

# NOORDWIJKERHOUT

30 en 31 januari 1998

---

*Voorwoord en welkom*

## Vier de vierde Nationale Wiskunde Dagen!

Opgewekte, geestige, enthousiaste en geanimeerde mensen bevolken deze twee dagen de Leeuwenhorst, en de creativiteit straalt er vanaf. Wat wil je ook anders. Wiskunde is en blijft een vak met ontzettend veel facetten waar de leek en vaak ook de deskundige geen weet van heeft. Zo zullen er deze komende Nationale Wiskunde Dagen weer schellen van de ogen vallen, nieuwe perspectieven opdoemen, oude zaken een nieuwe lading krijgen. De thema's beloven weer van alles en nog wat: medische wetenschap, luchtvaart, geschiedenis, taal, sterrenkunde en discrete wiskunde. Oude en nieuwe collega's wisselen ervaringen en ideeën uit. Het mag na drie jaar nauwelijks nog verbazing wekken dat de meest gehoorde reactie is dat men zich weer helemaal 'opgeladen' voelt.

De opening van de dagen is tot nog toe een zeer bescheiden aspect geweest. Die traditie willen we graag in stand houden. Toch stellen we er prijs op goede openingsprekers te vinden. Het is ons een plezier en genoeg dat we dit jaar de directeur van de afdeling Voortgezet Onderwijs van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen Dr. Leon Henkens bereid hebben gevonden enige gevoelige woorden tot u te willen richten.

Een prachtlijst met plenaire presentaties (Van Lint, Icke, Wright en Field) vindt een evenknie in de lijst van themapresentaties waarbij het maken van keuzes weer een groot probleem wordt. Schroomt u vooral ook niet de enige buitenlandse bijdrage in deze groep met een bezoek te vereren: Eleanor Robson over het oude babylonische rekenen. Waarbij we voor het gemak Zagier niet als buitenlander opvoeren: hij werkt ook in Utrecht. En de Belg Michel Roelens al helemaal niet: hij lijkt de vaste gastspreker te zijn geworden.

Er is ook slecht nieuws: de ontwerpdagen zijn even in de ijskast gezet wegens groot succes. Het bleek niet mogelijk om de activiteiten van vorig jaar dit jaar voort te zetten. Maar we zullen ze zo spoedig als organisatorisch mogelijk is weer tot leven wekken.

Er zijn alleen maar weer kleine wijzigingen in vergelijking met vorig jaar. De belangrijkste wijziging voor u in de praktische zin is dat er dit jaar bij aankomst op station Leiden ook om 10.00 uur een bus voor u gereed staat.

We rekenen erop dat u zaterdagmiddag weer moe en voldaan, maar ook 'opgeladen' huiswaarts zult keren. En alvast noteren: de NWD 5 zullen plaatsvinden op 5 en 6 februari 1999.

Jan de Lange

voorzitter programmacommissie

---

## Organisatie Nationale Wiskunde Dagen

De Nationale Wiskunde Dagen 1998 worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en in samenwerking met het Interfacultair

Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievoordigheden (IVLOS) van de Universiteit Utrecht.

***Programmacommissie***

Mw. B.A.M. van den Anker  
F. van der Blij  
Mw. R. Bosman  
H.G.B. Broekman  
S.J. Doorman  
H.J.A. Duparc  
A. Heemink  
Mw. J. van den Hof  
J. Hop  
F. den Hollander  
K. Hoogland  
Mw. M. Kool  
P.M.G.M. Kop  
J. de Lange  
J. van Lint  
J.A. van Maanen  
J. Molenaar  
Mw. A.B. Paalman-de Miranda  
D. Siersma  
P. van Wijk

***Uitvoerend comité***

Michiel Doorman  
Sylvia Eerhart  
Els Feijs  
Ellen Hanepen  
Ank van der Heiden  
Jan de Lange  
Martin van Reeuwijk  
Heleen Verhage

---

## Conferentiegid's NWD 1998

### Inhoud

#### Plenaire lezingen

- *Prof.dr. J.H. van Lint*
- *Prof. dr. V. Icke*
- *Dr. C.D.Wright*
- *Dr. J.V. Field*

### Thema's

- *discrete wiskunde*
- *wiskunde en geschiedenis*
- *wiskunde en taal*
- *wiskunde en luchtvaart*
- *wiskunde en medische wetenschappen*
- *wiskunde en sterrenkunde*

#### Overige presentaties

#### Overige activiteiten

- *expositie*
- *informatiemarkt*
- *workshops van standhouders*
- *hoera 'n probleem*
- *informatietechnologie*
- *ramsj*
- *muziek*
- *fun run*

#### Tijdschema

---

### Plenaire lezingen

Er staan vier plenaire lezingen op het programma. De buitenlandse sprekers zullen hun voordracht in het Engels houden.

#### *Wiskunde en de Compact Disc*

Prof.dr. J.H. van Lint  
Stan Ackermans Instituut, TU Eindhoven

Het geweldige succes van de *Compact Disc* (een Nederlandse uitvinding!) is te danken aan allerlei technische innovaties, maar ook aan een flinke portie *wiskunde*. Een symfonie in digitale vorm is een rij van (miljarden) *nullen* en *enen*. Bij het aflezen van de plaat worden veel van deze *bits* verkeerd geïnterpreteerd ( $0 \not\approx 1$ ,  $1 \not\approx 0$ ) door vuil, beschadigingen, persfouten, luchtbellens, enzovoort. Op één CD kunnen dat wel 500.000 fouten zijn! Door een algebraïsch algoritme wordt de oorspronkelijke rij *nullen* en *enen* omgezet in een zogenaamde *foutenverbeterende code*, een *langere* rij die ook

uit *nullen* en *enen* bestaat. Deze code maakt het mogelijk dat de afleesapparatuur (= de CD-speler) *berekent* waar de fouten zitten en ze *verbetert*.

Door oversimplificatie tonen we met zeer eenvoudige voorbeelden welke principes hierbij gebruikt worden.

De hierboven beschreven rij *nullen* en *enen* is *niet* wat op de CD komt. Er is nog een tweede vertaalslag nodig (EFM = eight to fourteen modulation). Deze zorgt ervoor dat we een rij krijgen met geïsoleerde *enen*, gescheiden door blokjes van twee tot tien nullen. Deze rij komt op de plaat als een spoor van zogenaamde *putten* en *dammen* (de stukken tussen de putten heten dammen). Als de laserbundel van de CD-speler een overgang (bijvoorbeeld van put naar dam) constateert, dan wordt dit als een 1 gelezen en anders als een 0 (het aantal *nullen* hangt af van de lengte van de put of de dam). Het idee bij deze vertaling is een generalisatie van het bekende probleem van de *n* naast elkaar staande leeuwenkooien, waarbij nooit twee leeuwen in aangrenzende kooien mogen zitten (Fibonacci).

Dit stuk wiskunde maakt het mogelijk dat een laserbundel van 1  $\mu\text{m}$  (a) het spoor volgt zonder naar een naburig spoor over te springen; (b) steeds constante afstand tot de plaat heeft; (c) de synchronisatie verzorgt.

De wiskunde die bij de CD werkelijk wordt gebruikt, is slechts in detail en uitwerking (veel) lastiger dan wat wordt verteld; de principes zijn precies hetzelfde.

### ***Van appels tot zwarte gaten***

Vincent Icke  
Sterrenwacht Leiden en Universiteit van Amsterdam

De zwaartekracht is de grootmeester van het Heelal. Alle structuren waaraan wij ons bestaan danken (Aarde, Zon en sterren, de Melkweg, ja het Heelal zelf) worden gedomineerd door de zwaartekracht.

Wiskundig gezien, biedt de zwaartekracht zeer veel aanknopingspunten. De wiskundig precieze beschrijving van natuurverschijnselen dateert grotendeels van Newton's baanberekeningen. Deze zullen in de voordracht aanschouwelijk worden gemaakt door het recept 'baanbeweging is voortbewegen plus vallen' zowel grafisch als algebraïsch te behandelen. In een didactische toepassing kan men hierin zover gaan als men wil. Een voorbeeld van een numerieke toepassing zal op een Macintosh worden gedemonstreerd.

Vervolgens is er Einstein's beschrijving van de zwaartekracht als afkomstig van de structuur van ruimte en tijd. Ook dit kan gemakkelijk aanschouwelijk worden gemaakt door kromming van oppervlakken te meten. Een bouwplaat van een zwart gat is hiervoor beschikbaar.

De didactisch interessante kant van de zaak gaat voornamelijk over de toepassing van een minimum-principe bij het bepalen van banen (Fermat: de kortste weg, Snellius, en de Einsteinvergelijking). Ook hiervoor is een Macintosh-demo beschikbaar, van banen van lichtstralen rondom een zwart gat.

### ***Juggling - Theory and Practice***

Dr. C.D. Wright  
Denbridge Digital Ltd, Merseyside, England

Juggling has fascinated many for centuries. Seemingly oblivious to gravity, the skilled practitioner can keep several objects in the air at one time, and weave complex patterns that seem to defy analysis.

In this talk the speaker demonstrates a selection of patterns and skills of juggling while at the same time developing a simple method of describing and annotating a class of juggling patterns. By using elementary mathematics these patterns can be classified, leading to a simple way to describe those patterns that are known already, and a technique for discovering new ones.

