

# Nationale Wiskunde Dagen

Noordwijkerhout, 31 januari en 1 februari 1997

---

## *Voorwoord en welkom*

De derde Nationale Wiskunde Dagen alweer! Wat enige jaren geleden nog een sprong in het duister was lijkt nu een heel vertrouwd, spannend en inspirerend fenomeen. Eerlijk is eerlijk, het beeld van de wiskundeleraar en wiskundige was en is toch altijd nog wat stoffig. En de buitenwacht kijkt toch een beetje meewarig naar deze wat bijzondere beroepsgroep. Al degenen die met deze voorstelling van wiskundigen rondlopen moesten eens verplicht een paar uur meedraaien op de Nationale Wiskunde Dagen. Opgewekte, geestige, enthousiaste en geanimeerde mensen bevolken deze twee dagen de Leeuwenhorst, en de creativiteit straalt er vanaf. Wat wil je ook anders. Wiskunde is en blijft een vak met ontzettend veel facetten waar de leek en vaak ook de deskundige geen weet van heeft. Zo zullen er deze komende Nationale Wiskunde Dagen weer schellen van de ogen vallen, nieuwe perspectieven opdoemen, oude zaken een nieuwe lading krijgen. Oude en nieuwe collega's wisselen ervaringen en ideeën uit. Het mag na twee jaar nauwelijks nog verbazing wekken dat de meest gehoorde reactie is dat men zich weer helemaal 'opgeladen' voelt. En dit jaar zullen de Nationale Wiskunde Dagen nog wat meer praktische waarde krijgen: de Ontwerpdagen waren een groot succes: een twintigtal mensen heeft zich in de serene rust van een klooster op enkele onderwerpen van de afgelopen NWD 2 gestort en daarvan zullen enige resultaten op deze NWD 3 gepresenteerd worden, hopelijk inclusief al wat ervaringen in de klas met de nieuwe materialen. En we rekenen erop dat we het volgende jaar de Ontwerpdagen 2 zullen kunnen houden. De opening van de dagen is tot nog toe een zeer bescheiden aspect geweest. Die traditie willen we graag in stand houden. Toch stellen we er prijs op goede openingssprekers te vinden. Het is ons een plezier en genoeg dat we dit jaar de interdisciplinaire theoretische informaticus/combinatoricus Prof.dr. Jan van Leeuwen (Universiteit Utrecht) bereid hebben gevonden enige gevoelige woorden tot u te willen richten. Er zijn dit jaar weer kleine veranderingen in het programma doorgevoerd. Zo zullen we nu voornamelijk 'links' in het Centrum zitten. Daarmee kunnen we alles nog dichter bij elkaar houden. Ook de vrijdagavond belooft door wat subtiele wijzigingen gezelliger te worden. Maar dat horen we nog wel van u. En de fun run wordt dit jaar weer professioneler. Let u maar op. We rekenen erop dat u zaterdagmiddag weer moe en voldaan, maar ook 'opgeladen' weer huiswaarts zult keren. En alvast noteren: de NWD 4 zullen plaatsvinden op 6 en 7 februari 1998.

*Jan de Lange*

voorzitter programmacommissie

---

## *Organisatie Nationale Wiskunde Dagen*

De NWD 2000 wordt georganiseerd door het Freudenthal Instituut onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars en in samenwerking met het IVLOS van de Universiteit Utrecht

### *Programmacommissie*

Mw. B.A.M. van den Anker  
H.P. Barendregt  
F. van der Blij  
Mw. R. Bosman

### *Uitvoerend comité*

M. Doorman

H.G.B. Broekman	Mw. E. Feijs
S.J. Doorman	
H.J.A. Duparc	Mw. D. de Haan
A. Heemink	
K. Hoogland	Mw. E.J. Hanepen
W.J. Kat	
P.M.G.M. Kop	Mw. A. van der Heiden
J. de Lange	
J. van Lint	J. de Lange
J.A. van Maanen	
Mw. A.B. Paalman-de Miranda	Mw. S. Pieters
W. Schaafsma	
D. Siersma	M. van Reeuwijk
R. Tijdeman	
P. van Wijk	Mw. H.B. Verhage

## Nationale Wiskunde Dagen

p/a Freudenthal Instituut  
Tiberdreef 4  
3561 GG Utrecht  
tel. 030 - 261 16 11, fax 030 - 266 04 30,

e-mail [nwd@fi.ruu.nl](mailto:nwd@fi.ruu.nl)

---

---

# Plenaire lezingen

Er staan vier plenaire lezingen op het programma, die worden gehouden door gerenommeerde sprekers uit binnen- en buitenland. De twee buitenlandse sprekers zullen hun voordracht in het Engels houden. Alle plenaire lezingen vinden plaats in de Rotonde.

*De absolute waarde van techniek minus toegepaste wiskunde*

Prof. Roger Cooke

Toepassingen van de Besliskunde, TU Delft

Vrijdag 11.15-12.00 uur

Ik verontschuldig me voor deze titel. De toepassing waar ik u over wil vertellen is zo actueel dat die nog niet af is op het moment dat ik deze samenvatting moet leveren. Maar het zal u ongetwijfeld aanspreken, want het betreft namelijk het vullen van bierflesjes bij Heineken. We werken aan het modelleren en hopelijk verbeteren van de vullijnen bij deze bierfabrikant. Op de achtergrond speelt de vraag: wat kunnen wij als toegepaste wiskundigen na een betrekkelijk korte tijd bijdragen aan het vullen van bierflesjes? Kunnen wij daar iets over zeggen dat de technici die daar jaren mee bezig zijn, niet al weten? Nog iets verder op de achtergrond is er de vraag wat toegepaste wiskunde eigenlijk is.

Een leeg bierflesje maakt wel wat mee voor dat het de vullijn in Zoeterwoude verlaat en de kroeg weer ingaat. Het gaat achtereenvolgens langs de depalletizer, de vuller, de pasteur, de etiketteur, de inpakker en de palletizer. Tussen deze machines staan buffers. De traagste en duurste machine is de vuller met een capaciteit van 40.000 flesjes per uur. Deze machine bepaalt het rendement van de lijn. Als alles perfect zou verlopen, zou deze lijn 320.000 flesjes kunnen vullen in een 8 uur shift. Dat gebeurt echter niet, want dit soort vullijnen kennen vele kleine storingen. In het geval van één van de vullijnen blijven 50.000 bierflesjes per dag ongevuld. Machines haperen, flesjes vallen om, buffers raken leeg of vol. De vragen aan ons zijn, waar de grootste problemen zitten en wat daar aan gedaan kan worden.

