aan het einde van de eeuw een consequente half-symbolische notatie in (met A, E, I,… als onbekenden en medeklinkers als constanten), en droeg nieuwe oplossingsmethoden en nieuwe problemen aan. De wiskunde van Fermat was op de leest van Viète geschoold, en rond 1630 wist Fermat dat je krommen in het platte vlak kunt voorstellen met een vergelijking in A en E, maar hij maakte dat niet wereldkundig. Werk van Fermat circuleerde in handgeschreven kopieën, maar alleen voor de incrowd.

Anders was het met het wiskundige werk van Descartes. Als dat niet zo was geweest had onze huidige wiskunde er misschien wel heel anders uitgezien! In Descartes' verhandeling uit 1637 over het verband tussen algebra en meetkunde, kortweg Géométrie geheten, vinden we het antwoord op de vragen: waar komt onze x vandaan, waarom is die ingevoerd? Merkwaardig genoeg was er, voordat de x opdook, bij Descartes eerst een z, want consequent als hij was in het kiezen van constanten uit het begin van het alfabet en variabelen uit het eind, nam Descartes voor problemen met één onbekende in de Géométrie voor de onbekende aanvankelijk de letter z.

We gaan dat allemaal van dichtbij bekijken. Het meeste zal verteld worden aan de hand van oorspronkelijke teksten uit die tijd, zodat iedereen zich een beetje historicus kan voelen en terug op school de jeugd zal kunnen berichten over resultaten van eigen `onderzoek'.

Deelnemers aan deze werkgroep krijgen een uitgebreide literatuurlijst uitgereikt. De lijst is samengesteld voor gebruik in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht (Budapestlaan 6, De Uithof), maar veel boeken zullen ook in andere bibliotheken te vinden zijn.

Maanen, J.A. van (1989).`avant la lettre'. In: A.W. Grootendorst (ed.), Vacantiecursus 1983. Complexe getallen. CWI Syllabus 15, Amsterdam, pp 1-24.
Maanen, J.A. van (1987). Facets of seventeenth century mathematics in The Netherlands. Dissertatie Utrecht.
Scholz. E. (Ed.) (1990). Geschichte der Algebra. Eine Einführung. Mannheim.
Smith, D.E. & M.L. Latham (Eds.) (1954). The Geometry of René Descartes. With a facsimile of the first edition. New York.

Thema wiskunde om de wiskunde

Getaltheorie is ontstaan uit nieuwsgierigheid naar de eigenschappen van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... Of, zoals Brouwer het formuleerde in zijn dissertatie:

`Een, twee, drie, ... zo begint de wiskunde; wellicht in de ontwikkeling van de mensheid, wellicht in de ontwikkeling van het kind.'

Een bijzonder aspect van de getaltheorie is het feit dat zowel `professionals' als `amateurs' zich door de tijden heen met groot enthousiasme op dit vakgebied binnen de wiskunde gestort hebben. Alleen dat feit al maakt dit onderwerp buitengewoon geschikt voor de Nationale Wiskunde Dagen. De reden dat amateurs en leken zich zozeer door getaltheorie voelen aangetrokken ligt vooral ook in het feit dat de problemen zo voorstelbaar zijn. Dat geldt in aanmerkelijk mindere mate voor de oplossingen. De stelling van Fermat is hier een goed voorbeeld van.

Tot het midden van onze eeuw werd getaltheorie beschouwd als de zuiverste van de wiskundige disciplines. Dat is nu definitief voorbij. Getaltheorie is door de opkomst van digitale technieken een vak geworden met vele toepassingen. Anderzijds hebben computers het mede mogelijk gemaakt dat getaltheoretici onwaarschijnlijk grote ontbindingen in factoren hebben kunnen uitvoeren en reusachtige priemgetallen hebben kunnen vinden.

De lezingen over dit thema zullen iets laten zien van de fascinatie die getaltheorie kan oproepen. Onder andere de meest recente stand van zaken rond het bewijs van de stelling van Fermat zal aan de orde komen.

Van der Blij sprak in zijn afscheidscollege niet zonder reden van het `Wonder-Raadselrijk der Getaltheorie'.

In en om de theorie van derdegraads vergelijkingen

Jaap Top

Faculteit Wiskunde, Universiteit Groningen

Onder `derdegraads vergelijkingen' zullen we met name verstaan vergelijkingen van de gedaante y = x3 + ax2 + bx + c, in de onbekenden x en y, voor vaste a, b en c. Hierbij eisen we dan ook nog, dat het gegeven derdegraads polynoom in x geen meervoudige nulpunten heeft.

Zowel binnen (in) de theorie hierover, als vanuit (om) die theorie hebben recent nogal wat ontwikkelingen plaatsgevonden. We hopen dit aan de hand van een tweetal voorbeelden te illustreren.

Een voorbeeld binnen de theorie: hoewel misschien niet de belangrijkste ontdekking op dit gebied gedurende de afgelopen tien jaar, levert een resultaat van J.-F. Mestre (1991) hier een fraai voorbeeld. Het resultaat zegt iets over hoe ingewikkeld de verzameling oplossingen in rationale getallen x en y kan zijn, wanneer de a, b, c ook rationaal gekozen waren. Men kan namelijk uit gegeven oplossingen nieuwe construeren door de verzameling van alle oplossingen te zien als een kromme in het x, y-vlak, en dan lijnen in dat vlak die twee punten op de kromme verbinden opnieuw te snijden met de kromme. (Al met wiskunde uit de derde en vierde klas kunnen met het genoemde proces heel ingewikkeld ogende oplossingen gemaakt worden!).

Ruim zeventig jaar geleden is aangetoond dat er altijd een eindige verzameling punten met rationale coördinaten bestaat, zodat alle overige punten met het zojuist beschreven proces hieruit te construeren zijn. Mestre toont aan dat er voor oneindig veel essentieel verschillende tripels a, b, c in dit proces tenminste twaalf `beginpunten' nodig zijn. Het bewijs berust in wezen op dezelfde technieken waarmee Fermat in de zeventiende eeuw oplossingen van analoge vergelijkingen construeerde, en dat is op zijn beurt in feite niets anders dan de techniek van het `kwadraat afsplitsen' die ons in de onderbouw van de middelbare school wordt aangeleerd.

Als voorbeeld van een toepassing wordt in het kort iets over het ontwerpen van fouten-verbeterende codes verteld.

De Laatste Stelling van Fermat (Syllabus uitgegeven in 1993 door het Wiskundig Genootschap in samenwerking met de Universiteit Utrecht).

Silverman, J.H. and J. Tate (1992). Rational Points on Elliptic Curves. Springer Verlag.