The talk is suitable for all ages. Those with some mathematical background should find plenty to keep themselves occupied, while those less experienced can enjoy the juggling and the exposition of this ancient skill.

### **Piero della Francesca: Mathematics and Painting**

Dr. J.V. Field

Department of history of art, Birbeck College, London, Engeland

Art historians re-discovered Piero as an 'important' Renaissance painter in the 1920s. It is probably because of his acknowledged importance as a painter, and the divisions imposed by the present-day system of academic disciplines, that in recent times Piero's painting has received much more attention than his mathematics.

He was in fact a very competent mathematician. This is to be seen in the three mathematical treatises that are known to survive - all available in modern printed editions - namely his *Trattato d'abaco*, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, and *De prospectiva pingendi*. The last of these works was, as far as we know, the first treatise on the mathematical technique of perspective. It became the model for all subsequent treatises. However, it is not only the perspective treatise which shows connections between Piero's mathematics and his work as a painter. The work of the other two treatises also shares with the paintings an unusual degree of skill in understanding three-dimensional relationships. For instance, this skill seems to me to underlie both the famous 'stillness' of Piero's paintings and his re-discovery of some of the Archimedean polyhedra.

## **Thema discrete wiskunde**

Dit keer is het onderwerp van het thema 'wiskunde om de wiskunde' de discrete wiskunde. De naam is in deze eeuw ingevoerd voor een aantal onderwerpen in de wiskunde waarbij het om eindige processen gaat. Uitdrukkingen als 'limiet' en 'naderen tot' komen er als regel niet in voor.

Een probleem als 'hoeveel vierkantjes van 1 bij 1 centimeter passen in een groot vierkant van 99,9 bij 99,9 centimeter?' is zelfs voor een snelle computer niet zo goed te behappen. De vraag of er een projectief vlak met 111 punten (net zoiets als het bekende projectieve vlak met 7 punten) bestaat, kostte ook vele, vele uren computertijd.

Discrete wiskunde is vooral ook bekend geworden door de toepassingen ervan in de theorie van de codering. Een boek, een huis, een bankbiljet, kunnen aangeduid worden door een naam of door een getal. Bij een boek is dat de titel, de schrijver, de plaats van uitgave en de datum enerzijds en de ISBN-code anderzijds.

De eerste methode vraagt veel aanslagen op het toetsenbord en de cijfercode maar enkele, maar: een tikfoutje is dan wel catastrofaal, tenzij er iets bijzonders met die codegetallen aan de hand is. Het getal moet bijvoorbeeld altijd door 9 of door 11 deelbaar zijn. Je weet dan snel dat er een fout gemaakt is, maar of je hem ook direct kunt corrigeren?

Over pincodes en geheimschriftcodes, over geheime financiële en andere oorlogscorrespondentie is al zoveel geschreven, dat u vast wel weet dat die zaken ook tot het vakgebied van de discrete wiskunde gerekend worden.

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen 1998 zullen enkele uiteenlopende onderdelen van de discrete wiskunde aan de orde komen.

### ***Grafentheorie en het maken van het spoorboekje***

Alexander Schrijver

CWI, Amsterdam

Het Centrum voor Wiskunde en Informatica maakt voor de Nederlandse Spoorwegen een systeem dat het uurlijkse patroon voor het spoorboekje bepaalt, gegeven de marktwensen en de mogelijkheden en beperkingen van de infrastructuur.

Het probleem wordt opgelost met behulp van een omzetting in een grafentheoretisch probleem, waardoor de verbanden tussen de verschillende wensen en eisen kunnen worden gevisualiseerd. Het doorwerken van keuzes bij het opstellen van de dienstregeling kan worden onderzocht met behulp van methoden uit de grafentheorie.

In de voordracht zal het probleem worden ingeleid en zal worden uitgelegd hoe grafen gebruikt kunnen worden bij het oplossen van het probleem. Ook zal worden ingegaan op het vinden van een optimale dienstregeling.

### ***Pakken en overdekken met cirkels***

Hans Melissen

Hogeschool 's-Hertogenbosch

Het blijkt helemaal niet eenvoudig te zijn om configuraties te vinden van cirkels die elkaar niet overlappen, of die juist met z'n allen een andere verzameling overdekken, terwijl ze ook nog optimaal zijn in een of andere zin.

Een typisch pakkingsprobleem is het volgende. Zes wijnflessen moeten in een vierkante doos worden gezet. Hoe groot moet deze doos minimaal zijn? Hoe groot kan de doos maximaal zijn als de flessen er zonder te rammelen ingezet kunnen worden?

Iets dergelijks kun je doen op een bol. Daar staat het probleem bekend als het probleem van Tammes, naar de Nederlandse bioloog die het bestudeerde in verband met de verdeling van uittree-openingen op stuifmeelkorrels.

Een voorbeeld van een overdekkingsprobleem is als volgt. In een land moeten zeven zendmasten worden geplaatst zodanig dat elke plek door minstens één zender wordt bestreken. Waar moeten de zendmasten worden neergezet, en wat is het minimale bereik van de zenders?

Wiskundig gezien leveren dit soort problemen twee uitdagingen op. De eerste is het verbeteren van eerder gevonden configuraties en het vinden van nieuwe. Hier is duidelijk een competitie-element aanwezig. De tweede kant van de medaille is het geven van een optimaliteitsbewijs. Meestal is dat veel moeilijker, omdat er weinig algemene theorie is die hierbij behulpzaam kan zijn. Vaak lukt het toch nog wel met hele elementaire methoden.

Tijdens de lezing zal uitgebreid worden stilgestaan bij de diverse aspecten van de problemen en er wordt een historisch overzicht van de ontwikkelingen in dit gebied gegeven. Ook wordt aandacht besteed aan een aantal vermoedens en problemen die nog openstaan.

### **De Whizzkids prijsvragen**

Prof.dr. J.K. Lenstra

Technische Universiteit Eindhoven; CWI, Amsterdam

Zaterdag 9.00-9.45 uur

CMG Nederland, de Technische Universiteit Eindhoven en het dagblad De Telegraaf organiseerden in 1996 en 1997 twee prijsvragen. Het doel daarvan was om bij middelbare scholieren belangstelling te wekken voor wiskunde en informatica. In 1996 ging het om het opstellen van een bezorgschema voor krantenjongens, in 1997 om het maken van een rooster voor een ouderavond. In beide gevallen betrof het een lastige instantie van een eenvoudig te formuleren optimaliseringsprobleem, die zowel de puzzelaar aan de keukentafel als de gevorderde algoritmicus boeiende avonden en slapeloze nachten kan bezorgen.

In deze voordracht ga ik in op de achtergronden van de prijsvraag en ik bespreek hoe we de opgaven zelf hebben aangepakt. Hoe bereken je een goede oplossing? En hoe zou je kunnen bewijzen dat er geen betere oplossing is?

### **Rond het getal $p$**

Prof.dr. Don Zagier

Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Het getal  $p$ , de verhouding tussen omtrek en doorsnee van een cirkel, heeft de mensheid sinds de oudheid gefascineerd en was bij verschillende antieke volkeren bij benadering bekend. (Schijnbaar komt in de Bijbel de heel slechte benadering ' $p = 3$ ' voor, maar daar valt een verhaal over te vertellen....) In modernere tijden zijn de benaderingen steeds beter geworden: ze bereiken nu miljarden decimalen.

Het probleem lijkt bij uitstek buiten het kader van de discrete wiskunde te liggen, omdat het juist over naderen en limietprocessen gaat. Veel van de methoden die tegenwoordig gebruikt worden, komen echter uit de getaltheorie en hebben dus wel een discrete natuur. Dit hangt enerzijds samen met de ontdekkingen van Leibniz en Euler dat verschillende uit de natuurlijke getallen gevormde reeksen in termen van  $p$  berekend kunnen worden en anderzijds met het optreden van het getal  $p$  in de theorie van de zogenaamde modulaire vormen. In de voordracht zal een reeks voorbeelden worden gegeven. Als voorbereiding kan men proberen een elementair bewijs te vinden van de vergelijking:

$$(1 + + + + \dots)^2 = (1 + + + + \dots)$$

## **Thema Wiskunde en geschiedenis**

Zolang er wiskunde bestaat, bestaat het vak van wiskundeleraar. Een prachtig vak! Een vak waar menig NWD-bezoeker helemaal lyrisch van wordt - leg straks in Noordwijkerhout uw oor maar eens te luisteren in de wandelgangen. Toch kent elke wiskundeleraar ook zijn frustrerende momenten: je haalt alles uit de kast, wringt je in allerlei bochten en als puntje bij paaltje komt, haken de leerlingen toch nog af. Kenden onze voorgangers deze problemen ook? Hoe gaven zij wiskundeles? Tijdens de historische werkgroepen van deze NWD werpen we een blik in de keuken van onze wiskundecollega's

van vroeger. Grote verschillen springen onmiddellijk in het oog: geen computers, geen rekenmachines, soms zelfs geen boeken, maar zand, kleitabletten en rekenpenningen en vooral: een totaal andere leerstof.