Dit soort problemen zijn ruim bekend in de wachtrijtheorie. Het zijn transferlijnen met niet-betrouwbare machines en eindige buffers. Is het verbeteren van de vullijn een kwestie van het toepassen van stellingen uit de wachtrijtheorie? Moeten we de lijn simuleren? Zo ja, wat simuleren we precies? Gaat het om de tijd dat een

bierflesje erover doet om de lijn te doorlopen? Gaat het om de evenwichtsstand van de buffers? Ik hoop er wat leuks over te kunnen vertellen.

*Let's talk about Teaching*

Gail Burrill

National Council of Teachers of Mathematics, USA

Vrijdag 14.30-15.15 uur

Teaching mathematics is rewarding, exciting and a challenge. When students' eyes light up over a mathematical discovery, or when an entire class goes by and I am not needed as my students work to find a solution to a problem - my class has been a success. What makes this happen?

Often mathematics turns up in very unexpected places: such as determining the prices for parking in New York City. Some mathematical connections are not always obvious: what is least squares regression? Some mathematical connections are powerful: multiple regression techniques, matrices and limits. Some mathematics is very useful in the world outside of the classroom: how does the cost of used cars change over time?

One of the challenges has been to change my teaching to listen to my students as they think and do mathematics. Instead of helping them understand how I think it should be done, I have learned to listen to their ideas.

To find the probability that the waiting time between two drug doses is less than five minutes, students struggle to formulate the problem, then some will use simulation while others use algebra and geometric probability to find a solution. Their satisfaction is in the solution; mine is in the variety of ways they chose to solve the problem.

Problems out of a textbook context often lead to unique approaches - a favorite triangle problem can be solved using analytical geometry, trigonometry, or geometry and the results are often surprising.

Teaching mathematics. Every day is different, so is every student and the way they approach mathematics. What more could you ask for?

*Sound as a bell*

Dr. Chris Robson

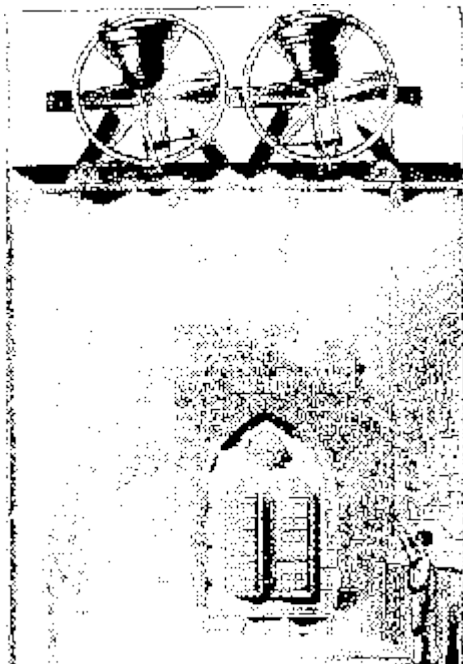
School of Mathematics, University of Leeds, England

Vrijdag 20.30-21.15 uur

This talk is about the ringing of bells in the towers of English churches, and about the mathematics which underlies it. In the English church tower, the bells are hung in a unique fashion which allows an unusual method of ringing. This is quite different to that in churches in The Netherlands and, indeed, in any other European country. As you will hear, the bells are rung in an almost regular pattern except that their order varies each time by permutations determined so that only pairs of bells ringing in succession can interchange positions in the pattern.

That sounds pretty sober! However, in order to show you what is done, the audience will assist the speaker by ringing hand bells in the appropriate fashion. One can extract from this English eccentricity an easy introduction to some rather nice pieces of mathematics - elementary dynamics, group theory, graph (network) theory, braids: and the talk will explain as many of these as time allows.

We will see that, in bell ringing, science meets art and music ensues.



*Bell ringing in an old English church tower.*

*Meetkunde in metamorfose*

Prof. F. van der Blij

Bilthoven

Zaterdag 11.15-12.15 uur

Meetkunde heb je nodig als je piramides of torens van Babel wilt bouwen. Maar de Grieken ontwikkelden in de Elementen van Euclides de meetkunde als een 'denk-spel'. Toch ging het toen nog over de meetkunde van de ons omringende ruimte. Onder andere door de ontdekking van de niet-euclidische meetkonden werd de meetkunde een autonome wetenschap, meetkunde om de meetkunde. Aan het eind

van de 19-de eeuw ontstond zo de meetkunde van de vier-dimensionale ruimte, en tegelijk van ruimten met meer dan vier dimensies.

Ondertussen waren andere onderzoeksmethoden beschikbaar gekomen, naast de euclidische passer en liniaal werd onder andere de differentiaalrekening bij de bestudering van krommen en oppervlakken benut. In het begin van de 20-ste eeuw werd de topologie, de studie van de eigenschappen van meetkundige objecten, die behouden blijven bij continue vervorming, snel ontwikkeld.

Een andere belangrijke ontwikkeling was de algebraïsering van de meetkunde. Begonnen met het gebruik van cartesische coördinaten werd dit proces na de tweede wereldoorlog voortgezet met moderne algebraïsche hulpmiddelen gecombineerd met groepentheorie. Ook ontstond er een analytische meetkunde (een heel ander vak dan het vroeger op het gymnasium onderwezen deel van de meetkunde) en een niet commutatieve meetkunde.

Rond deze thema's zijn in de laatste decennia 'Field-medals' (een equivalent van de Nobelprijs voor de wiskunde) uitgereikt. De uiteindelijke bevestiging van het vermoeden van Fermat gebruikte meetkundige theorieën en daarbij kwamen derdegraads krommen en functies, die elliptische functies genoemd worden, van pas. De naam elliptische functies hangt samen met het feit dat deze functies gebruikt worden bij de bepaling van de omtrek van een ellips.

Ik hoop dat alle toehoorders op 1 februari 1997 dit verhaaltje één of twee keer gelezen hebben. Dan kan ik volstaan met de vertoning van een fraaie video, wat handtastelijke visuele spelletjes en ook nog iets meer vertellen over wat nu actueel is in het wetenschappelijk onderzoek in de meetkunde.

---

# Thema wiskunde, redeneren en bewijzen

Vraag: is het mogelijk om twee niet-rationale getallen  $a$  en  $b$  te vinden zodat  $ab$  een rationaal getal is?

Ja. Neem eerst  $a_1 = \sqrt{2}$  en  $b_1 = \sqrt{2}$ . Nu zijn er twee mogelijkheden:  $\sqrt{2}\sqrt{2}$  is wel of is niet rationaal. In het eerste geval is de vraag beantwoord. In het tweede geval is dus  $\sqrt{2}\sqrt{2}$  niet-rationaal. Maar neem dan als niet-rationale getallen  $a_2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$  en  $b_2 = \sqrt{2}$  met als resultaat:  $(\sqrt{2}\sqrt{2})\sqrt{2} = 2$  is rationaal! Is nu de vraag beantwoord? Er is aangetoond dat ze er zijn, maar  $a$  en  $b$  zelf zijn niet gevonden.