Gladde getallen

Rob Tijdeman

Vakgroep Wiskunde, Universiteit Leiden

Professor Lenstra houdt een hoofdvoordracht over het ontbinden in factoren van grote getallen. Bij het schatten van de rekentijd van daarbij gebruikte methoden spelen `gladde getallen' een belangrijke rol. Een natuurlijk getal wordt glad genoemd als het samengesteld is uit kleine priemfactoren. Een manier om gladde getallen te tellen is met behulp van de functie $\psi(x,y)$, dat is het aantal van positieve gehele getallen kleiner of gelijk aan x die geen priemdelers groter dan y hebben. Zo geldt $\psi(20,3) = 10$, want het gaat hier om de getallen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 en 18. De raadselen van het gedrag van $\psi(x,y)$ zijn in de loop van deze eeuw ontrafeld door onder andere Dickson, De Bruijn en Hildebrand. In de voordracht worden de hoofdresultaten genoemd.

Tien jaar geleden drong het door dat ook het produkt van de verschillende priemfactoren van een getal, de zogenaamde radicaal, belangrijke informatie geeft. De radicaal van 100 is 10 (= 2 × 5), de radicaal van 99 is 33 (= 3 × 11) en die van 91 is 91 (= 7 × 13).

In de voordracht zullen enkele plaatjes over de verdeling van radicalen worden getoond. Vermoed wordt dat als de getallen a en b niet door hetzelfde priemgetal deelbaar zijn en beide een kleine radicaal hebben, de som a + b een grote radicaal heeft. Als dit vermoeden in geschikte vorm bewezen wordt, is tegelijkertijd de laatste stelling van Fermat en nog veel meer bewezen. Ook dit verband wordt in de voordracht gelegd. De vereiste voorkennis is wiskunde op het vwo 5-niveau.

De Laatste Stelling van Fermat (Syllabus uitgegeven in 1993 door het Wiskundig Genootschap in samenwerking met de Universiteit Utrecht).

Vergelijkingen in de gehele getallen

Frits Beukers

Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

Beschouw de vergelijking x2 - 5y2 = 1 met als bijzonderheid dat we alleen naar geheeltallige oplossingen x, y kijken. Eén oplossing ziet u waarschijnlijk meteen: x = 1, y = 0. Zijn er nog meer? Na enig zoeken vinden we x = 9, y = 4. Het blijkt zelfs dat we oneindig veel oplossingen kunnen vinden. Vergelijkingen waarbij we de onbekenden geheel veronderstellen noemen we diophantische vergelijkingen, naar de Griek Diophantos die ze voor het eerst systematisch bestudeerde. De restrictie `geheeltallige oplossing' maakt het altijd tot een verrassing of een diophantische vergelijking wel of geen, of misschien oneindig veel oplossingen heeft. Vorig jaar heeft Andrew Wiles bewezen dat als n > 2, de vergelijking xn + yn = zn geen oplossing in positief gehele x, y, z heeft. Hiermee werd een notoir 350-jarig probleem van Fermat opgelost. Wij zullen diophantische vergelijkingen van de vorm x2 + y3 = z7 of x2 + y3 = z5 iets nader bekijken. We zullen daarbij uitleggen waarom er zo'n groot verschil bestaat tussen deze twee genoemde vergelijkingen.

Recente geschiedenis van de laatste stelling van Fermat

Bart de Smit

Vakgroep Wiskunde, Erasmus Universiteit, Rotterdam

De laatste stelling van Fermat, die eigenlijk ``het vermoeden van Fermat'' zou moeten heten, zegt dat voor geen enkel geheel getal n > 2 er positieve gehele getallen a, b en c bestaan zodat an + bn = cn.

Het vinden van een bewijs hiervoor is al 3 eeuwen één van de grootste uitdagingen in de wiskunde. De moderne getaltheorie is voor een belangrijk deel ontstaan uit pogingen om dit vermoeden te bewijzen.

Gerd Faltings heeft in 1983 een zeer algemeen resultaat bewezen, dat impliceert dat er voor vaste n > 2 maar eindig veel drietallen (a,b,c) bestaan waarvoor geldt dat ggd(a,b,c) = 1 en an + bn = cn.

In juni 1993 kondigde Andrew Wiles aan, dat hij de laatste stelling van Fermat kon bewijzen. Hij had er zeven jaar in stilte aan gewerkt. Het manuscript werd echter geheim gehouden, en in december 1993 trok Wiles zijn claim weer in. Nu ziet het ernaar uit dat hij met hulp van Richard Taylor zijn bewijs gerepareerd heeft.

In oktober 1994 is de tekst van deze nieuwe versie van het bewijs openbaar gemaakt.

Het is zeer gecompliceerd en het gebruikt veel geavanceerde resultaten uit de literatuur.

Het doel van deze voordracht is om met elementaire middelen een indruk te geven van de ideeën die aan het bewijs ten grondslag liggen.

Niet thema-gebonden presentaties

Naast de vijf thema's zijn er ook acht sessies die niet gebonden zijn aan een van deze thema's. Deze werkgroepen en presentaties zijn verdeeld in twee categorieën. De eerste betreft de discipline wiskunde en sessies in de tweede categorie gaan over wiskundeonderwijs.

Virussen en computers

Henk Barendregt

Katholieke Universiteit, Nijmegen

CWI, Amsterdam

Virussen zijn moleculen die zichzelf reproduceren wanneer ze zich binnen een levende cel bevinden. Hierdoor wordt de stofwisseling van de cel verstoord.

In veel gevallen zal het immuunsysteem van de cel het virus onschadelijk maken. Wanneer het virus echter het immuunsysteem zelf verstoort, is dit soms niet mogelijk.

Beide soorten virussen komen (in de vorm van software) ook voor in de wereld van computers. Aangetoond zal worden dat er geen universele remedie tegen bestaat.

Wiskunde, een geesteswetenschap

S.J. Doorman

Faculteit Wijsbegeerte, Erasmus Universiteit Rotterdam

Wiskunde wordt meestal als vanzelfsprekend tot de β-wetenschappen gerekend. Ook het onderwijs in de wiskunde is doordrenkt van deze opvatting en helpt derhalve mee haar te bevestigen.

Tegen deze achtergrond zal worden getracht aannemelijk te maken dat het aanbeveling verdient wiskunde op te vatten als een α-wetenschap.

Discrete analyse

H.J.A. Duparc

Technische Universiteit Delft

Het gedrag van geleidelijk veranderde verschijnselen $v = v(t)$ kan vaak nuttig worden beschreven met

behulp van de afgeleide , soms met groot nut ook wel geschreven als Dv. In analogie daarmee kunnen de lotgevallen van discreet veranderende verschijnselen $v = v_n$ vaak nuttig worden beschreven met behulp van de differentie-operator Δ:
$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$.