Het zal niemand verbazen dat de tekst van Babylonische kleitabletten van 4000 jaar voor Christus afwijkt van de inhoud van onze hedendaagse wiskundeboekjes. Maar een terugblik op de leerstof van de wiskundeaktes van amper een halve eeuw geleden, levert minstens zulke grote verschillen op.

Eén ding is door de eeuwen heen onveranderd gebleven: het onvermoeibare enthousiasme en de liefde van de wiskundeleraar voor zijn vak. Hoewel? Een enkele historische collega is eerlijk genoeg om soms zijn frustraties te laten blijken: Martinus van Wentsel schrijft in zijn rekenboek van 1599: 'Soo dat ... geen armer noch verdrietelijcker ende onproffijtelijcker ambacht ... en is als rekenmeester.' Wie de historische werkgroepen bezoekt, wordt een spiegel voorgehouden. Kijken naar jezelf, daar wordt elke wiskundeleraar beter van.

### ***Couting in cuneiform\*: Old Babylonian arithmetic at school***

Dr. Eleanor Robson

University of Oxford, England

We all use base 60, every day of our lives, but we rarely give much thought to the people who invented the sexagesimal system around 4000 years ago in ancient Mesopotamia. In this workshop you'll become a trainee scribe for the day and learn how to write on clay (actually plasticine) tablets with wooden styluses. We'll discuss:

what sort of maths you'll need to know, to use in your profession;

and practice:

how to count and write base 60 numbers in cuneiform;

how to record multiplication and division on a clay tablet;

how to use mathematical tables to help you with your calculations.

If you're very hard-working and intelligent new scribes we may even have time to:

work in a group to solve a practical mathematical problem.

You'll be able to keep your tablet and stylus, and there will also be lots of other resource material available for you to take away and adapt for training the young scribes in your school. Speaking in Babylonian will not be compulsory!

\* cuneiform: spijkerschrift

Alhoewel deze workshop in het Engels gehouden wordt, kunnen wij u verzekeren dat die zeer toegankelijk is. En het spijkerschrift van de kleitabletten blijft natuurlijk gewoon spijkerschrift!

### ***Waarom kort als het ook lang kan?***

Marjolein Kool



Hogeschool Domstad, Utrecht

Hoe vaak zal een gemiddelde wiskundeleraar met pakweg twintig jaar onderwijservaring de rekenkundige symbolen +, -,  $\times$  en : uit zijn pen, krijtje of printlint hebben laten vloeien? Dat aantal moet in de miljoenen lopen. Zou hij of zij wel eens stilstaan bij het feit dat vroegere collega's, de zestiende-eeuwse rekenmeesters, wiskundige vraagstukken moesten oplossen, noteren en onderwijzen zonder dat ze de beschikking hadden over deze handige tekenstempels? Wat had dat voor gevolgen? Tijdens mijn workshop zullen we ons over deze vraag buigen.

Gedurende de zestiende eeuw wordt in de Nederlanden het rekenen met penningen langzamerhand verdrongen door het rekenen met de pen; de Hindoe-Arabische cijfers deden alom hun intrede. Maar wat zet je op papier als er geen schriftelijke rekentraditie is?

Aanvankelijk noteert men hele lappen tekst waarin het oog van de lezer snel het spoor bijster raakt. Maar rekenmeesters van 400 jaar geleden zijn ook niet van gisteren. Al snel onderneemt men allerlei pogingen om de wiskunde korter, schematischer en overzichtelijker te noteren. Allerlei geïmproviseerde lijnen, kaders en tekens doen hun intrede en zelfs het symbool + duikt hier en daar op, al heeft het in de zestiende-eeuwse rekenboeken allerlei andere betekenissen dan de hedendaagse.

Deelnemers aan mijn workshop krijgen verschillende creatieve wiskunde-kraakjes van hun historische collega's onder ogen en mogen puzzelen op de vraag wat er met die kraakjes bedoeld zou kunnen zijn. Natuurlijk mogen de kopieën mee naar huis, of liever nog: mee naar school, want het is niet alleen voor wiskundeleraars nuttig om eens stil te staan bij zoiets vanzelfsprekends als wiskundige symbolen, dat geldt voor hun leerlingen net zo goed.

Eén ding kan ik alvast beloven: iedereen die mijn workshop bezoekt, zal in de toekomst dolblij zijn dat hij of zij gewoon '56 : 4' op het bord mag schrijven in plaats van het zestiende-eeuwse: 'Hoe menichwerf 4 begrijpt het ghetal 56'.

Hier volgt alvast een voorproefje uit het Italiaanse rekenboek van Filippo Calandri, 1491:

Een leeuw kan een geit in twee uur opeten. Een wolf doet er drie uur over. En een vos verslindt een geit in vijf uur. Als die leeuw, die wolf en die vos gezamenlijk een geit consumeren, hoeveel tijd hebben ze daarvoor nodig?

Filippo noteerde zijn oplossing op beknopte wijze in een dikomlijnd kader (zie plaatje). Kunt u zien hoe hij het heeft aangepakt?

### ***Een schilderij komt tot leven***

Michel Roelens

Maria Boodschaplyceum, Brussel

Katholieke Hogeschool Limburg, Hasselt, België

Op een lei wordt een meetkundig figuur getekend. Het is een detail van een doek van vijfhonderd jaar geleden, waarop een wiskundeles is vereeuwigd.

Van welke leraar is de hand? Wie schildert? Waarover gaat de les? Wie krijgt les?

Vertrekkend van het (volledige) schilderij, willen we deze historische wiskundeles reconstrueren en actualiseren. Hiertoe gaan we even neuzen in oude teksten, wagen we hier en daar een gok en experimenteren we met karton en computer.

## ***De geschiedenis van de akten K1 en K5***

Klaske Blom

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Met de invoering van het middelbaar onderwijs in 1863 werden er veel Hogere Burgerscholen opgericht. Voor deze scholen kon men een lesbevoegdheid krijgen door een aktenstudie, die speciaal bedoeld was voor hoofdonderwijzers uit het lager onderwijs.

Voor het vak wiskunde waren er twee te behalen akten, namelijk K1 en K5. Het behalen van de akte K1 gaf toegang tot het examen voor K5. En met de akte K5 verkreeg men de bevoegdheid om in alle klassen van het middelbaar onderwijs les te geven. De vakken waarin geëxamineerd werd voor het examen K1 waren: driehoeksmeting, algebra, analytische meetkunde, meetkunde en beschrijvende meetkunde. En voor K5: differentiaalrekening, integraalrekening, analytische meetkunde en beschrijvende meetkunde.

Het was voor de meeste kandidaten een zware klus om te slagen voor deze examens.

Tijdens mijn voordracht wil ik u meer vertellen over de factoren die daarbij een rol speelden. Verder wil ik met u kijken naar een kleine greep uit de meetkunde die de kandidaten moesten bestuderen; uiteraard zullen we er ook zelf aan werken. Misschien zal het voor sommigen onder u herinneringen doen opborrelen uit uw eigen middelbare schooltijd. Voor anderen is het misschien net zo ontoegankelijk als het voor mij was toen ik de stof voor het eerst onder ogen kreeg. Heeft u zich wel eens gebogen over de prachtige, maar ingewikkelde constructies uit de beschrijvende meetkunde? Kent u de boeken van Molenbroek, Schuh, Van Veen, Barrau?

In deze voordracht hoop ik enig zicht te laten krijgen op de opleiding die veel van uw collega-voorgangers decennia geleden volgden.

## **Thema Wiskunde en Taal**

Wiskunde en taal lijken twee verschillende disciplines met hun eigen strikt gescheiden kampen. De discussie over de hoeveelheid wiskunde voor alfa's versterkt dit beeld. Alfa's pleiten voor weinig wiskunde omdat het voor hun profiel dan als selectie criterium fungeert, terwijl het daarvoor te beperkt is. Bèta's zijn voor veel wiskunde in alle profielen omdat de hedendaagse maatschappij daar nu eenmaal om vraagt.

Toch hoor je in de argumenten van die discussie een verband tussen taal en wiskunde. Zo zou je met wiskunde leren redeneren. Wiskunde is het vak waarmee je het analytisch en logisch denkvermogen traint. Aan de andere kant menen sommigen dat taal essentieel is bij het ordenen en organiseren van alle, en dus zeker ook wiskundige kennis. Taal is essentieel bij individuele constructies van wiskundige ideeën. Met andere woorden: wiskundeonderwijs is van belang voor het leren hanteren van taal en taalonderwijs is van wezenlijk belang voor het leren van wiskunde. Misschien liggen beide disciplines toch minder ver uit elkaar dan soms wordt verondersteld?

In dit thema zullen de eerste drie sprekers in gaan op de rol van wiskunde bij het bestuderen van taal. De laatste spreker benadrukt een ander aspect van de relatie tussen wiskunde en taal. Gerrit Krol zal laten zien in hoeverre wiskundige activiteiten en talige activiteiten nauw met elkaar verbonden zijn.

***Hoeveel wiskunde zit er eigenlijk in een zin?***

Henk J. Verkuyl

Faculteit Letteren, Universiteit Utrecht

In de rekenkunde geldt:

$3 \times 4 = (1 \times 4) + (1 \times 4) + (1 \times 4)$ , maar ook  $3 \times 4 = (1 \times 3) + (1 \times 3) + (1 \times 3) + (1 \times 3)$ .