De Nederlandse wiskundige Brouwer is de grondlegger van de theorie waarin dergelijke bewijzen niet zijn toegestaan. Deze theorie stamt uit het begin van deze eeuw en heeft tegenwoordig veel toepassingen in de informatica. Het begrip 'bewijs' blijkt niet meer absoluut vast te liggen.

Het bewijs van het vierkleurenprobleem is lang en onoverzichtelijk omdat circa 2000 kaarten gecontroleerd moeten worden. Praktisch gezien kunnen alleen computers dit nagaan. Wat betekent dat voor bewijzen? *The death of proof* was de enigszins demagogische titel van een artikel in de Scientific American (oktober 1993). Het bewijzen als een creatieve activiteit om een logisch en overzichtelijk pad te vinden vanuit axioma's naar een onweerlegbare stelling, leek achterhaald.

Het bleek minder ernstig. Wiskundigen moesten zich eens gaan realiseren dat het bewijzen plaats vindt in een sociale context. Wat onweerlegbaar is, is ook sociaal bepaald en mogelijk tijdelijk. Hoewel in het slot van het artikel iemand waarschuwt dat het niet erg bemoedigend zou zijn als in de toekomst een computer antwoordt op de vraag of een hypothese correct is: 'Ja, het is correct, maar je zult het bewijs niet begrijpen.'

*Bewijzen moet - maar hoe (en waarom)?*

Prof.dr. D. van Dalen

Faculteit Wijsbegeerte, Universiteit Utrecht

Vrijdag 13.30-14.15 uur

Het karakteristieke van wiskunde is dat de eisen aan zekerheid ver uitgaan boven die van de andere wetenschappen. Bijvoorbeeld, waarom is '7 is een priemgetal' van een andere zekerheid dan 'de standaardmeter in Parijs is 1 meter lang'? De

wiskundige zekerheid is het resultaat van onze bewijsactiviteit. Geen bewijzen, geen wiskunde. We zullen ingaan op het begrip 'bewijs' en op de didactische problemen die aan de noodzaak van bewijzen en aan de techniek van bewijzen kleven. Zelfs al kunnen we in de praktijk van het onderwijs niet geheel voldoen aan de strengheidseisen die de moderne wiskunde stelt, het is van het grootste belang dat over de principiële strekking geen twijfel bestaat.

*Debat: Bewijzen in het wiskundeonderwijs?*

Henk Barendregt en Aad Goddijn

Katholieke Universiteit, Nijmegen en Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

voorzitter: S.J. Doorman

Vrijdag 15.45-17.00 uur

Een punt van discussie is nog altijd de vraag hoever je moet gaan bij het inzicht geven aan leerlingen in wat een bewijs is, in het bijzonder in het iets tonen van de formele aspecten van het bewijsbegrip. Het standpunt zou verdedigd kunnen worden dat juist het begrip bewijs in onze intellectuele traditie z'n betekenis ontleend heeft aan de wiskunde.

Maar als je naar de geschiedenis van de wiskunde kijkt, is het niet toevallig dat bewijzen een aanschouwelijke oorsprong heeft.

De opzet van dit debat is om deze contraverse verder te onderzoeken. Daartoe zijn twee combattanten uitgenodigd die in een exploratief twistgesprek de vraag zullen verkennen, uitgaande van een zo helder mogelijk geprofileerde controverse.

*Redeneren leren als formeel spel*

Prof.dr. N.G. de Bruijn

Technische Universiteit Eindhoven

Zaterdag 10.00-11.00 uur

1. Het systeem om leerlingen het wiskundig redeneren bij te brengen was van oudsher dat men het redeneren in praktijk bracht zonder er ooit expliciete regels voor te formuleren. De leerlingen (althans de goede) kregen het vanzelf in de vingers.

2. Het hedendaagse wiskundeprogramma voor de scholen in ons land biedt weinig kansen om te laten zien wat een bewijs is. Nietemin is het zeer gewenst dat enig gevoel voor het wiskundig redeneren wordt bijgebracht.



3. De wetten van het redeneren kunnen heel goed op school worden uitgelegd. Men kan het doen aan de hand van afleidingen met vlaggenstokken en vlaggen, waarbij de vlaggen de onderstellingen dragen en de vlaggenstokken de geldigheidsduur van zulke onderstellingen aangeven.
4. Eenvoudigheidshalve kan dit werk worden beperkt tot propositiecalculus, waarbij letters  $a, b, c, \dots$  als proposities fungeren. In de een of andere volgorde worden mondjesmaat enkele connectieven *en*, *of*, *impl*, *equiv* ingevoerd, alsmede de ontkenning (*niet*). In verband met de ontkenning kan desgewenst ook met een propositie  $F$  (falsum) worden gewerkt.
5. Er zijn een aantal wetten die zeggen hoe met deze connectieven moet worden omgegaan in afleidingen. Met een eenvoudig notatiesysteem kan achter elke opgeschreven formule worden aangegeven welke afleidingswet op welke voorafgegane formules werd toegepast, waardoor verantwoording wordt afgelegd.
6. Er kunnen allerlei opgaven worden verstrekt, met uiteenlopende moeilijkheidsgraad. Vaak kunnen de opgaven interessanter gemaakt worden door het gebruik van ontkenningen te verbieden.
7. Dit werken met vlaggen toont niet alleen de structuur van wiskundige redeneringen, maar ook de strategie waarmee redeneringen worden gevonden.
8. Toepassing op de wiskundige praktijk is binnen de school vooralsnog beperkt wegens het bovengenoemde gebrek aan wiskundige stof, maar dat zou kunnen veranderen. Overigens behoeft zulke toepassing niet formeel te zijn; het is wellicht voldoende het inzicht bij te brengen dat redeneringen over wiskundige onderwerpen op eenzelfde wijze in elkaar zitten als de vlaggenschema's.

---

# Thema wiskunde, weer en astronomie

Bij het voorspellen van het weer worden enorme stelsels differentiaalvergelijkingen opgelost. Dit is vooral bruut rekengeweld dat zonder computers niet meer te doen is. In de onderliggende modellen die gebruikt worden door onder andere het KNMI speelt de hoeksnelheid van de luchtdeeltjes een belangrijke rol.

Als de zon schijnt vinden we het al gauw mooi weer. Maar de zon (en de wind) kunnen ook gebruikt worden voor het opwekken van energie. Het ontwerpen en aanleggen van middelen voor alternatieve energie-opwekking is een praktische context voor het gebruik van de wiskunde.