Het is boeiend, leerzaam en nuttig om de overeenkomst en het verschil tussen de operatoren D en Δ te bestuderen. Het blijkt voorts nuttig om naast de operator Δ ook de operator E met effect $Ev_n = v_{n+1}$ in te voeren. Men heeft dan $\Delta = E - 1$; $E = \Delta + 1$.

Vier kernonderdelen van de continue analyse hebben hun pendant in de discrete analyse volgens onderstaand staatje:

I	differentiëren	differentie nemen
II	integreren	sommeren
III	differentiaalvergelijkingen	differentievergelijkingen
IV	Laplace-transformaties	z-transformaties

Opgemerkt dient nog te worden dat differentievergelijkingen (relaties tussen een functie v en haar differenties Δv, $\Delta^2 v$, …) kunnen worden herschreven als relaties tussen v_n , v_{n+1}, v_{n+2} , … en dus te beschouwen zijn als recurrente relaties.

Doordat bij de operator Δ, in tegenstelling tot de operator D, het limietbegrip geen rol speelt, zijn sommige afleidingen enerzijds eenvoudiger, anderzijds zijn bepaalde formules mede daardoor ingewikkelder.

Vooraf aan de werkgroep wordt een aantal problemen uitgedeeld die bovengenoemde problematiek illustreren.

Invloed, conflict en contact in de meetkunde

Dirk Siersma

Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

- Hoe verdeelt men visserijzones tussen een aantal eilanden in de zee?
- Wat is de dichtstbijzijnde planeet in de ruimte?
- Wat is de opdeling van Nederland in provincies als we de afstand tot de provinciehoofdstad minimaal nemen?

Wiskundig bekijken we afstanden tot diverse objecten in het vlak of de ruimte (punten, lijnen, cirkelschijven, bollen, eilanden in de zee). Punten die dichter bij een object A liggen dan bij andere objecten behoren tot de invloedsfeer van A. De randen ervan zijn de conflictgebieden.

Voorbeelden leveren als conflictverzamelingen: middelloodlijnen, bissectrices, parabolen, zadelvlakken, enzovoort. Daarnaast komen `drielandenpunten' veelvuldig voor, maar soms ook ingewikkelder conflictpunten.

Er zijn verbanden met ingeschreven en omschreven cirkels, de cirkels van Apollonius, maar ook met Voronoi-betegelingen in het vlak, enzovoort.

Kun je op computeralgebra rekenen?

André Heck

Expertisecentrum Computer Algebra Nederland, Amsterdam

Het ultieme doel van computeralgebra is het automatiseren van wiskunde. De hiervoor benodigde software, bekend onder de naam computeralgebra-systeem, is bedoeld als werkomgeving voor het uitvoeren van wiskundige en technische berekeningen. Binnen zo'n moderne werkomgeving krijgen symbolisch rekenen, numeriek rekenen, grafiek, documentatie en aansluiting met andere software grote aandacht.

In deze presentatie gaan we met de vraag `Wat heb ik nu aan computeralgebra?' in het achterhoofd, in op aspecten van gebruik van een computeralgebra-systeem als werkomgeving. Niet alleen de kwaliteit van de geleverde wiskunde komt aan bod via concrete voorbeelden, maar ook het bedieningsgemak en de vraag voor welke problemen de gebruiker en de softwaremaker zich vanuit verschillend perspectief gesteld zien.

Bij gebruiksaspecten kunt u denken aan zaken als: Hoe behoud ik overzicht over een formule, hoe vereenvoudig ik wiskundige formules, hoe manipuleer ik een onderdeel van een formule, hoe omzeil ik automatische vereenvoudigingen?

```
In[1] := Sin[a+b+c] /. Sin[x-+y-] -> Sin[x]Sin[y] + Cos[x]Sin[y]
Out[1] = Cos[a] Sin[b+c] + Sin[a] Sin[b+c]
In[2]: = Sin[a+b+c] //. Sin[x-+y-] -> Sin[x]Sin[y] + Cos[x]Sin[y]
Out[2] = Cos[a] (Cos[b] Sin[c] + Sin[b] Sin[c]) +
> Sin[a] (Cos[b] Sin[c] + Sin[b] Sin[c])
```

Mag het een beetje inspirerend zijn?

Nora Blom, Hogeschool van Amsterdam, Amsterdam

Regien Bosman, Zernike College, Groningen

Mevrouw Rose Flower werd in Engeland in 1991 uitgeroepen tot `Maths Teacher of the Year'. Op het prikbord in haar klas hangen prachtige symmetrische figuren. Daartussen hangt een bordje met de uitspraak van - alweer - de Engelse wiskundige G.H. Hardy:

A Mathematician, like a Painter or a Poet, is a Maker of Patterns.

Dat is een uitspraak die wij van harte onderschrijven. Nu een groter beroep wordt gedaan op de zelfstandigheid van leerlingen, `de leerlingen aan het werk', wordt de rol van de docent meer voorwaarden-scheppend. De aankleding van het lokaal, de keuze van de leerstof en het werken met materiaal zijn daarbij belangrijke elementen. Het zijn de voorwaarden die ervoor zorgen dat de leerling met plezier werkt en dat er wat geleerd wordt.

Sommige scholen hebben keuze-uren: uren waarop leerlingen kiezen welk vak ze volgen en met welk onderwerp ze daarin bezig willen zijn. In dit keuze-uur van deze wiskundedagen kiezen wij voor het onderwerp: Regelmaat en Symmetrie. Een onderwerp dat een beroep doet op het gevoel voor schoonheid binnen het vak wiskunde. Wij zullen onder andere ingaan op de volgende vragen:

- wat is er in dit opzicht gebeurd op de basisschool?
- hoe pak je de draad weer op in klas 1?
- hoe laat je een leerling in klas 4 vbo/mavo een werkstuk maken over dit onderwerp?

Kortom, wordt er op school voldoende aandacht besteed aan de esthetische kant van wiskunde?

Albern, K. e.a. The language of pattern.

Bain, G. Celtic Art.

Bourgoin, J. Arabic geometrical pattern and design.

Fäustler, A. Perspectief en projectie.

Hildebrandt, S. en A. Tromba (1985). Natuur en techniek. Maastricht / Brussel.

Jansen, P. en R. Kock. Informatica met logo. Enschede: SLO.

Lauwerier, H. (1988). Symmetrie. Amsterdam: Aramith Uitgevers.

Lauwerier, H. Fractals.

Lawler, R. Sacred geometry.

Locher, J. L. Leven en werk van M.C. Escher.