Wat betekent nu de zin 'Drie meisjes tilden vier tafels'?

Er zijn hier twee verschillen tussen de principes die het rekenen beheersen en die welke de structuur van de zin beheersen:

(a) de zin heeft twee mogelijke interpretaties; ruwweg,  $1 \times 4$  (ze doen het samen) of  $3 \times 4$  (ze tillen twaalf tafels);

(b) de distributiviteitswet is in de zin niet commutatief (er zijn niet twaalf meisjes).

Er is nog een opmerkelijk punt: een twee keer getilde tafel telt voor twee tafels, zodat men altijd op twaalf uitkomt (in 'Drie meisjes aten vier boterhammen' gaat dit vanzelf). Er is daarmee sprake van index-afhankelijkheid.

Dat de niet-commutatieve distributiviteitswet de relatie tussen onderwerp en gezegde beheerst, is opmerkelijk. Dit geldt ook voor zinnen als 'Enkele meisjes aten een boterham', 'De jongens vulden twee formulieren in', en 'Een meisje tilde vier tafels', enzovoort. Dit kan in verband worden gebracht met een opmerkelijke eigenschap van woorden als 'drie', 'enkele', 'de', 'een', etcetera. In de zin 'Drie meisjes tilden vier tafels' legt 'drie' een (intersectie-)relatie tussen de verzameling van meisjes en een verzameling van 4-tafeltillers.

In het algemeen kunnen dergelijke zinnen gezien worden als een kunstig samenstelsel van functies die het mogelijk maken de hoeveelheidsinformatie in zinnen en daarmee optredende onderlinge afhankelijkheden, precies in kaart te brengen volgens het patroon  $1 \times m$  (constante functie) of  $k \times m$  (injectie). De predikatie uitgedrukt door een zin wordt op die manier berekenbaar en vertoont een interessante wisselwerking tussen de natuurlijke en reële getallen. Ingegaan wordt ook op de toereikendheid van kwantoren (universeel, exis-tentieel) voor het karakteriseren van de zogeheten logische vorm van zinnen. De vraag is namelijk of 'Drie meisjes tilden een tafel' mag worden geanalyseerd als 'er is een tafel zodanig dat drie meisjes tilden'. Dat gaat wel op voor de  $1 \times 1$ -interpretatie, maar niet voor de  $3 \times 1$ -interpretatie die de zin ook heeft.

### **Betekenisvolle patronen**

Prof.dr. Michael J. Moortgat

Faculteit Letteren, Universiteit Utrecht

Met computerpracticum

'The Science of Pattern'- zo noemt Keith Devlin de wiskunde in zijn boek uit de Scientific American reeks. De talen die we gebruiken om van gedachten te wisselen, zijn systemen om door middel van concrete vorm-patronen (zoals geluid en schrift) betekenis over te dragen. Wereldwijd zijn er zo'n 4000 verschillende talen. Kinderen hebben geen enkel probleem om welke taal dan ook te leren als moedertaal. Dit in tegenstelling tot de volwassene die zich moeizaam, en met wisselend succes, de spelregels van een vreemde taal probeert eigen te maken. Kan de wiskunde ons iets leren over het cognitieve vermogen dat ons in staat stelt met taalpatronen om te gaan?

De structuur van talen lijkt op het eerste gezicht erg verschillend. Toch is het bouwplan in zekere zin steeds hetzelfde: een taal beschikt over een eindige voorraad woorden (of vergelijkbare kleinste elementen) en over een eindige voorraad bewerkingen om grotere configuraties te bouwen uit kleinere. Bij de kleinste elementen is de verhouding tussen vorm en betekenis willekeurig (konijn, rabbit, lepus - wat past er niet in het rijtje?). Maar bij de bewerkingen is er een systematisch verband tussen de vorm- en de betekenisopbouw.

Welke eigenschappen hebben de grammaticale hoofdbewerkingen? Schrijven we  $A*B$  voor de combinatie van een uitdrukking A en een uitdrukking B. Het wordt snel duidelijk dat het rekenkundige vermenigvuldigen eigenschappen heeft die betekenisvolle taalpatronen verstoren. Commutativiteit  $A*B = B*A$  zou inhouden dat volgorde er niet toe doet. Vergelijk echter 'man bijt hond' en 'hond bijt man'. En ook associativiteit  $(A*B)*C = A*(B*C)$  wist relevante patrooninformatie uit: beschouw misleidende afbrekingen als 'massa-gebed', of 'massage-bed'.

We komen uit op een rekensysteem waarbij wetten als associativiteit of commutativiteit niet langer 'hard-wired' onderdelen zijn van de grammaticale bouwoperatie. Op het niveau van dit basissysteem wordt het fundamentele verband tussen vorm- en betekenisopbouw beregeld. Vervolgens kan het basissysteem gecombineerd worden met verschillende pakketten van structuur postulaten (bijvoorbeeld gecontroleerde versies van associativiteit of commutativiteit). Deze postulaten zorgen ervoor dat de vorm-betekenisrelatie in verschillende talen een verschillende structurele realisatie krijgt. De lezing gaat vergezeld van een practicum waarin de deelnemers zelf aan de slag kunnen met een expertsysteem dat structuur en werking van het grammaticale rekenen simuleert.

### **Natuurlijke talen, wiskundige talen en programmeertalen**

Johan van Benthem

Universiteit van Amsterdam

Zaterdag 9.00-9.45 uur

Natuurlijke talen zijn het meest succesvolle medium voor menselijke cognitie en communicatie. Zij hebben zich in die functie moeiteloos gehandhaafd naast diverse wiskundige 'kunsttalen', zelfs binnen de meest exacte wetenschappen (bijvoorbeeld de wiskunde zelf!). Aan dit succes liggen vaste patronen ten grondslag die we kunnen beschrijven met wiskundige middelen, bijvoorbeeld uit de algebra en de logica. De vorige twee lezingen gaven hiervan reeds sprekende voorbeelden. In deze voordracht bespreken we meer het algemene wiskundige kader. Onze beschrijving is geïnspireerd door 'Montague's These' over de eenheid van natuurlijke en formele talen (1970).

Inmiddels is in onze tijd echter een derde taalgenre in opkomst. Tussen natuurlijke talen en formele talen staan namelijk programmeertalen, kunstmatig ontworpen, maar natuurlijk gebruikt voor communicatie tussen mens en machine. Programma's beschrijven gewenste toestandsveranderingen van een rekenautomaat. Maar welbeschouwd is ook de voornaamste functie van natuurlijk taalgebruik het communicatief doelbewust veranderen van toestanden, bij toehoorders en lezers. Ook deze 'dynamische wending' kan wiskundig worden gemodelleerd, en wel in Relatie Algebra, een uitbreiding van de Boolese Algebra. We geven enkele illustraties van relatie-algebraïsche patronen in interpretatieprocessen, maar ook in grammaticale constructie.

Tenslotte staan we stil bij wat men mag verwachten van deze studie. Wiskunde alleen kan nooit de natuur uitputtend beschrijven, en evenmin de taal: maar ze formuleert wel algemene patronen achter de chaos van empirische feiten en feitjes. Volgens Galileo was het 'Boek van de Natuur' in wiskundige taal geschreven. Datzelfde lijkt te gelden voor het 'Boek der Taal'. Enige afstand tussen wiskunde en taal kan daarbij zelfs een voordeel zijn. Een grote kracht van wiskundige modellen in de natuurwetenschappen is hun ruime bruikbaarheid, soms ver verwijderd van het oorspronkelijk beoogde doel. Wiskundige modellen voor taalgebruik hebben een zelfde potentieel en suggereren naast beschrijving van bestaande talen ook ontwerpstrategieën voor nieuwe talen en informatiesystemen.

Een inleiding in de wiskundige studie van natuurlijke taal is L.T.F. Gamut (1991). *Logic, Language and Meaning*. Chicago University Press, Chicago. Een compendium van geavanceerd onderzoek is J. van Benthem & A. ter Meulen, red'n (1997). *Handbook of Logic and Language*. Elsevier, Amsterdam. Over de dynamisch-logische kijk op natuurlijke taal verscheen onlangs een themanummer van het Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte.

### **Semantische grappen**

Gerrit Krol

Oudemolen

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Er is in de wiskunde een sterke neiging tot formalisatie: het bewijs is niet meer een zaak van zien, maar van rekenen. Veel wiskunde kunnen we ons eenvoudig niet meer voorstellen. Mijn lezing behelst de zwerftocht van een amateur op zoek naar voorstellingen waar die ons allang verlaten hebben: bijvoorbeeld een visuele voorstelling van de algebraïsche stelling  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Ik geef een voorbeeld van hyperbolische meetkunde in het dagelijks leven. We bespreken een wiskundig bewijs, het aandeel van de Nederlandse taal daarin en vooral de semantiek.

De wiskunde is een krachtige denkdiscipline, de krachtigste die we hebben. Soms willen we ons een voorstelling vormen van iets dat onmogelijk is. Het is de moeite waard na te gaan waar de wiskunde ons kan assisteren. Dat zou ons begrip ten goede komen.

Motto (van een schrijver): 'Alles moet steeds opnieuw worden gedacht, in een tegengestelde volgorde worden gedacht, onmogelijk gedacht - wil je überhaupt iets schrijven dat de geest kan blijven boeien.'