Nog verder van de aarde verwijderd dan de zon, bevinden zich planeten, sterren en zwarte gaten. Van oudsher hebben de hemellichamen een belangrijke rol gespeeld bij afstands- en plaatsbepaling. Bewegingen van planeten en sterren in het heelal worden in wiskundige termen beschreven, hoewel ook hier - net als in de weersvoorspelling - veel nog niet bekend is.

De bijdragen in dit thema staan in het teken van de lucht en de ruimte, en bieden bruikbare contexten voor de wereldse wiskundeles.

*De grootte en leeftijd van het heelal*

Dr. Walter Jaffe

Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universiteit Leiden

Vrijdag 13.30-14.15 uur

In deze werkgroep zal nader worden ingegaan op hoe sterrenkundigen de grootte en leeftijd van dingen meten, te beginnen met objecten in de buurt van de aarde en eindigend met het heelal zelf. Voor objecten dichtbij is het meten vooral een kwestie van techniek. Voor objecten die verder weg zijn dienen vragen over wat ruimte en tijd betekenen op zulke schaal, eerst beantwoord te worden.

In de eerste stappen, het meten van afstanden tot objecten in het zonnestelsel, wordt gebruik gemaakt van relatief eenvoudige begrippen als parallax en de lichtsnelheid, en is de wiskunde niet moeilijker dan goniometrie. Voor de volgende stap, objecten in de buurt van sterren, is enige kennis van de physica van sterren nodig en speelt

de 'inverse square law' een belangrijke rol. In theorie is het vervolgens niet ingewikkelder om te meten in andere sterrenstelsels; in de praktijk echter wel.

Wanneer we in de buurt van de meest van ons afstaande sterrenstelsels komen, of het heelal als geheel bekijken, wordt het steeds gecompliceerder. Het begrip afstand wordt ambigu en delen van de algemene relativiteitstheorie zijn nodig om dit te verklaren. Bovendien beginnen de 'standaard' objecten tekenen van de evolutie te tonen, en gedragen zich niet meer als standaard. Daarom is het nog steeds niet zeker hoe groot (of oud) het heelal precies is.

This image was taken by the Hubble Space Telescope of a 'Deep Field'. This is the result of hundreds of hours of exposure of the HST pointing at one field. The biggest galaxies visible are 'nearby' galaxies (a few hundred million light years away) while the smallest ones are so far away that the light from them has been traveling 3/4 of the age of the universe to get to us. Many of the distant, and thus 'young' galaxies have disturbed shapes, showing that they are still in the process of forming.

Picture credit: R. Williams, NASA, January 15, 1996

*Wervels in de atmosfeer*

Wim Verkleij

KNMI, de Bilt

Vrijdag 15.45-16.45 uur

Een van de meest opvallende eigenschappen van de atmosfeer is de aanwezigheid van ronddraaiende luchtmassa's ofwel wervels. Deze luchtmassa's zijn goed te zien op satellietfoto's, waar ze te herkennen zijn aan langwerpige, spiraalvormige wolkenbanden. Wervels spelen een belangrijke rol in de dynamica van de atmosfeer. Dit wordt tot uitdrukking gebracht door een belangrijk theorema uit de stromingsleer, geformuleerd door Hans Ertel in 1942. De centrale grootheid in dit theorema is de potentiële vorticheit. Deze grootheid definieert de hoeveelheid draaiing van luchtdeeltjes en daarmee de mate van werveling. Voor een wrijvingsloze luchtstroming toonde Ertel aan dat een waarnemer die met de stroming meebeweegt geen verandering ziet in de potentiële vorticheit. Met andere woorden, de mate van werveling zoals gedefinieerd door de potentiële vorticheit, wordt door een wrijvingsloze luchtstroming alleen *verplaatst*.

Het theorema van behoud van potentiële vorticheit biedt de mogelijkheid om luchtmassa's in hun beweging te volgen. Deze manier lijkt veel op het volgen van luchtmassa's door middel van wolken op satellietfoto's. Het verschil is dat dit met behulp van potentiële vorticheit veel nauwkeuriger kan en ook niet afhankelijk is

van de aanwezigheid van wolken. Bovendien zegt de potentiële vortciteit veel over de toestand van de betreffende lucht, zodat we met behulp van deze grootheid de dynamica van de atmosfeer effectief kunnen analyseren. Een recente toepassing betreft de vragen waarom er hoog in de atmosfeer een straalstroom ligt en waarom er zo'n scherpe overgang is van troposfeer naar stratosfeer. Door de atmosfeer te analyseren in termen van potentiële vortciteit komen we een stuk dichterbij de beantwoording van deze vragen.

*Van appels tot zwarte gaten*

Vincent Icke

Sterrewacht Leiden en Universiteit van Amsterdam

Zaterdag 9.00-9.45 uur

De zwaartekracht is de grootmeester van het Heelal. Alle structuren waaraan wij ons bestaan danken (Aarde, Zon en sterren, de Melkweg, ja het Heelal zelf) worden gedomineerd door de zwaartekracht.

Wiskundig gezien biedt de zwaartekracht zeer veel aanknopingspunten. De wiskundig precieze beschrijving van natuurverschijnselen dateert grotendeels van Newton's baanberekeningen. Deze zullen in de voordracht aanschouwelijk worden gemaakt door het recept 'baanbeweging is voortbewegen plus vallen' zowel grafisch als algebraïsch te behandelen. In een didactische toepassing kan men hierin zo ver gaan als men wil. Een voorbeeld van een numerieke toepassing op een Macintosh zal worden gedemonstreerd.

Vervolgens is er Einstein's beschrijving van de zwaartekracht als afkomstig van de structuur van ruimte en tijd. Ook dit kan gemakkelijk aanschouwelijk worden gemaakt door kromming van oppervlakken te meten. Een bouwplaat van een zwart gat is hiervoor beschikbaar.

De didactisch interessante kant van de zaak gaat voornamelijk over de toepassing van een minimum-principe bij het bepalen van banen (Fermat: de kortste weg, Snellius, en de Einstein vergelijking). Ook hiervoor is een Macintosh demo, van banen van lichtstralen rondom een zwart gat.

*Duurzame energie en wiskunde*

Ad van Wijk

Ecofys, Utrecht

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Toepassing van duurzame energie in Nederland vindt nog slechts op bescheiden schaal plaats. Nog geen 1% van onze energiebehoefte wordt in Nederland

opgewekt via duurzame energie. Dit moet veranderen vindt ook de overheid. In 20 jaar tijd zou het aandeel van duurzame energie ongeveer 10% moeten zijn. Belangrijke duurzame energiebronnen zijn dan windenergie, energie uit biomassa/organisch afval, benutten van de zon voor ondermeer verwarming van gebouwen, warm tap water, drogen, koelen en benutten van de zon voor de productie van elektriciteit.