Meeder, M. e.a. (1987). Vriendelijke wiskunde. Amsterdam: Werkgroep Vrouwen en Wiskunde.

Meeder, M. en H. Verhage (1989). Regelmaat en symmetrie (leerlingenmateriaal en docentenhandleiding). Utrecht / Enschede: Freudenthal instituut / SLO.

Speltz, A. The styles of ornament.

Wiskunde en beroep

Bernadette van den Anker

SG Echnaton, Almere

`Welke wiskunde heb je later nodig?', `Wat moet ik hier nu mee?' Het zijn vragen die iedere docent vroeg of laat te beantwoorden krijgt.

In deze workshop worden geen antwoorden op deze vragen gegeven, maar hooguit aanwijzingen die te maken hebben met de toekomst van de wiskundeleerling. Het gaat om keuzebegeleiding in de les. Voor de leerling staat de volgende vraag centraal:

Welke wiskunde heb ik nodig in mijn toekomstig beroep?

De lessen die daarvoor geschreven zijn, zijn gebaseerd op materiaal dat ontwikkeld is door `Vrouwen en Wiskunde'. Deze lessen zijn dit schooljaar gegeven in de tweede klas van een brede scholengemeenschap.

Het materiaal is geschikt voor leerlingen van ivbo tot en met vwo.

Computernetwerken. Niets voor het onderwijs?

Sieb Kemme, Lettelbert

Han Hermsen, Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

In deze presentatie wordt met demonstraties ingegaan op de mogelijkheden die computernetwerken het onderwijs al te bieden hebben en in de toekomst zouden kunnen gaan bieden.

Sieb Kemme introduceert en demonstreert de SLO-lijn, een door de Stichting Leerplanontwikkeling beheerd bulletin board annex elektronische brievenbus voor het onderwijs.

- hoe werkt het? wat zit erin? is er iets over wiskunde?
- hoe krijg je het eruit? wat kun je ermee?

Han Hermsen gaat in op recente ontwikkelingen als:

- met World Wide Web het Internet op;
- het gebruik van Internet door scholen in de Verenigde Staten;

en op de toekomst:

- de rol die netwerken kunnen gaan spelen bij het inpassen van (multimediale) informatietechnologie in het onderwijs zonder de beperkingen van nu.

Computernetwerken. Niets voor het onderwijs? Dat hangt ervan af!

Je hebt er pas wat aan als je er op een makkelijke manier dingen mee kunt doen die je zinvol vindt voor het onderwijs. Denk aan:

- proefwerkopgaven en elektronische post uitwisselen met collega's;
- op het netwerk beschikbare gegevens gebruiken in de les;
- educatieve software of andere gegevens via het netwerk naar je computer `downloaden'.

Technisch is het allemaal mogelijk, in de praktijk zijn dergelijke faciliteiten beschikbaar, maar van breed georganiseerd gebruik is nog geen sprake, waardoor de waarde ervan betrekkelijk blijft.

Sinds jaar en dag zijn er bulletin boards voor het onderwijs. De SLO-lijn is er een voorbeeld van. Alles wat je nodig hebt is: een computer, een telefoonlijn, een modem, het telefoonnummer van het bulletin board en een programma op je computer om in een tijdelijk mini-netwerk met de bulletin board computer te kunnen communiceren. Zie hierboven wat je vervolgens zou kunnen gaan doen.

Het is te verwachten dat de bestaande bulletin boards gaandeweg zullen worden geïntegreerd in een modern netwerk als Internet met nog veel meer mogelijkheden. Via een fraaie bediening kun je gedigitaliseerde informatie (tekst, al dan niet bewegend beeld, geluid) op allerlei terrein vanuit binnen- en buitenland op je computer afspelen. Op dezelfde manier als bij een bulletin board ben je via één Internet-computer verbonden met alle Internet-computers in de wereld.

Wellicht zijn er docenten die nu al op Internet ergens iets tegenkomen dat in de les kan worden gebruikt. Voor de enkeling die deze `digitale snelweg' kan bereizen, zijn dit soort toevalstreffers misschien wel de spannendste dingen die je kunnen overkomen.

Computernetwerken zullen in de toekomst echter pas werkelijk betekenis krijgen voor het onderwijs als geheel, als:

- op die netwerken iets door en voor het onderwijs wordt georganiseerd;
- de gebruiker op een school met kennis van zaken op een moderne en makkelijke manier door het netwerk kan navigeren en gebruik kan maken van de geboden faciliteiten;
- elke school in staat is om op zo'n netwerk aansluiting te vinden, waardoor een Nederlandse tak van een mondiaal educatief netwerk kan ontstaan.

Wat moet er nog gebeuren om zover te komen?

Hoogtemeters

Fried den Ouden

Grensland College, Budel

In het nieuwe leerplan wiskunde voor vbo/mavo en de onderbouw havo/vwo is ruimte gereserveerd voor Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA). Het is de bedoeling dat leerlingen datgene wat ze tijdens de wiskundelessen geleerd hebben, leren gebruiken en toepassen in alledaagse situaties. Omdat er weinig of geen concrete richtlijnen zijn, zal iedereen naar eigen inzicht een invulling geven.

In deze workshop laten we de deelnemers kennis maken met het ontstaan en de uitvoering van zo'n GWA-project. Aan de orde komen:

- aanleiding en opzet project;
- keuze maken uit verschillende meetmethodes;
- hoe zelf eenvoudige meetinstrumenten te vervaardigen;
- maken van leerlingenwerkbladen;
- mogelijk zelf metingen verrichten;
- bekijken beeldverslag van het project;
- mogelijke uitbreiding met moeilijker instrumenten.

De deelnemers aan de workshop krijgen een reader uitgereikt waarin opgenomen: de totstandkoming van het project, de leerlingenwerkbladen, een verslag van de uitvoering en een evaluatie van het geheel. De reader omvat ongeveer 25 bladzijden.

Thema wiskunde om de wiskunde

Getaltheorie is ontstaan uit nieuwsgierigheid naar de eigenschappen van de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... Of, zoals Brouwer het formuleerde in zijn dissertatie:

`Een, twee, drie, ... zo begint de wiskunde; wellicht in de ontwikkeling van de mensheid, wellicht in de ontwikkeling van het kind.'

Een bijzonder aspect van de getaltheorie is het feit dat zowel `professionals' als `amateurs' zich door de tijden heen met groot enthousiasme op dit vakgebied binnen de wiskunde gestort hebben. Alleen dat feit al maakt dit onderwerp buitengewoon geschikt voor de Nationale Wiskunde Dagen. De reden dat amateurs en leken zich zozeer door getaltheorie voelen aangetrokken ligt vooral ook in het feit dat de problemen zo voorstelbaar zijn. Dat geldt in aanmerkelijk mindere mate voor de oplossingen. De stelling van Fermat is hier een goed voorbeeld van.