## **Thema wiskunde en luchtvaart**

Luchtvaart en wiskunde zijn al sinds mensenheugenis met elkaar verbonden, al waren de verhoudingen aanvankelijk nogal intuïtief. Al experimenterend moesten de broertjes Wright (de eerste vliegeniers) ontdekken dat een propeller eigenlijk een draaiende vleugel was. En waarom een vliegtuig eigenlijk vliegt, is nog steeds niet onomstreden (Bernoulli- principe of toch niet?). Maar er is meer dan het waarom van het vliegen (de aërodynamica): het weer, de navigatiesystemen (nu weer GPS als nieuwste loot aan de toch al omvangrijke stam), het regelen van het verkeer in de lucht (separatie van vliegtuigen, zoals bekend mankeert het daar nog wel eens aan) zijn een aantal van de meest in het ooglopende onderdelen. En Nederland spreekt nog steeds een belangrijk woordje mee met de opleiding aan de Technische Universiteit in Delft en met het Nationaal Luchtvaart Laboratorium.

### **Wiskundige modellen voor vliegtuigseparatie**

Geert Moek

Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam

Ter voorkoming van botsingen tussen vliegtuigen worden in de luchtvaart een aantal separatiestandaarden of minima gebruikt, bijvoorbeeld de laterale separatie van parallelle routes en de verticale separatie tussen vlieghoogtes. De voordracht behandelt enkele aspecten van het bepalen van een veilige verticale separatiestandaard met behulp van een botsingsrisico-model en een 'Target Level of Safety (TLS)'.<sup>1</sup>

De structuur van het wiskundig model van het botsingsrisico zal worden toegelicht. Vervolgens zal in meer detail worden ingegaan op het schatten van een van de parameters van het model, namelijk de kans op verticale overlap van twee vliegtuigen. Dit gebeurt op basis van een statistisch model van de kansverdeling van vlieghoogtedeviaties. Parameters van deze kansverdeling worden geschat met behulp van de methode van de grootste aannemelijkheid en datacollecties.

### ***Huismus, knobbelzwaan, jumbojet***

Prof.dr.ir. H. Tennekes

Aardwetenschappen, Vrije Universiteit, Amsterdam

Waarom hebben straaljagers naar verhouding kleine vleugels, en uilen naar verhouding grote? Hoe lukt het reigers, hun vliegkunst aan te passen aan flatgebouwen en stadsparken? Waarom vliegt een jumbojet harder dan een knobbelzwaan, en een koolwitje langzamer dan een merel? De wiskunde van klein en groot kan door elke mavo-3 leerling begrepen worden, maar haalt toch van alles overhoop wat aandacht waard is. De schaalregels van alles wat vliegt (zie: 'De Wetten van de Vliegkunst', H. Tennekes, Bloemendaal 1992) zijn een prachtig voorbeeld van eenvoudige wiskunde die geweldig veel begrijpelijk kan maken. En het denken in proporties wordt zo moeiteloos aangeleerd - ook door een mavoklas.

### ***Odd Holes bij het inroosteren van vliegtuigbemanning in Crew Scheduling***

Jan S. de Wit

ORTEC Consultants

Vervoersorganisaties hebben te kampen met problemen bij het maken van personeelsroosters die gericht zijn op het zo efficiënt mogelijk toewijzen van taken aan individuele personeelsleden binnen een planningstermijn van één of enkele weken. Met name de luchtvaart is een zeer complex terrein voor het maken van roosters voor bemanningsleden.

Het gebruik van efficiënte roostertechnieken kan een aanzienlijke bijdrage leveren aan een

verhoogde roosterkwaliteit als het gaat om het welzijn van de bemanning en het efficiënt inzetten van die bemanning. De personeelstaken behelzen zowel de vluchten als de standby en niet-commerciële activiteiten, zoals het bijwonen van vergaderingen, het ondergaan van medisch onderzoek, etc. Bovendien moet rekening worden gehouden met vrije tijd, zodat vrije dagen automatisch worden toegewezen.

In deze bijdrage wordt verslag gedaan van drie algoritmen voor het inroosteren van cockpit- en cabinepersoneel die zijn ontworpen voor een rooster Decision Support System dat is ontwikkeld door ORTEC Consultants.

Het eerste geïmplementeerde algoritme, dat betrekking heeft op cabinepersoneel, is een heuristiek die bestaat uit algoritmen voor lineair programmeren, dynamisch programmeren en lineaire toewijzing. De kern van de heuristiek behelst een dynamisch programmeer (DP) module en een lineair programmeer (LP) module. De DP module bepaalt een optimaal pakket van activiteiten voor een individueel bemanningslid. De kostenfactoren voor de DP module worden berekend op basis van een verzameling criteria die zowel lineair als niet-lineair van aard zijn.

Het doel van de LP module is het berekenen van de meest efficiënte toewijzing van vrije dagen voor elk bemanningslid. De DP module wordt achtereenvolgens voor elk bemanningslid toegepast. De

volgorde van bemanningsleden is afhankelijk van kwalificatie, functie, eerdere taak en toekomstverplichtingen.

De laatste twee geïmplementeerde algoritmen die betrekking hebben op cockpitpersoneel, zijn in principe zogenoemde 'set covering' heuristieken (SCHEUR) die gebruikmaken van lineair programmeren en branch-and-bound.

Het eerste set covering SCHEUR algoritme omvat 'kolom generatie' om de lineair programmeerproblemen op te lossen. Het tweede set covering SCHEUR algoritme is gebaseerd op 'branch-and-cut'. Het branch-and-cut algoritme genereert 'valid inequalities' (snijdende vlakken) gebaseerd op de onderliggende structuur van de polytoop ('Odd Holes!') gedefinieerd door het convex omhulsel van de toegelaten geheeltallige hoekpunten.

Deze 'valid inequalities' worden opgenomen in een branching algoritme.

### ***Vloeiende getallen***

Arthur E.P. Veldman

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen

Voor het ontwerpen van vliegtuigen - of het voorspellen van het weer - is kennis van stromingen essentieel.

De oudste weg om deze kennis te verkrijgen, is via het experiment. Hierbij wordt een schaalmodel van het te bestuderen object onderzocht. De hoeveelheid tunneltijd voor een nieuw vliegtuigontwerp bedraagt 10.000 à 20.000 uren, exclusief tijd voor modelaanmaak en het analyseren van de meetgegevens. Een dergelijk lange ontwikkeltijd is heden ten dage niet meer toelaatbaar.

Stromingsonderzoek kan ook langs theoretische weg. De fysische behoudswetten (behoud van massa, impuls en energie) kunnen worden gevangen in wiskundige formules: de Navier-Stokes vergelijkingen, die ruim anderhalve eeuw geleden reeds zijn opgesteld. Met potlood en papier zijn deze vergelijkingen niet op te lossen (tenzij zeer sterk vereenvoudigd), maar aan het begin van deze eeuw kwam men op het idee om ze met behulp van numerieke wiskunde aan te pakken.

Het vakgebied dat aldus ontstond, heet tegenwoordig numerieke stromingsleer (in het Engels: Computational Fluid Dynamics - CFD). Met de komst van elektronische rekenapparatuur is deze aanpak tot grote bloei gekomen. In de voordracht zullen we hier dieper op ingaan. Aan de orde komen onder andere: hoe wordt de stroming rond een vliegtuig gemodelleerd, hoe wordt een stromingsmodel met behulp van de computer doorgerekend, hoe worden de rekenresultaten gevalideerd, waarom zijn zulke grote computers nodig, en wat zijn de voordelen van rekenen boven meten.

### ***Op koers?***

Mieke Abels

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

In de kleine luchtvaart is een navigatiekaart een belangrijk hulpmiddel voor het bepalen van koersen en voor oriëntatie onderweg. Als er geen wind is, dan is het simpel om van het ene naar het andere punt te vliegen: een rechte lijn op de kaart geeft de kortste afstand en de kaartkoers. Hiermee kan de kompas koers bepaald worden en het is dan alleen nog maar een kwestie van precies in die richting te vliegen. Als er wel wind is, wordt het gecompliceerder. Om dan de juiste koers te bepalen, kunnen

verschillende strategieën gebruikt worden. Een veel gebruikte methode is het construeren van een winddriehoek met behulp van een schaaltekening of een flight computer. Hulpmiddelen van een geheel andere aard bij het navigeren en het bepalen van posities zijn radiobakens. Het kunnen interpreteren van de informatie die zo'n baken geeft, vereist een goed meetkundig ruimtelijk

voorstellingsvermogen. De constructie van de winddriehoek en het gebruik van bakens zijn de hoofdactiviteiten van deze workshop.

## **Thema wiskunde en medische wetenschappen**

Wiskunde is vast niet zo belangrijk voor de medische wetenschappen. Anders kwamen er in 1998-'99 geen aparte profielen Natuur en Gezondheid / Natuur en Techniek. Zou je denken.

In zeker opzicht klopt dat wel. Wie met pijnklachten bij de huisarts komt, zal niet zo snel meemaken dat deze, alvorens een recept te schrijven, eerst een vergelijking moet oplossen of een integraal uitrekenen. Maar op wat grotere afstand van de zieke (of gezonde) mens, in de theorievorming bijvoorbeeld, speelt de wiskunde wel degelijk een rol. Dat hardop gezegd mag worden 'roken is schadelijk voor de gezondheid' danken we aan de statistiek. Statistiek staat eveneens centraal in de erfelijkheidsvoorlichting en bij de vraag of een bepaald geneesmiddel effect heeft en verantwoord is.