Ecofys is een bedrijf dat vele projecten op het gebied van duurzame energie ontwikkelt en nieuwe producten met duurzame energie maakt. Een aantal leuke toepassingen en producten zullen worden getoond.

Een van die projecten betreft de toepassing van zonnecellen in het dak van het conferentieoord de Leeuwenhorst, waar de Nationale Wiskunde Dagen zullen worden gehouden, zie de figuur. Aan de hand van dit project zal ik u laten zien welke wiskunde zoal een rol speelt bij de toepassing van zonnecellen in gebouwen. Ondermeer komt daarbij aan de orde:

- Omrekening van instralingsniveau en spectrum naar de gewenste oriëntatie en tilthoek, directe en diffuse instraling.
- Modelling van opbrengst en verliesfactoren, waarbij aspecten zoals reflectieverlies, celrendementen als functie van instraling en temperatuur, omvormerrendement, kabelverlies, module mismatch en beschaduwning worden meegenomen.
- Dynamische modellering van bouwfysische aspecten, zoals de vochthuishouding, warmtehuishouding en verlichting.
- Berekening van spanningshuishouding en kwaliteit van de stroom uit de zonnecellen die ingevoed wordt in het elektriciteitsnet (blindstroom, hogere harmonischen).
- Systeemdimensionering en economische optimalisatie naar laagste kWh kosten (dakvlakbenutting, dimensionering omvormer).

---

# Thema wiskunde en robotica

Robotten worden tegenwoordig bij allerlei hoog-geautomatiseerde productieprocessen toegepast. Bekende taferelen zijn de immense fabriekshallen waar auto's op de lopende banden door druk bewegende robot-armen samengesteld worden. Daarbij is het essentieel dat de robot met grote precisie een beweging in de ruimte kan uitvoeren.

Naast deze taken, waarin de omgeving van de robot redelijk voorspelbaar en afgebakend is, zijn er ook enkele zeer tot de verbeelding sprekende onderzoeken, waarin de robot te maken krijgt met onzekerheid over de aard van zijn omgeving en de daarbij behorende stimuli. Op dat moment wordt het zaak dat de robot 'menselijke trekjes' krijgt en vertoont het thema raakvlakken met de kunstmatige intelligentie.

Deze onderwerpen komen uitvoerig aan bod in een viertal lezingen.

*Bewegende Robots*

Mark Overmars

Vakgroep Informatica, Universiteit Utrecht

Vrijdag 13.30-14.15 uur, herhaling 15.45-16.30 uur

Met computerpracticum

Als robots zelfstandig taken uit willen voeren is het van groot belang dat ze in staat zijn zelf hun bewegingen te plannen. Dit probleem is lastiger dan het in eerste instantie lijkt. Een berekend pad dient botsingsvrij te zijn, niet te lang en rekening te houden met de mogelijkheden en onmogelijkheden van de robot. Zo kan een robot-auto bijvoorbeeld niet zijwaarts bewegen.

De positie van een robot wordt beschreven met een aantal parameters. Een robot in het vlak wordt bijvoorbeeld met drie parameters beschreven: twee voor de positie en één voor de oriëntatie. In de ruimte zijn dit er al zes (drie voor de positie en drie voor de oriëntatie). De ruimte van deze parameters wordt wel de configuratieruimte genoemd. Voor een drie-dimensionale robot is deze dus zes-dimensionaal. Hetzelfde geldt voor een robot arm.

Het plannen van een beweging moet in feite in deze configuratieruimte plaats vinden. In deze voordracht worden een aantal technieken besproken om dit soort

bewegingen te berekenen. Daarna kan hier zelf mee geoefend worden, met behulp van een programma dat het bewegingsprobleem als een soort spel presenteert. De opdracht is om voor verschillende soorten robots een zo kort mogelijk pad te vinden. Dit kan vervolgens vergeleken worden met de oplossing van de computer.

*Accuraat padvolgen met een robotarm*

H. Nijmeijer

Faculteit toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente

Zaterdag 9.00-9.45 uur

Robotten worden tegenwoordig bij allerlei hoog-geautomatiseerde productieprocessen en in de ruimtevaart toegepast. Veelal wordt er daarbij naar gestreefd dat de robot met grote precisie een beweging in de ruimte kan uitvoeren. Bij deze voordracht wordt aandacht besteed aan de wiskundige onderbouwing voor het verkrijgen van een goede regelaar voor een robotarm.

Aspecten die hierbij een rol spelen zijn de fysische modellering van de robotarm, de stabiliteits-analyse van de regelaar, de parameter-onzekerheden in het model en de beschikbare rekenmogelijkheden. Middels een video-demonstratie zal een illustratie van het accuraat padvolgen worden gegeven.

*Topologie en de robotarm*

Michiel Hazewinkel

CWI, Amsterdam

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Idealiter zou een robotarm elke positie (in een gegeven gebied) moeten kunnen bereiken en wel zodanig dat de positie van de hand elk gewenst coördinaten systeem geeft. Gegeven genoeg gewrichten zijn er genoeg vrijheidsgraden en zou dat dus zonder meer moeten kunnen.

Er zijn echter obstructies (singulariteiten) die maken dat 'omwegen' bewandeld moeten worden. Deze obstructies zijn van topologische aard.

# Thema wiskunde en architectuur

Zijn architecten kunstenaars of ambachtslieden? In elk geval worden ze geacht in hun bouwwerken het nuttige en het aangename met elkaar te verenigen. En omdat architectonische objecten nu eenmaal altijd ruimtelijk zijn, komt daar heel wat meetkunde bij kijken. Wie kent niet de Rotterdamse kubushuizen van Blom, die trouwens ook al tot de meeste wiskundeschoolboeken zijn doorgedrongen?

Over eenvoudige vormen als cirkels en vierkanten in de architectuur is al heel veel te vertellen. Maar ook de vijfhoek is een geliefde vorm en een centraal element bij bijvoorbeeld het hoofdkantoor van de Gasunie in Groningen. Van de vijfhoek is het een kleine stap naar de Gulden Snede, en daarmee naar bijzondere verhoudingen in de architectuur.

Bolle vormen stellen architecten voor speciale problemen. Bolvormige koepels zijn in de architectuur opgebouwd uit kleine driehoekjes. Achter deze zogenaamde geodetische koepels, zoals bijvoorbeeld het luchtvaartmuseum op Schiphol, gaat interessante wiskunde schuil, waaronder de beroemde formule van Euler.