Tot het midden van onze eeuw werd getaltheorie beschouwd als de zuiverste van de wiskundige disciplines. Dat is nu definitief voorbij. Getaltheorie is door de opkomst van digitale technieken een vak geworden met vele toepassingen. Anderzijds hebben computers het mede mogelijk gemaakt dat getaltheoretici onwaarschijnlijk grote ontbindingen in factoren hebben kunnen uitvoeren en reusachtige priemgetallen hebben kunnen vinden.

De lezingen over dit thema zullen iets laten zien van de fascinatie die getaltheorie kan oproepen. Onder andere de meest recente stand van zaken rond het bewijs van de stelling van Fermat zal aan de orde komen.

Van der Blij sprak in zijn afscheidscollege niet zonder reden van het `Wonder-Raadselrijk der Getaltheorie'.

In en om de theorie van derdegraads vergelijkingen

Jaap Top
Faculteit Wiskunde, Universiteit Groningen

Onder `derdegraads vergelijkingen' zullen we met name verstaan vergelijkingen van de gedaante y = x3 + ax2 + bx + c, in de onbekenden x en y, voor vaste a, b en c. Hierbij eisen we dan ook nog, dat het gegeven derdegraads polynoom in x geen meervoudige nulpunten heeft.

Zowel binnen (in) de theorie hierover, als vanuit (om) die theorie hebben recent nogal wat ontwikkelingen plaatsgevonden. We hopen dit aan de hand van een tweetal voorbeelden te illustreren.

Een voorbeeld binnen de theorie: hoewel misschien niet de belangrijkste ontdekking op dit gebied gedurende de afgelopen tien jaar, levert een resultaat van J.-F. Mestre (1991) hier een fraai voorbeeld. Het resultaat zegt iets over hoe ingewikkeld de verzameling oplossingen in rationale getallen x en y kan zijn, wanneer de a, b, c ook rationaal gekozen waren. Men kan namelijk uit gegeven oplossingen nieuwe construeren door de verzameling van alle oplossingen te zien als een kromme in het x, y-vlak, en dan lijnen in dat vlak die twee punten op de kromme verbinden opnieuw te snijden met de kromme. (Al met wiskunde uit de derde en vierde klas kunnen met het genoemde proces heel ingewikkeld ogende oplossingen gemaakt worden!).

Ruim zeventig jaar geleden is aangetoond dat er altijd een eindige verzameling punten met rationale coördinaten bestaat, zodat alle overige punten met het zojuist beschreven proces hieruit te construeren zijn. Mestre toont aan dat er voor oneindig veel essentieel verschillende tripels a, b, c in dit proces tenminste twaalf `beginpunten' nodig zijn. Het bewijs berust in wezen op dezelfde technieken waarmee Fermat in de zeventiende eeuw oplossingen van analoge vergelijkingen construeerde, en dat is op zijn beurt in feite niets anders dan de techniek van het `kwadraat afsplitsen' die ons in de onderbouw van de middelbare school wordt aangeleerd.

Als voorbeeld van een toepassing wordt in het kort iets over het ontwerpen van fouten-verbeterende codes verteld.

De Laatste Stelling van Fermat (Syllabus uitgegeven in 1993 door het Wiskundig Genootschap in samenwerking met de Universiteit Utrecht).
Silverman, J.H. and J. Tate (1992). Rational Points on Elliptic Curves. Springer Verlag.

Gladde getallen

Rob Tijdeman
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Leiden

Professor Lenstra houdt een hoofdvoordracht over het ontbinden in factoren van grote getallen. Bij het schatten van de rekentijd van daarbij gebruikte methoden spelen `gladde getallen' een belangrijke rol. Een natuurlijk getal wordt glad genoemd als het samengesteld is uit kleine priemfactoren. Een manier om gladde getallen te tellen is met behulp van de functie $\psi(x,y)$, dat is het aantal van positieve gehele getallen kleiner of gelijk aan x die geen priemdelers groter dan y hebben. Zo geldt $\psi(20,3) = 10$, want het gaat hier om de getallen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16 en 18. De raadselen van het gedrag van $\psi(x,y)$ zijn in de loop van deze eeuw ontrafeld door onder andere Dickson, De Bruijn en Hildebrand. In de voordracht worden de hoofdresultaten genoemd.

Tien jaar geleden drong het door dat ook het produkt van de verschillende priemfactoren van een getal, de zogenaamde radicaal, belangrijke informatie geeft. De radicaal van 100 is 10 (= 2 × 5), de radicaal van 99 is 33 (= 3 × 11) en die van 91 is 91 (= 7 × 13).

In de voordracht zullen enkele plaatjes over de verdeling van radicalen worden getoond. Vermoed wordt dat als de getallen a en b niet door hetzelfde priemgetal deelbaar zijn en beide een kleine radicaal hebben, de som a + b een grote radicaal heeft. Als dit vermoeden in geschikte vorm bewezen wordt, is tegelijkertijd de laatste stelling van Fermat en nog veel meer bewezen. Ook dit verband wordt in de voordracht gelegd. De vereiste voorkennis is wiskunde op het vwo 5-niveau.

De Laatste Stelling van Fermat (Syllabus uitgegeven in 1993 door het Wiskundig Genootschap in samenwerking met de Universiteit Utrecht).

Vergelijkingen in de gehele getallen

Frits Beukers
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

Beschouw de vergelijking x2 - 5y2 = 1 met als bijzonderheid dat we alleen naar geheeltallige oplossingen x, y kijken. Eén oplossing ziet u waarschijnlijk meteen: x = 1, y = 0. Zijn er nog meer? Na enig zoeken vinden we x = 9, y = 4. Het blijkt zelfs dat we oneindig veel oplossingen kunnen vinden. Vergelijkingen waarbij we de onbekenden geheel veronderstellen noemen we diophantische vergelijkingen, naar de Griek Diophantos die ze voor het eerst systematisch bestudeerde. De restrictie `geheeltallige oplossing' maakt het altijd tot een verrassing of een diophantische vergelijking wel of geen, of misschien oneindig veel oplossingen heeft. Vorig jaar heeft Andrew Wiles bewezen dat als n > 2, de vergelijking xn + yn = zn geen oplossing in positief gehele x, y, z heeft. Hiermee werd een notoir 350-jarig probleem van Fermat opgelost. Wij zullen diophantische vergelijkingen van de vorm x2 + y3 = z7 of x2 + y3 = z5 iets nader bekijken. We zullen daarbij uitleggen waarom er zo'n groot verschil bestaat tussen deze twee genoemde vergelijkingen.