Wiskundige modellen, differentiaalvergelijkingen en systeemtheorie stellen medici in staat voorspellingen te doen over het verloop van complexe processen. Een te hoge dosis kan beter eerst in een wiskundig model uitgetoet worden dan direct aan een proefpersoon toegediend.

Beeldvormingstechnieken, chaotisch gedrag van het hart, stroming in bloedvaten, dit alles en nog veel meer wordt bestudeerd met wiskundige middelen.

Zie hier de thematiek van deze serie van vier lezingen en workshops. Met voor de wiskundigen nog de kanttekening: al lost uw arts geen vergelijkingen op in zijn spreekkamer, het kan volstrekt geen kwaad om aldaar uw eigen wiskundige kennis paraat te hebben. Bewijs volgt tijdens de NWD.

### ***Radiotherapie: lokaliseren en doseren***

Oda Wijers

Dr. Daniël den Hoedkliniek, Rotterdam

Radiotherapie is een medische specialisatie die zich richt op kankerpatiënten die bestraald moeten worden of bestraald zijn. Behalve radiotherapeuten die belast zijn met de medische aspecten, werken (klinische) fysici, radiotherapeutische laboranten en radiobiologen mee aan het totstandkomen en uitvoeren van bestralingsplannen. Alvorens een patiënt bestraald kan gaan worden, bepaalt de arts wat (doelvolumen) er bestraald gaat worden, tot welke dosis en met welke bestralingstechniek. Het doelvolumen wordt gelokaliseerd en de bestralingsvelden worden gesimuleerd.

De verschillende bestralingstechnieken variëren van hele simpele (twee-dimensionale) tot heel ingewikkelde, waarbij gebruikgemaakt wordt van drie-dimensionale computerplanningssystemen. Deze computerplanningssystemen berekenen dosisverdelingen in en rondom het op CT-plaatjes ingetekende doelvolumen op basis van fysische aspecten van de bestralingsbundels. Door drie-dimensionale reconstructies kan de dosisverdeling in verschillende doorsneevlakken worden getoond. Op grond van deze dosisverdelingen wordt besloten of de patiënt met die techniek bestraald kan worden. De belangrijkste vraag bij die beslissing is: komt er voldoende dosis in het doelvolumen en komt er niet teveel straling in de gezonde weefsels?



In deze workshop komen de verschillende aspecten van radiotherapie aan de orde. Er zal ingegaan worden op de verschillende medische aspecten van bestraling en er zullen voorbeelden van bestralingsvelden en dosisverdelingen worden getoond. Ten slotte kunnen de deelnemers zelf rekenen en doseren, gebruikmakend van eenvoudige formules en curves. Ook een van de aspecten van lokaliseren kan zelf worden geoefend.

Wiskundige aspecten zijn: curves, vergrotingsfactoren, drie-dimensionaal denken, doorsneden, enzovoort.

### ***Met een beetje statistiek kom je veel verder***

Ida Stamhuis, VU Amsterdam

Heleen Verhage, Freudenthal Instituut

In deze lezing zal aan de bijdragen van twee vrouwen uit het verleden aandacht worden besteed. In de eerste plaats aan Florence Nightingale (1820-1910). Zij is vooral bekend als de 'Lady with the Lamp', maar ze wordt ook wel 'een hartstochtelijk statisticus' genoemd. Ze is beroemd geworden als verpleegster van Engelse soldaten. Ze was echter ook een hartstochtelijk verzamelaarster van statistische gegevens betreffende ziekte en sterfte en het verband tussen deze gegevens en de medische verzorging. Ze was erop uit om anderen ervan te overtuigen dat ziekte en sterfte van soldaten grotendeels werd veroorzaakt door een onvoldoende verzorging. En om dat zo overtuigend mogelijk te doen, maakte ze op basis van deze gegevens grafische voorstellingen, waaronder een 'Polar Area Diagram', waarbij ze ook gebruikmaakte van kleuren. Dat was nieuw in die tijd. Er zal iets over het leven en het werk van Florence Nightingale worden verteld, waarna we gezamenlijk enkele van haar grafische voorstellingen gaan bekijken.

Een andere vrouw die eveneens met behulp van een beetje statistiek veel heeft bereikt, was een Nederlandse: Tine Tammes (1871-1947). Zij werd in 1919 in Nederland de eerste hoogleraar in de erfelijkheidsleer en de tweede vrouwelijke hoogleraar. Ze heeft in 1910 laten zien dat de erfelijkheid van eigenschappen met een continu waardenbereik, zoals lengte, heel goed met de wetten van Mendel kan worden verklaard. Dat was toen nog een heel discussiepunt. En dat lukte haar zo goed omdat ze iets meer statistiek gebruikte dan haar collega's. Ze heeft zich vooral gebaseerd op onderzoek aan vlas. Ook over haar leven en werk zullen we iets vertellen, waarna we een correlatietabel uit een van haar publicaties gezamenlijk zullen gaan bekijken.

### ***Heb het hart eens. Een wiskundige (visie) op doktersvisite***

Jan van Maanen

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen

Deze mengeling van lezing en workshop zou niet misstaan in een blad als Mijn verhaal. Het komt voort uit de worsteling van een wiskundige die veel in wacht-, spreek- en onderzoekskamers heeft gezeten en gelegen, en die zijn medische verleden en wiskundige achtergrond met elkaar in verband probeert te brengen.

Soms komt die achtergrond goed uit, zoals die keer dat de grafische analyse van meetgegevens een internist de ogen opende. Enige uren na het voorval besloot hij tot een totaal andere behandeling, hetgeen binnen enkele dagen een eind maakte aan een ziekenhuisopname die toen al meer dan een maand duurde. Wiskunde helpt natuurlijk niet altijd, want soms gebeuren er in medische optrekjes zulke onhandige dingen, dat er zelfs met wiskundige middelen geen redden meer aan is. Ook zult u geconfronteerd worden met pacemakers die geïnteresseerd zijn in afgeleide functies, met

cardiogrammen, met eigenfrequenties van het hart en met de temperatuurgevoeligheid van de rechter ringvinger. En nog veel meer.

U hoeft niet bang te zijn, want het geheel speelt zich af in de geest, er zullen geen vrijwilligers gevraagd worden voor het doen van medische testjes. In ziekenhuizen wordt dat trouwens ook niet gevraagd,... daar doen ze die testjes gewoon. Het gedeeltelijke workshop-karakter houdt in dat u een aantal medische praktijksituaties voorgelegd krijgt met vragen als:

Zou u dit slikken? Wat is er onlogisch aan die ene bundel röntgenstralen? Is de meter volgens u betrouwbaar? Hoe vaak zou u prikken?

Dit alles tot lering ende vermaeck (want je maakt wat mee bij de dokter).

### **De structuur van plaatjes**

Luc Florack

Faculteit Informatica, Universiteit Utrecht

Beelden nemen in de medische wetenschappen een steeds belangrijker plaats in. Met diverse beeldvormende apparaten is het mogelijk om een drie-dimensionale opname van het inwendige van een patiënt te verkrijgen. Soms maakt men een aantal snel opeenvolgende opnamen en dan heeft men dus een vierde dimensie erbij. In andere gevallen gooit men juist een dimensie weg, zoals in de conventionele röntgenfotografie het geval is.

Medische beeldverwerking stelt zich tot doel om relevante informatie uit aldus verkregen beelden te halen, dan wel om deze zodanig te bewerken dat artsen er gemakkelijker mee uit de voeten kunnen. Dit alles gebeurt met behulp van krachtige computers en op basis van wiskundige modellen.

De allereerste stap is uiteraard het duiden van wat er zoal aan structuur in een beeld zit in de vorm van een wiskundige representatie waarmee te werken valt. Betekenis is een heel ander verhaal. Hiervoor moet men de structurelementen interpreteren. Hoewel dit uiteindelijk de essentie is, zal ik het helemaal niet over interpretatie en betekenis gaan hebben, maar uitsluitend over representatie en structuur. Dat laatste (feitelijk dus primaire!) aspect wordt nog vaak onderschat en (dus) onderbelicht.

Gezien de aard van de probleemstelling ligt het voor de hand om dit verhaal in een bredere context te bezien. Aangezien de specifieke aard van de plaatjes er niet toe doet, mag men uiteraard ook denken aan niet-medische plaatjes en zelfs aan 'retinale plaatjes', dat wil zeggen, aan de optische informatie die voortdurend in de vorm van lichtdeeltjes op ons netvlies valt en zo de basis vormt voor onze visuele waarneming.

## **Thema wiskunde en sterrenkunde**

Astronomie is nog altijd een bron van nieuwe vragen en een rijk gebied voor toepassingen van de wiskunde. De rijkdom van dit terrein blijkt uit de onderwerpen in dit thema die te maken hebben met beweging, tijd, temperatuur en energie.