*Wetmatigheid: keurslijf of vrijheid?*

Liesbeth van der Pol

Atelier Zeinstra van der Pol, Amsterdam

Vrijdag 13.30-14.15 uur

In de geschiedenis van de architectuur neemt wiskunde een belangrijke plaats in. In de gothiek werd schoonheid bepaald door geometrie, de zogenaamde vormverhouding, terwijl in de Renaissance de getalsmatige verhoudingen bepalend waren.

In onze eeuw hebben architecten getracht zich los te maken van al deze wetmatigheden, wat op zich weer geleid heeft tot nieuwe wetmatigheden. Neem Le Corbusier met zijn de Modulor en uit ons eigen land Dom van der Laan met het plastisch getal. In de tweede helft van deze eeuw ontstaat er een fascinatie voor dynamische vormen. Er wordt gezocht naar architectuur die als een bewegend ding te lezen is, in plaats van als statische optelsom van verhoudingen.

Echter, in menig werk van een architect wordt de grootste vrijheid van ontwerpen pas bereikt, wanneer die dynamische vorm weer te vangen is in een wetmatigheid.

*Over verhoudingen in de architectuur*

H.J. van der Laan



## Architect, 's Hertogenbosch

Vrijdag 15.45-16.45 uur

Architectuur is een der oudste vormen van toegepaste wiskunde. Dat gaat van het simpele afpassen, het overbrengen van het ontwerp op het maagdelijk terrein tot de geavanceerde statische en bouwfysische rekentechnieken en computersimulaties van onze tijd. Ook de samenwerking tussen de bouwers is gebaseerd op vaste afspraken over maat en getal. De wiskunde speelt bij dit alles een dienende rol.

De oude Grieken, met hun wetenschappelijke nieuwsgierigheid, maten hun muziekinstrumenten op, dat wil zeggen de klinkende lengtes van de snaren en pijpen. De relatieve hoogtes van de in hun muziek gebruikte tonen, de onderlinge verhoudingen der trillingsgetallen, bleken overeen te stemmen met eenvoudige getalsverhoudingen. Bovendien 'produceerden' de dominante tonen van hun toonladders wiskunde: telkundige, meetkundige en harmonische middens, de gezochte 'harmonie der sferen'.

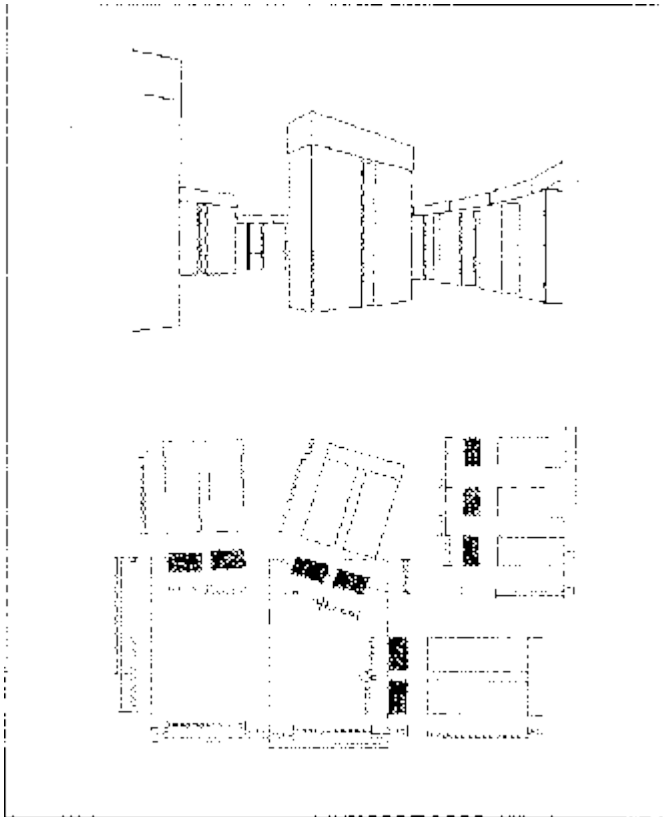
Dit was een ontdekking, een succesvolle verbinding tussen esthetica en wiskunde, tussen het subjectieve, bij uitstek door de muziek vertolkt, en de objectiviteit van getallen. Dat verleidde de architecten van de Renaissance ertoe om de intervallen van de muziek rechtstreeks over te planten naar hun vakgebied en toe te passen in hun bouwwerken.

In de recente architectuurgeschiedenis introduceert de befaamde architect Le Corbusier een verhoudingssysteem dat is gebaseerd op de bekende 'gouden snede'. Deze verhouding, welke hier en daar in de natuur wordt aangetroffen, is ook favoriet bij antroposofisch georiënteerde architecten.

De kern van de architectuurtheorie van Dom H. van der Laan, monnik en architect (overleden in 1991) wordt gevormd door het zogenoemde 'plastische getal', in concreto een reeks van vier, in de architectuur aan te wenden, maatstelsels. Deze fundamentele studie onderzoekt de algemene voorwaarden waaraan onze bouwsels dienen te voldoen, willen zij goed functioneren in de omgang van ons met de omringende wereld.

Behalve dat de afmetingen in de architectuur afgestemd worden op onze lichamelijke behoefte aan kleinere en grotere ruimtes, stelt een architect daarmee ook de optredende vormen vast die we waarnemen en al of niet mooi vinden. Bovendien gaan deze maten voor onze ogen een onderling spel van verhoudingen met elkaar aan.

Wil architectuur in dit opzicht 'werken', dan worden ook aan deze verhoudingen en de wijze van toepassing zekere condities gesteld.



*Sabonburgse van het monument van Sabonburg en analyse van de compositie daarvan.  
Illustraties overgenomen uit 'De architectonische ruimte' van Dom H. van der Laan.*

## Geodetische Koepels

Martin Kindt

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Zaterdag 9.00-9.45 uur

Stel je voor een regelmatig twintigvlak (icosaëder) met omgeschreven bol. Een vlak door het middelpunt van de bol en een ribbe van het veelvlak snijdt het boloppervlak volgens een geodetisch boogje dat twee hoekpunten van het veelvlak verbindt. Op deze wijze kun je 30 boogjes maken, evenveel als er ribben zijn aan de icosaëder.

Die 30 boogjes vormen als het ware een geraamte van de bol. Zo'n geraamte van driehoekjes noemt men een geodetische koepel of een geode. In het spraakgebruik veroorloven we ons enige slordigheid: ook het veelvlak waarvan de ribben de koorden zijn bij de geodetische boogjes wordt een geode genoemd. De Amerikaanse architect Richard Buckminster Fuller ontwierp gebouwen als delen van bollen en gebruikte daarbij de geode-structuur. Voor zijn beroemde prototype gebruikte hij de structuur van een veelvlak met 3840 driehoekige zijden. Een van de beroemdste geodetische koepels staat te Montreal en is destijds gebouwd voor de wereldtentoonstelling.