Recente geschiedenis van de laatste stelling van Fermat

Bart de Smit
Vakgroep Wiskunde, Erasmus Universiteit, Rotterdam

De laatste stelling van Fermat, die eigenlijk ``het vermoeden van Fermat'' zou moeten heten, zegt dat voor geen enkel geheel getal n > 2 er positieve gehele getallen a, b en c bestaan zodat an + bn = cn.

Het vinden van een bewijs hiervoor is al 3 eeuwen één van de grootste uitdagingen in de wiskunde. De moderne getaltheorie is voor een belangrijk deel ontstaan uit pogingen om dit vermoeden te bewijzen.

Gerd Faltings heeft in 1983 een zeer algemeen resultaat bewezen, dat impliceert dat er voor vaste n > 2 maar eindig veel drietallen (a,b,c) bestaan waarvoor geldt dat ggd(a,b,c) = 1 en an + bn = cn.

In juni 1993 kondigde Andrew Wiles aan, dat hij de laatste stelling van Fermat kon bewijzen. Hij had er zeven jaar in stilte aan gewerkt. Het manuscript werd echter geheim gehouden, en in december 1993 trok Wiles zijn claim weer in. Nu ziet het ernaar uit dat hij met hulp van Richard Taylor zijn bewijs gerepareerd heeft.

In oktober 1994 is de tekst van deze nieuwe versie van het bewijs openbaar gemaakt.

Het is zeer gecompliceerd en het gebruikt veel geavanceerde resultaten uit de literatuur.

Het doel van deze voordracht is om met elementaire middelen een indruk te geven van de ideeën die aan het bewijs ten grondslag liggen.

Niet thema-gebonden presentaties

Naast de vijf thema's zijn er ook acht sessies die niet gebonden zijn aan een van deze thema's. Deze werkgroepen en presentaties zijn verdeeld in twee categorieën. De eerste betreft de discipline wiskunde en sessies in de tweede categorie gaan over wiskundeonderwijs.

Virussen en computers

Henk Barendregt
Katholieke Universiteit, Nijmegen
CWI, Amsterdam

Virussen zijn moleculen die zichzelf reproduceren wanneer ze zich binnen een levende cel bevinden. Hierdoor wordt de stofwisseling van de cel verstoord.

In veel gevallen zal het immuunsysteem van de cel het virus onschadelijk maken. Wanneer het virus echter het immuunsysteem zelf verstoort, is dit soms niet mogelijk.

Beide soorten virussen komen (in de vorm van software) ook voor in de wereld van computers. Aangetoond zal worden dat er geen universele remedie tegen bestaat.

Wiskunde, een geesteswetenschap

S.J. Doorman
Faculteit Wijsbegeerte, Erasmus Universiteit Rotterdam

Wiskunde wordt meestal als vanzelfsprekend tot de β-wetenschappen gerekend. Ook het onderwijs in de wiskunde is doordrenkt van deze opvatting en helpt derhalve mee haar te bevestigen.

Tegen deze achtergrond zal worden getracht aannemelijk te maken dat het aanbeveling verdient wiskunde op te vatten als een α-wetenschap.

Discrete analyse

H.J.A. Duparc
Technische Universiteit Delft

Het gedrag van geleidelijk veranderde verschijnselen v = v(t) kan vaak nuttig worden beschreven met

behulp van de afgeleide , soms met groot nut ook wel geschreven als Dv. In analogie daarmee kunnen de lotgevallen van discreet veranderende verschijnselen v = vn vaak nuttig worden beschreven met behulp van de differentie-operator Δ:
Δvn = vn+1 − vn.

Het is boeiend, leerzaam en nuttig om de overeenkomst en het verschil tussen de operatoren D en Δ te bestuderen. Het blijkt voorts nuttig om naast de operator Δ ook de operator E met effect Evn = vn+1 in te voeren. Men heeft dan Δ = E − 1; E = Δ + 1.

Vier kernonderdelen van de continue analyse hebben hun pendant in de discrete analyse volgens onderstaand staatje:

I	differentiëren	differentie nemen
II	integreren	sommeren
III	differentiaalvergelijkingen	differentievergelijkingen
IV	Laplace-transformaties	z-transformaties

Opgemerkt dient nog te worden dat differentievergelijkingen (relaties tussen een functie v en haar differenties Δv, Δ2v, …) kunnen worden herschreven als relaties tussen vn , vn+1, vn+2 , … en dus te beschouwen zijn als recurrente relaties.

Doordat bij de operator Δ, in tegenstelling tot de operator D, het limietbegrip geen rol speelt, zijn sommige afleidingen enerzijds eenvoudiger, anderzijds zijn bepaalde formules mede daardoor ingewikkelder.

Vooraf aan de werkgroep wordt een aantal problemen uitgedeeld die bovengenoemde problematiek illustreren.

Invloed, conflict en contact in de meetkunde

Dirk Siersma
Vakgroep Wiskunde, Universiteit Utrecht

- Hoe verdeelt men visserijzones tussen een aantal eilanden in de zee?
- Wat is de dichtstbijzijnde planeet in de ruimte?
- Wat is de opdeling van Nederland in provincies als we de afstand tot de provinciehoofdstad minimaal nemen?

Wiskundig bekijken we afstanden tot diverse objecten in het vlak of de ruimte (punten, lijnen, cirkelschijven, bollen, eilanden in de zee). Punten die dichter bij een object A liggen dan bij andere objecten behoren tot de invloedsfeer van A. De randen ervan zijn de conflictgebieden.

Voorbeelden leveren als conflictverzamelingen: middelloodlijnen, bissectrices, parabolen, zadelvlakken, enzovoort. Daarnaast komen `drielandenpunten' veelvuldig voor, maar soms ook ingewikkelder conflictpunten.

Er zijn verbanden met ingeschreven en omschreven cirkels, de cirkels van Apollonius, maar ook met Voronoi-betegelingen in het vlak, enzovoort.

Kun je op computeralgebra rekenen?

André Heck
Expertisecentrum Computer Algebra Nederland, Amsterdam

Het ultieme doel van computeralgebra is het automatiseren van wiskunde. De hiervoor benodigde software, bekend onder de naam computeralgebra-systeem, is bedoeld als werkomgeving voor het uitvoeren van wiskundige en technische berekeningen. Binnen zo'n moderne werkomgeving krijgen symbolisch rekenen, numeriek rekenen, grafiek, documentatie en aansluiting met andere software grote aandacht.