Een sterrenstelsel is een verzameling van ongeveer tien miljoen tot duizend miljoen sterren. Binnen een stelsel is er door de aantrekkende krachten van de sterren een beweging van die sterren ten opzichte van elkaar. Zo draait onze zon met een snelheid van ongeveer 220 km/seconde om het centrum van ons melkwegstelsel. Maar ook de sterrenstelsels als geheel ondervinden aantrekkende werkingen van andere stelsels. Men spreekt zelfs over mogelijke botsingen tussen melkwegstelsels. Deze materie geniet een geweldige belangstelling dankzij recente opnamen van de Hubble Ruimte

Telescoop. Iets dichterbij zijn waarneembare eigenschappen van het lengen der dagen te verklaren vanuit de dagelijkse en jaarlijkse beweging van de aarde om de zon. In de eerste maanden van het kalenderjaar lijkt het altijd of de dagen heel snel langer worden. Is dat schijn of zijn de dagen ook langer? Wat is een sterrendag en wat een zonnedag? Bovendien blijkt de aardtemperatuur nauw samen te hangen met de lengte van de zonnecyclus.

Tot slot nog een geheel ander onderwerp dat zal worden belicht binnen dit thema. Kosmische straling bevat de meeste energetische deeltjes die de mensheid thans kent. De deeltjes krijgen de energie door een bijzonder proces. Dit proces blijkt zich te laten representeren als een dronkemansgang.

In de voordrachten zullen de achterliggende wiskundige theorieën en hun toepassingen nader worden toegelicht.

### ***Dynamics van Sterrenstelsels***

Prof.dr. P.T. de Zeeuw

Sterrenwacht Leiden

Melkwegstelsels - zwermen van zo'n honderd miljard sterren - komen voor in allerlei maten en zijn onder te verdelen in twee grote hoofdsoorten: spiraalstelsels en elliptische stelsels. Verschillen en overeenkomsten tussen deze systemen zullen kort worden besproken, met aandacht voor hun vorm, hun inhoud aan sterren en gas, en hun interne bewegingen.

Toepassingen van de Newtonmechanica op de waargenomen bewegingen van sterren en gas laat zien dat melkwegstelsels omringd worden door uitgebreide halo's van donkere materie en dat hun kernen superzware zwarte gaten bevatten. Recent werk op dit gebied zal worden besproken, met speciale aandacht voor resultaten verkregen met de Hubble Space Telescope.

### ***Dronkemansgang en kosmische straling***

A. Achterberg

Sterrenkundig Instituut, Universiteit Utrecht

Een simpele dronkemansgang is een statistisch proces, bestaande uit een opeenvolging van stappen in een willekeurige richting. Een dergelijk proces is simpel in een computer te simuleren met behulp van een 'random number generator'.

Een dergelijk proces speelt een belangrijke rol in de fysica van kosmische straling: een ijle populatie van energetische deeltjes die onze gehele melkweg vult.

In deze lezing wordt ingegaan op de wiskundige aspecten van een dronkemansgang en de toepassing daarvan op kosmische straling. Daarbij komen ook meer gecompliceerde, maar nauwverwante, voorbeelden van een dronkemansgang aan de orde.

### ***Een wiskundige verklaring voor 'superluminale' snelheden in het heelal***

Wim Nobel

Volkssterrenwacht, Amsterdam

Op verschillende plaatsen in het heelal zijn onlangs snelheden gemeten groter dan de lichtsnelheid. Het verschijnsel is waargenomen zowel bij quasars (verre, actieve sterrenstelsels met vaak heldere 'jets' van uitstromende materie), als bij supernovae (exploderende zware sterren, die daardoor in korte tijd zeer helder worden). Aanvankelijk zorgden deze berichten voor grote opschudding. Immers, de fundamentele van de hedendaagse natuurkunde worden daarmee bedreigd. Al spoedig bleek echter dat het hier om een soort 'gezichtsbedrog' gaat, waarvoor een zuiver meetkundige verklaring mogelijk is. Wanneer in het centrale object een helderheidstoename plaatsvindt, dan wordt materiaal in de omgeving hierdoor verlicht. Het licht van de uitbarsting bereikt ons in dat geval via een omweg. Hoe groot die omweg is kan direct afgeleid worden uit de vertraging waarmee dit licht ons bereikt. Behalve een verklaring voor de schijnbare 'superluminale snelheden' levert dit ook interessante informatie op over de omgeving van het centrale object.

### **Tijdvereffening, tips voor praktische opdrachten**

Hans van Lint

Zwolle

De bedoeling van de workshop is het laten zien van de rijke mogelijkheden binnen de astronomie om praktische opdrachten op verschillende niveaus voor leerlingen te vinden.

In het najaar worden de dagen 'snel' korter en in februari is het net of ze weer heel 'snel' tijd terugpakken en langer worden. Is dat schijn, of zijn de daglengten in de loop van het jaar verschillend? Wat bedoelt men met een 'sterrendag' en een 'ware zonnedag'? We gaan in de workshop in op de twee belangrijke oorzaken van het sneller veranderen van de daglengte, namelijk het verschil in snelheid waarmee de aarde haar elliptische baan om de zon beschrijft en het hellen van het eclipticavlak ten opzichte van het equatorvlak. Er komen grafieken van goniometrische functies tevoorschijn, die aannemelijk gemaakt kunnen worden, maar ook, via een beetje boldriehoeksmeting, wat preciezer te bepalen zijn.

Een heel ander onderwerp is de merkwaardige banen die de planeten schijnbaar beschrijven ten opzichte van de achtergrondsterren. Als men bijvoorbeeld gedurende enige maanden de plaats van Jupiter of Mars vastlegt tussen de sterren, dan blijkt de baan van de planeet lussen te vertonen. Lopen de planeten dan af en toe terug? Hoe verklaren we dit en hoe verklaarde men het verschijnsel in de oude tijd, toen er nog 'geëist' werd dat men hoe dan ook uitging van de aarde in het centrum van het heelal? Deelnemers die een grafische rekenmachine meebrengen, kunnen zelf proberen de lussen te maken!

Indien de tijd het toelaat, kunnen nog meer suggesties voor praktische opdrachten uit de astronomie uitgewisseld worden.

De workshop is vooral bedoeld voor docenten die nog weinig of geen kennis van de 'gewone' leerstof uit de klassieke sterrenkunde bezitten. Uit bovenstaande tekst blijkt wel dat docenten die zelf een redelijke kennis van sterrenkunde hebben, niet veel nieuwe kennis op zullen doen. Indien zij mee willen werken om samen te spreken over de mogelijkheden van praktische opdrachten uit de astronomie, dan zijn zij uiteraard van harte welkom.

## **Overige presentaties**

Op vrijdag worden twee succesvolle workshops van vorig jaar herhaald: Bewegende robots en Geodetische koepels.

Hieronder treft u ook de beschrijving aan van de door een deskundige jury geselecteerde 'docentenworkshop' Magische getallen. Helaas waren er dit jaar weinig inzendingen van docenten om zelf een workshop te houden. We hopen dat er volgend jaar meer docenten zijn die de uitdaging aangaan om een workshop te presenteren op de NWD.

Tenslotte is er in deze categorie een workshop met als titel Werken met echte data.

### ***Bewegende Robots***

Mark Overmars

Vakgroep Informatica, Universiteit Utrecht

Met computerpracticum

Als robots zelfstandig taken willen uitvoeren, is het van groot belang dat ze in staat zijn zelf hun bewegingen te plannen. Dit probleem is lastiger dan het in eerste instantie lijkt. Een berekend pad dient botsingsvrij te zijn, niet te lang en rekening te houden met de mogelijkheden en onmogelijkheden van de robot. Zo kan een robotauto bijvoorbeeld niet zijwaarts bewegen.

De positie van een robot wordt beschreven met een aantal parameters. Een robot in het vlak wordt bijvoorbeeld met drie parameters beschreven: twee voor de positie en één voor de oriëntatie. In de ruimte zijn dit er al zes (drie voor de positie en drie voor de oriëntatie). De ruimte van deze parameters wordt wel de configuratieruimte genoemd. Voor een drie-dimensionale robot is deze dus zes-dimensionaal. Hetzelfde geldt voor een robotarm.

Het plannen van een beweging moet in feite in deze configuratieruimte plaatsvinden. In deze voordracht worden een aantal technieken besproken om dit soort bewegingen te berekenen. Daarna kan hier zelf mee geoefend worden, met behulp van een programma dat het bewegingsprobleem als een soort spel presenteert. De opdracht is om voor verschillende soorten robots een zo kort mogelijk pad te vinden. Dit kan vervolgens vergeleken worden met de oplossing van de computer.

### ***Geodetische Koepels***

Martin Kindt

Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Stel je voor, een regelmatig twintigvlak (icosaëder) met omgeschreven bol. Een vlak door het middelpunt van de bol en een ribbe van het veelvlak snijdt het boloppervlak volgens een geodetisch boogje dat twee hoekpunten van het veelvlak verbindt. Op deze wijze kun je dertig boogjes maken, evenveel als er ribben zijn aan de icosaëder. Die dertig boogjes vormen als het ware een geraamte van de bol. Zo'n geraamte van driehoekjes noemt men een geodetische koepel of een geode. In het spraakgebruik veroorloven we ons enige slordigheid: ook het veelvlak waarvan de ribben de koorden zijn bij de geodetische boogjes, wordt een geode genoemd. De Amerikaanse architect Richard Buckminster Fuller ontwierp gebouwen als delen van bollen en gebruikte daarbij de geodestructuur. Voor zijn beroemde prototype gebruikte hij de structuur van een veelvlak met 3840 driehoekige zijden. Een van de beroemdste geodetische koepels staat te Montreal en is destijds gebouwd voor de wereldtentoonstelling.