De structuur van geodes hangt ten nauwste samen met molecuulstructuren die thans in de scheikunde worden bestudeerd (Nobelprijs 1996!), de zogenaamde `buckey

balls' of `fullerenen', waarvan het eenvoudigste voorbeeld de voetbal is met zijn vijf- en zeshoekige zijden. Die voetbalstructuur, een archimedisch veelvlak, is bijvoorbeeld te vinden in het werk van Albrecht Dürer.

De wiskundige achtergrond van geodes en fullerenen is niet moeilijk te begrijpen en zou in de bovenbouw van havo of vwo kunnen worden behandeld. Met wat combinatoriek, de formule van Euler en de cosinusregel kom je al een heel eind. Bovendien is er op de educatieve markt materiaal te koop, waarmee leerling zelf modellen kan bouwen. De classificatie van alle mogelijkheden levert aardige resultaten. Die resultaten zijn te bewonderen in het echte leven, zowel in groot formaat (de geodetische bouwwerken) als in de micro-architectuur (moleculen, virussen).

*Getal en ruimte: de tekentafel van de antieke architect*

Herman Geertman

Archeologisch Centrum, Universiteit Leiden

Zaterdag 10.00-10.45 uur

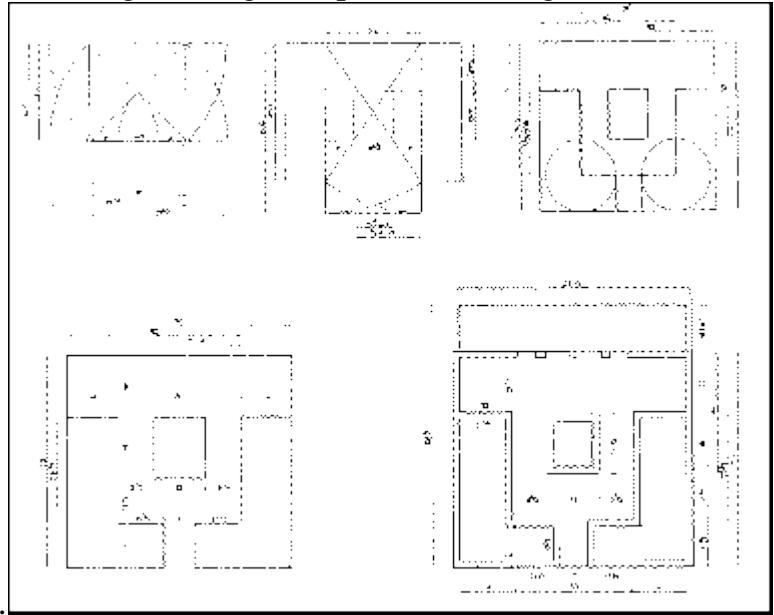
De titel `Getal en ruimte' is ontleend aan een vwo-methode die de rekenkunde in één leergang bijeenbrengt: in zekere zin een terugkeer naar de uitgangssituatie van de Griekse en Hellenistische wiskunde.

De ondertitel legt een verband met de fase van het ontwerpen in de Griekse en Romeinse bouwkunst: de `ruimte' is door het bouwwerk aangepaste en herschapen ruimte; het `getal' staat voor de maten die vorm en samenhang van de bouwdelen bepalen.

Maar er is ook een onmiddellijk verband tussen de wiskundige titel en de architecturale ondertitel. Zowel uit antieke getuigenissen in geschriften als uit metrologische analyses van de antieke gebouwen blijkt dat de antieke bouwmeesters aan hun ontwerpende arbeid een wiskundige grondslag gaven. De achterliggende gedachte was dat de microkosmos van het bouwwerk of de gebouwde omgeving moest beantwoorden aan de wetten die de macrokosmos beheersen. De macrokosmos laat zich langs wiskundige weg definiëren. Op dezelfde wijze moeten de lijnen, vlakken, vormen en proporties van de gebouwde omgeving tot in details wiskundig zijn bepaald.

Deze achtergrond van de antieke bouwkunst is geen statisch gegeven maar een dynamisch proces parallel aan de ontwikkeling van de antieke wiskunde. Zo ontmoeten we rationale getalsmatige proportiestelsels zolang de Pythagoraeïsche wiskunde bepalend is, en ontstaan in de 4de eeuw vóór Christus irrationale zuiver meetkundige ontwerpmodellen.

In mijn lezing zal ik tegen deze achtergrond ingaan op het archeologisch onderzoek



van antieke ontwerpsystemen.

Ontwerpschema van de plattegrond van een atriumhuis in Pompeii (Casa dei Vetti). Maten in oskische voeten (ca. 27,5 cm). M = modulus of basismaat, in casu de breedte van het atrium.

# Thema wiskunde en archeologie

Bij dit thema zijn de mystiek en wiskunde van de architectuur van piramiden, de astronomische aspecten van Stonehenge en de bijzondere wijze waarop Maya steden werden ingericht, misschien wel bekende voorbeelden die je onmiddellijk te binnen schieten. Dat de Maya's zo'n leuke tijdrekening hadden, alsmede een twintigtalig talsysteem, is misschien al minder bekend. Maar wiskunde is bij veel meer facetten van de archeologie van belang.

Wiskundige analyses spelen een grote rol bij het bepalen van de volgorde (in de tijd), bij het classificeren van voorwerpen, bij het bepalen van verwantschappen en bij het ontrafelen van de vorm van objecten waarvan slechts gedeelten zijn gevonden.

*Meten met veel maten: Archeologische classificatie*

Bert Voorrips

Faculteit Ruimtelijke Wetenschappen, Universiteit van Amsterdam

Vrijdag 13.30-14.15 uur

Sinds ongeveer veertig jaar wordt in de archeologie gebruik gemaakt van toepassingen van de wiskunde, vooral van statistiek. Een altijd terugkerend archeologisch probleem is dat van de classificatie: het indelen van objecten in groepen op basis van (een aantal van) hun kenmerken. Er is voor één set objecten niet één 'juiste' indeling: het hangt af van het doel van de indeling welke het meest geschikt is. De keuze van de kenmerken die gebruikt worden voor een indeling moet worden gemaakt met dat doel in het achterhoofd. Ook daarna zijn er nog vele technieken om uit te kiezen: clusteranalyses, monothetisch of polythetisch, al dan niet voorafgegaan door bijvoorbeeld principale componenten analyse of factoranalyse, etc.

In deze bijdrage zal ik voorbeelden geven van (de geschiedenis) van toepassingen van een

aantal methoden, waarna de deelnemers zelf enkele eenvoudige indelingsmethoden zullen

gebruiken om daarmee een kleine set objecten naar hun smaak in groepen in te delen. Als

laatste onderdeel zullen de gemaakte indelingen besproken worden.