In deze presentatie gaan we met de vraag `Wat heb ik nu aan computeralgebra?' in het achterhoofd, in op aspecten van gebruik van een computeralgebra-systeem als werkomgeving. Niet alleen de kwaliteit van de geleverde wiskunde komt aan bod via concrete voorbeelden, maar ook het bedieningsgemak en de vraag voor welke problemen de gebruiker en de softwaremaker zich vanuit verschillend perspectief gesteld zien.

Bij gebruiksaspecten kunt u denken aan zaken als: Hoe behoud ik overzicht over een formule, hoe vereenvoudig ik wiskundige formules, hoe manipuleer ik een onderdeel van een formule, hoe omzeil ik automatische vereenvoudigingen?

```
In[1] := Sin[a+b+c] /. Sin[x-+y-] -> Sin[x]Sin[y] + Cos[x]Sin[y]
Out[1] = Cos[a] Sin[b+c] + Sin[a] Sin[b+c]
In[2]: = Sin[a+b+c] //. Sin[x-+y-] -> Sin[x]Sin[y] + Cos[x]Sin[y]
Out[2] = Cos[a] (Cos[b] Sin[c] + Sin[b] Sin[c]) +
> Sin[a] (Cos[b] Sin[c] + Sin[b] Sin[c])
```

Mag het een beetje inspirerend zijn?

Nora Blom, Hogeschool van Amsterdam, Amsterdam
Regien Bosman, Zernike College, Groningen

Mevrouw Rose Flower werd in Engeland in 1991 uitgeroepen tot `Maths Teacher of the Year'. Op het prikbord in haar klas hangen prachtige symmetrische figuren. Daartussen hangt een bordje met de uitspraak van - alweer - de Engelse wiskundige G.H. Hardy:

A Mathematician, like a Painter or a Poet, is a Maker of Patterns.

Dat is een uitspraak die wij van harte onderschrijven. Nu een groter beroep wordt gedaan op de zelfstandigheid van leerlingen, `de leerlingen aan het werk', wordt de rol van de docent meer voorwaarden-scheppend. De aankleding van het lokaal, de keuze van de leerstof en het werken met materiaal zijn daarbij belangrijke elementen. Het zijn de voorwaarden die ervoor zorgen dat de leerling met plezier werkt en dat er wat geleerd wordt.

Sommige scholen hebben keuze-uren: uren waarop leerlingen kiezen welk vak ze volgen en met welk onderwerp ze daarin bezig willen zijn. In dit keuze-uur van deze wiskundedagen kiezen wij voor het onderwerp: Regelmaat en Symmetrie. Een onderwerp dat een beroep doet op het gevoel voor schoonheid binnen het vak wiskunde. Wij zullen onder andere ingaan op de volgende vragen:

- wat is er in dit opzicht gebeurd op de basisschool?
- hoe pak je de draad weer op in klas 1?
- hoe laat je een leerling in klas 4 vbo/mavo een werkstuk maken over dit onderwerp?

Kortom, wordt er op school voldoende aandacht besteed aan de esthetische kant van wiskunde?

Albern, K. e.a. The language of pattern.
Bain, G. Celtic Art.
Bourgoin, J. Arabic geometrical pattern and design.
Fäustler, A. Perspectief en projectie.
Hildebrandt, S. en A. Tromba (1985). Natuur en techniek. Maastricht / Brussel.
Jansen, P. en R. Kock. Informatica met logo. Enschede: SLO.
Lauwerier, H. (1988). Symmetrie. Amsterdam: Aramith Uitgevers.
Lauwerier, H. Fractals.
Lawler, R. Sacred geometry.
Locher, J. L. Leven en werk van M.C. Escher.
Meeder, M. e.a. (1987). Vriendelijke wiskunde. Amsterdam: Werkgroep Vrouwen en Wiskunde.
Meeder, M. en H. Verhage (1989). Regelmaat en symmetrie (leerlingenmateriaal en docentenhandleiding). Utrecht / Enschede: Freudenthal instituut / SLO.
Speltz, A. The styles of ornament.

Wiskunde en beroep

Bernadette van den Anker
SG Echnaton, Almere

`Welke wiskunde heb je later nodig?', `Wat moet ik hier nu mee?' Het zijn vragen die iedere docent vroeg of laat te beantwoorden krijgt.

In deze workshop worden geen antwoorden op deze vragen gegeven, maar hooguit aanwijzingen die te maken hebben met de toekomst van de wiskundeleerling. Het gaat om keuzebegeleiding in de les. Voor de leerling staat de volgende vraag centraal:

Welke wiskunde heb ik nodig in mijn toekomstig beroep?

De lessen die daarvoor geschreven zijn, zijn gebaseerd op materiaal dat ontwikkeld is door `Vrouwen en Wiskunde'. Deze lessen zijn dit schooljaar gegeven in de tweede klas van een brede scholengemeenschap.

Het materiaal is geschikt voor leerlingen van ivbo tot en met vwo.

Computernetwerken. Niets voor het onderwijs?

Sieb Kemme, Lettelbert
Han Hermsen, Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

In deze presentatie wordt met demonstraties ingegaan op de mogelijkheden die computernetwerken het onderwijs al te bieden hebben en in de toekomst zouden kunnen gaan bieden.

Sieb Kemme introduceert en demonstreert de SLO-lijn, een door de Stichting Leerplanontwikkeling beheerd bulletin board annex elektronische brievenbus voor het onderwijs.

- hoe werkt het? wat zit erin? is er iets over wiskunde?
- hoe krijg je het eruit? wat kun je ermee?

Han Hermsen gaat in op recente ontwikkelingen als:

- met World Wide Web het Internet op;
- het gebruik van Internet door scholen in de Verenigde Staten;

en op de toekomst:

- de rol die netwerken kunnen gaan spelen bij het inpassen van (multimediale) informatietechnologie in het onderwijs zonder de beperkingen van nu.

Computernetwerken. Niets voor het onderwijs? Dat hangt ervan af!

Je hebt er pas wat aan als je er op een makkelijke manier dingen mee kunt doen die je zinvol vindt voor het onderwijs. Denk aan:

- proefwerkopgaven en elektronische post uitwisselen met collega's;
- op het netwerk beschikbare gegevens gebruiken in de les;
- educatieve software of andere gegevens via het netwerk naar je computer `downloaden'.

Technisch is het allemaal mogelijk, in de praktijk zijn dergelijke faciliteiten beschikbaar, maar van breed georganiseerd gebruik is nog geen sprake, waardoor de waarde ervan betrekkelijk blijft.