De structuur van geodes hangt ten nauwste samen met molecuulstructuren die thans in de scheikunde worden bestudeerd (Nobelprijs 1996!), de zogenaamde 'bucky balls' of 'fullerenen',

waarvan het eenvoudigste voorbeeld de voetbal is met zijn vijf- en zeshoekige zijden. Die voetbalstructuur, een archimedisch veelvlak, is bijvoorbeeld te vinden in het werk van Albrecht Dürer.

De wiskundige achtergrond van geodes en fullerenen is niet moeilijk te begrijpen en zou in de bovenbouw van havo of vwo kunnen worden behandeld. Met wat combinatoriek, de formule van Euler en de cosinusregel, kom je al een heel eind. Bovendien is er op de educatieve markt materiaal te koop, waarmee de leerling zelf modellen kan bouwen. De classificatie van alle mogelijkheden levert aardige resultaten. Die resultaten zijn te bewonderen in het echte leven, zowel in groot formaat (de geodetische bouwwerken) als in de micro-architectuur (moleculen, virussen).

### ***Werken met echte data***

Ton Ellermeijer

Amstel Instituut, Universiteit van Amsterdam

De invoering van de Tweede Fase en de grafische rekenmachine openen nieuwe mogelijkheden voor wiskunde en natuurkunde en de coördinatie tussen de vakken binnen een profiel. Voor gebruik binnen wiskundeonderwijs, maar ook bij bijvoorbeeld natuurkunde en biologie heeft Texas Instruments de Calculator Based Laboratory (CBL) en de Calculator Based Ranger (CBR) ontwikkeld. In combinatie met een rekenmachine (bijvoorbeeld de TI-83) kunnen leerlingen zelf metingen doen aan (on-)bekende fenomenen. Met behulp van een scala aan sensoren zijn er oneindig veel mogelijkheden, zoals afstand-snelheid tegen tijdmetingen en afkoeling van koffie. De metingen kunnen ook uitgevoerd worden met een PC door middel van het programma Coach (ontwikkeld door het Amstel Instituut). Tijdens de lezing zal ingegaan worden op enkele concrete mogelijkheden voor wiskunde, mogelijkheden voor bijvoorbeeld het profielwerkstuk en zal de apparatuur en programmatuur gedemonstreerd worden aan de hand van enkele toepassingen.

### ***Magische getallen***

Anne Zijlstra

Christelijk College Nassau-Veluwe, Harderwijk

In welk opzicht zijn de getallen 13, 55 1147, 309 en 561 magisch?

Wat hebben deze getallen met 14-vlakken te maken?

Twee prikkelende vragen voor liefhebbers van wiskunde.

Magische getallen hebben de allure van een gedicht, van een edelsteen, van een ster. Je moet ze lezen en hérlezen, aan alle kanten bekijken, ontdekken aan de hemel. Dan geven ze hun schoonheid prijs. In een tijd waarin rijen en reeksen weer aan de bak komen, alsmede vakoverstijgende leeractiviteiten, komt een magisch getal eigenlijk als geroepen. Het was er altijd al, maar nu kan het als een verrassende ontdekking worden ervaren:

in zeggingskracht, in vorm, in glans.

*Menu*

*verbrande gehaktbal op gatenkaas*

*glace blanche abalone*

*gefileerde ringvingertjes*

*cumulus quadraticus*

*formula bivaria à la campagne*

*toverrijst numerus magicus*

*entrecote quartorze*

*opgewarmde quantumeffectjes*

Het serveren van de verschillende gangen geschiedt in rond Hollands. Netfouten worden niet geteld. De bal wordt regelmatig opgegooid, samenspel wordt op prijs gesteld. Doel van deze werkwinkel: de stimulering van het smaakorgaan. Bij het verlaten van de zaak wacht u een prettige verrassing!

## Overige activiteiten

### **Expositie**

In de gang richting B-vleugel en bij de Rotonde is een expositie ingericht. Dit jaar staat de expositie in het kader van het thema wiskunde en luchtvaart. Wat u er precies allemaal zult aantreffen, blijft nog even een verrassing. Een tweede onderdeel van de expositie is gewijd aan Lewis Carroll, wiens honderdste sterfdag herdacht wordt op 14 januari 1998. De homepage van Lewis Carroll is: [www.lewiscarroll.org/carroll.html](http://www.lewiscarroll.org/carroll.html)

### **Informatiemarkt**

Op de informatiemarkt in C6 kunt u stands vinden van organisaties, instellingen en instituten die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden.

U treft er stands aan van:

- Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
- Computer Algebra Nederland
- Educatieve Partners Nederland
- Epsilon uitgeverij
- [Freudenthal Instituut](#)
- Hewlett-Packard
- Lekopro
- Libur
- Niam/Pythagoras
- Teleac/NOT
- Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
- PMOT
- Rotring (importeur Casio)
- Texas Instruments
- Thieme uitgeverij
- Vierkant
- Visiria uitgeverij
- Vrouwen en Exacte Vakken
- Woltersgroep Groningen

### **Workshops van standhouders**

Vrijdagavond na de plenaire lezing worden er enkele workshops gehouden door standhouders. Deze workshops beginnen om 21.30 en worden verzorgd door:

- **Rotring: Grafische rekenmachine**
- **Teleac/NOT: Wat en waar is wiskunde**
- **Thieme uitgeverij: Ideeën voor praktische opdrachten**
- **Woltersgroep Groningen: Wiskunde en ICT**

### **Hoera een probleem!**

Vanaf 21.30 heeft Professor van der Blij de deur open staan en bent u welkom bij een inlooprogramma. Elke tien minuten wordt (een aanzet voor) een probleem gelanceerd. De problemen mag u meenemen.

### **Informatietechnologie**

De Leeuwenhorst beschikt over een aantal Internet-computers, waar u vrij op kunt surfen. De computerruimte is te vinden bij de hoofdingang.

Aardige sites om eens te proberen zijn:

de homepage van het Freudenthal Instituut: [www.fi.ruu.nl](http://www.fi.ruu.nl)

het digitale wiskundelokaal: [digischool.bart.nl/wi/wilok.htm](http://digischool.bart.nl/wi/wilok.htm)

Amerikaanse Vereniging van Wiskundeleraren: [www.NCTM.org](http://www.NCTM.org)

software evaluaties: [bve-scennet.dds.nl](http://bve-scennet.dds.nl)

Java Applets voor meetkundeonderwijs: [loki.cs.brown.edu:8080/pages/Mocha.html](http://loki.cs.brown.edu:8080/pages/Mocha.html)

de homepage van Pythagoras: [www.wins.uva.nl/misc/pythagoras](http://www.wins.uva.nl/misc/pythagoras)

de homepage van Vierkant: [www.cs.vu.nl/~vierkant](http://www.cs.vu.nl/~vierkant)

### **Muziek**

Liever geen bloemen

Tijdens het diner kunt u genieten van een optreden van een smartlappenduo dat als motto heeft: geen groter vermaak dan leedvermaak. Desalniettemin wordt getracht het repertoire zo serieus mogelijk te brengen opdat een ieder het zijne er zeker niet van denkt. Kunt u nog zingen met volle mond en weinig borst, ga dan gerust uw gang met uitsmijters zoals 'De Zuiderzeeballade', 'Ketelbinkie', 'De Klok van Arnemuiden' en vele anderen. Zo af en toe steken wij, al dan niet vergezeld van 'Bloody Mary', de wijde Noordzee over om met name van onze Ierse vrienden te leren wat echte Smart is. Clap your hands of klingel mee met 'The wil rover', 'Whiskey in the jar', enzovoort.

Secondhands



Vanaf 22.00 uur in de foyer een swingend optreden van een Rockband uit Zoetermeer en omgeving. Zin om even een dansje te wagen, (nog) een drankje te nemen of gewoon even wegdromen naar een verloren tijd? Vele songs zullen bekend in de oren klinken en vele betekenisvolle muzikale jaren zullen passeren. Liedjes uit de jaren vijftig (Jailhouse Rock, Blue Suede Shoes), de 'sixties' (met natuurlijk Beatles en Rolling Stones), de jaren zeventig (met nummers van onder andere The Doobie- en The Blues Brothers), de jaren tachtig (De Dijk, Bryan Adams) en wellicht een slippertje uit de negentiger jaren zullen de ruimte vullen.

### ***Fun run***

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de fun run op zaterdagochtend. We lopen weer het bekende rondje van (bijna) 6 km. De snelste tijd van vorig jaar was 22.04 en werd gelopen door Maarten Kam. De snelste tijd bij de vrouwen werd gelopen door Marina van Heijninen, haar tijd was 28.40.

De start is stipt om 7.00 uur in de morgen.

Deelname is gratis en als beloning ligt er een prachtig T-shirt voor u bij de finish te wachten. Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte beker. Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn. Wandelen mag trouwens ook, maar dan adviseren we u het halve rondje van 3 km te doen.