Sinds jaar en dag zijn er bulletin boards voor het onderwijs. De SLO-lijn is er een voorbeeld van. Alles wat je nodig hebt is: een computer, een telefoonlijn, een modem, het telefoonnummer van het bulletin board en een programma op je computer om in een tijdelijk mini-netwerk met de bulletin board computer te kunnen communiceren. Zie hierboven wat je vervolgens zou kunnen gaan doen.

Het is te verwachten dat de bestaande bulletin boards gaandeweg zullen worden geïntegreerd in een modern netwerk als Internet met nog veel meer mogelijkheden. Via een fraaie bediening kun je gedigitaliseerde informatie (tekst, al dan niet bewegend beeld, geluid) op allerlei terrein vanuit binnen- en buitenland op je computer afspelen. Op dezelfde manier als bij een bulletin board ben je via één Internet-computer verbonden met alle Internet-computers in de wereld.

Wellicht zijn er docenten die nu al op Internet ergens iets tegenkomen dat in de les kan worden gebruikt. Voor de enkeling die deze `digitale snelweg' kan bereizen, zijn dit soort toevalstreffers misschien wel de spannendste dingen die je kunnen overkomen.

Computernetwerken zullen in de toekomst echter pas werkelijk betekenis krijgen voor het onderwijs als geheel, als:

- op die netwerken iets door en voor het onderwijs wordt georganiseerd;
- de gebruiker op een school met kennis van zaken op een moderne en makkelijke manier door het netwerk kan navigeren en gebruik kan maken van de geboden faciliteiten;
- elke school in staat is om op zo'n netwerk aansluiting te vinden, waardoor een Nederlandse tak van een mondiaal educatief netwerk kan ontstaan.

Wat moet er nog gebeuren om zover te komen?

Hoogtemeters

Fried den Ouden
Grensland College, Budel

In het nieuwe leerplan wiskunde voor vbo/mavo en de onderbouw havo/vwo is ruimte gereserveerd voor Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA). Het is de bedoeling dat leerlingen datgene wat ze tijdens de wiskundelessen geleerd hebben, leren gebruiken en toepassen in alledaagse situaties. Omdat er weinig of geen concrete richtlijnen zijn, zal iedereen naar eigen inzicht een invulling geven.

In deze workshop laten we de deelnemers kennis maken met het ontstaan en de uitvoering van zo'n GWA-project. Aan de orde komen:

- aanleiding en opzet project;
- keuze maken uit verschillende meetmethodes;
- hoe zelf eenvoudige meetinstrumenten te vervaardigen;
- maken van leerlingenwerkbladen;
- mogelijk zelf metingen verrichten;
- bekijken beeldverslag van het project;
- mogelijke uitbreiding met moeilijker instrumenten.

De deelnemers aan de workshop krijgen een reader uitgereikt waarin opgenomen: de totstandkoming van het project, de leerlingenwerkbladen, een verslag van de uitvoering en een evaluatie van het geheel. De reader omvat ongeveer 25 bladzijden.

Expositie

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen zal een drietal kunstenaars, te weten W. Vastrick, K. Verhoeff en G. Traarbach, enkele kunstwerken tentoonstellen. In deze kunstwerken wordt zichtbaar hoe wiskundige principes richting kunnen geven aan kleur, afmeting, schakering, etcetera.

In kleine toelichtingen bij de kunstwerken kunt u lezen welke wiskundige principes er aan ten grondslag liggen. Speciaal ter gelegenheid van deze conferentie wordt een klein boekje uitgegeven onder redactie van Professor van der Blij en Ed de Moor. Het boekje bevat een aantal artikelen over wiskunde en kunst en de gebundelde toelichtende teksten bij de kunstwerken.

Overige activiteiten

De Nationale Wiskunde Dagen zijn in de belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes zijn met opzet ruim gepland, zodat u van gedachten kunt wisselen met collega's. Het Leeuwenhorst Congres Centrum biedt bovendien voldoende rustige hoekjes om u terug te trekken om samen met een collega over de wiskunde en het wiskundeonderwijs te praten.

Naast de thema's en lezingen die buiten de thema's vallen is er op de Nationale Wiskunde Dagen nog veel meer te zien en te beleven. Op vrijdagavond is er feest met live muziek en zaterdagochtend wordt er voor de liefhebbers nog een fun run georganiseerd.

Muziek in het café

Ingrid Souren zingt met pianobegeleiding in de lounge bij het èf-café van 22.00 tot 24.00 uur. Ingrid Souren zingt zo'n beetje alles: chansons, ballads, rock, klassiek, ... Ze kan putten uit een veelzijdig repertoire. Voor deze gelegenheid hebben wij haar gevraagd bescheiden achtergrondmuziek te zingen. U mag daar doorheen praten.

Rock & roll

In de pre rock 'n roll dagen van eind jaren veertig, begin jaren vijftig, weten rhythm & blues sterren als Tiny Bradshaw, Big Joe Turner, Buddy Johnson en Louis Jordan met hun wervelende en energieke show elke zaal op zijn kop te zetten.

Ruim veertig jaar later zwepen de Gigantjes het publiek op met dezelfde aanstekelijke muziek. De band weet daarbij precies dezelfde sfeer neer te zetten als de helden in die tijd.

De Gigantjes zijn begonnen in 1984 als hobby-band bestaande uit muzikanten die hun sporen in de muziek ruimschoots verdiend hebben. Met de komst van zangeres Mieke kreeg de band een eigen gezicht. Al gauw groeiden de Gigantjes uit tot een van de meest gevraagde live-acts van Nederland.

De groep staat garant voor een avondvol vaart en variatie. Muziek met een hoog entertainmentgehalte. Blijf daar maar eens bij zitten.

De Gigantjes treden op van 23.00 tot 1.00 in de Rotondezaal.

Mieke Stemerdink zang Sjoerd Plak gitaar
Rob Kruisman saxofoon Fred van Straaten trompet
Rob Brondsema bas Peter Paul Everts piano & keyboard
Pete Dobson drums

Fun run

Speciaal voor degenen die vrijdagavond niet gedanst hebben of anderszins een fysieke inspanning hebben gepleegd, alsmede voor diegenen die stramme leden hebben overgehouden aan de vrijdagavond, en in het bijzonder voor hen die willen aantonen dat enig drankgebruik een prima conditie niet in de weg hoeft te staan, is er zaterdagochtend de gelegenheid om vijf kilometer te fun-runnen.

De start is stipt om 7.15 uur in de morgen.

Deelname is gratis en als beloning ligt er een prachtig T-shirt voor u bij de finish te wachten. Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn.

Nationale Wiskunde Dagen 1996

De tweede Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op vrijdag 2 en zaterdag 3 februari 1996. Bij het organiseren van deze tweede Nationale Wiskunde Dagen hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de eerste Nationale Wiskunde Dagen.