*How to count broken things*

Mr. Clive Orton

Institute for Archaeology, University College London

Vrijdag 15.45-16.30 uur, herhaling zaterdag 9.00-9.45 uur

A key concept in archaeology is the assemblage: a group of objects found together. Archaeologists compare assemblages and explain the differences that they discover between them as either (i) chronological differences, (ii) spatial differences or (iii) functional or social differences. One way of comparing assemblages is to compare their compositions, i.e. the proportions of different types of objects in the different assemblages. To do this, they have to count the objects by type, and calculate proportions or percentages. At this point they encounter a major problem, because most classes of archaeological objects are found in a broken state (for example, pottery, glass, animal bones). How do they count this broken material?

Many methods have been suggested, but they all have faults: they may be biased, or unreliable, or give figures which cannot easily be compared statistically. Ideally, we need 'counts' which can be analysed like any other count-type data, for example by using contingency tables and chi-squared tests. The talk will show how this can be done. First the proportion of each object actually present is measured or estimated, and the proportions are added up to give a 'equivalent number of objects' of each type. A technique known as ratio estimation is used to calculate the standard deviations associated with the proportions of different types in the assemblages. These are compared with the standard deviations that would have been obtained from an assemblage of complete objects. From this, the size of a hypothetical assemblage of complete objects that has the same standard deviations as the real assemblage, is found. This number is called the pseudo-total of the assemblage. The equivalent numbers are scaled to that they sum to the pseudo-total; this process is called the pseudo-count transformation or pct.

Use of the pct means that archaeologists can now use standard statistical techniques (for example, chi-squared tests, loglinear analysis, correspondence analysis) to compare their assemblages in a statistically valid way - something that was not possible before.

*Geografische Informatie Systemen en de ligging van archeologische vindplaatsen*

Milco Wansleeben

Faculteit Pre- & Protohistorie, Universiteit Leiden

Zaterdag 9.00-9.45 uur, herhaling 10.00-10.45 uur  
Met computerpracticum

De laatste 10 jaar is GIS het 'hot-item' van de automatisering in de archeologie. Geografische Informatie Systemen zijn door de toegenomen rekenkracht van de PC ineens bereikbaar en makkelijk toepasbaar voor veel archeologen. Bij archeologisch onderzoek wordt veel informatie over samenlevingen afgeleid uit de ruimtelijke spreiding van de achtergelaten resten, of het nu gaat om voorwerpen in een nederzetting of om sites in een landstreek. GIS is bij uitstek geschikt om ruimtelijke gegevens op te slaan, en dan..., dan kunnen we er zo lekker mee rekenen.

*Getal en ruimte: de tekentafel van de antieke architect*

Herman Geertman

Archeologisch Centrum, Universiteit Leiden

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Deze voordracht houdt zowel verband met archeologie als met architectuur. Zie voor de samenvatting het thema *Wiskunde en architectuur*.

# Herhalingen van vorig jaar

De presentaties van Michel Roelens respectievelijk Jan van Maanen zijn een herhaling van de gelijknamige workshops van de Nationale Wiskunde Dagen 1996. Wegens succes geprolongeed dus.

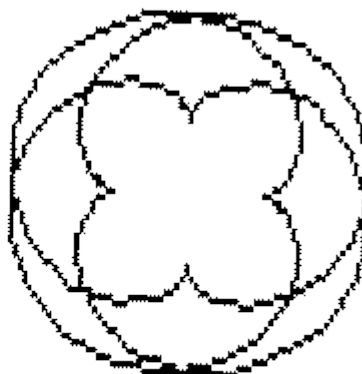
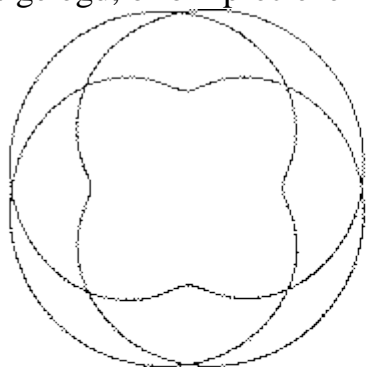
*Hoe het wiel verder rolde*

Michel Roelens

Maria Boodschaplyceum, Brussel en Katholieke Hogeschool Limburg, Hasselt

Vrijdag 13.30-14.15 uur

*Het wiel dat het best rolt, heeft de vorm van een cirkel.* Dat weet de mensheid al een heel tijdje; aan het bewijs van deze stelling zal de presentatie niet gewijd zijn. Wel willen we de baan volgen die het cirkelvormige wiel door de eeuwen heen heeft afgelegd, of om preciezer te zijn: de baan van *één puntje* van het wiel.



*Een wiel met 36 tandjes draait rond een wiel met 48 tandjes: spirograaf versus grafische rekenmachine*

Als de baan waarop het wiel rolt zelf cirkelvormig is, krijgen we allerlei mooie krommen. Je kunt ze tekenen met de 'spirograaf' (een speelgoed dat terug is van weggeweest). Diezelfde krommen had men tot in de zestiende eeuw nodig om het eigenaardige gedrag van de planetenbanen te beschrijven, voordat *Copernicus* de zon in het centrum van het model plaatste.

Bij de zeventiende-eeuwse geleerden was de *cycloïde*, de baan van een punt op een cirkel die over een *rechte* baan rolt, erg in de mode. Prijsvragen en brieven gingen rond en allerlei merkwaardige eigenschappen over die kromme werden aangetoond. Vooral de originele methoden die *Roberval* bedacht om raaklijnen aan de cycloïde te construeren en om de oppervlakte onder een cycloïdeboog te bepalen, zijn om van te snoepen. Diezelfde kromme bleek ook verrassende fysische toepassingen te hebben: *Huygens* gebruikte ze om het slingeruurwerk te verbeteren



en *Bernoulli* (begin achttiende eeuw) toonde aan dat je er de snelst mogelijke glijbaan tussen twee gegeven punten mee kunt maken.

De redeneringen van Roberval en Huygens zijn kenmerkend voor de zeventiende eeuw, waarin de overgang plaatsvond van de 'meetkundige bewijzen Griekse stijl', telkens aangepast aan de bestudeerde kromme, naar de algemenere methoden met differentiaal en integralen (*Leibniz, Newton*).

We maken een duikje in de pruikentijd, maar met onze leerlingen anno 1997 voor ogen. En de hulpmiddelen waar we mee zullen experimenteren zijn ook allesbehalve zeventiende-eeuws: de spirograaf, de grafische rekenmachine, ...

*Werkdadige Meetkunst*

Jan van Maanen

Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen

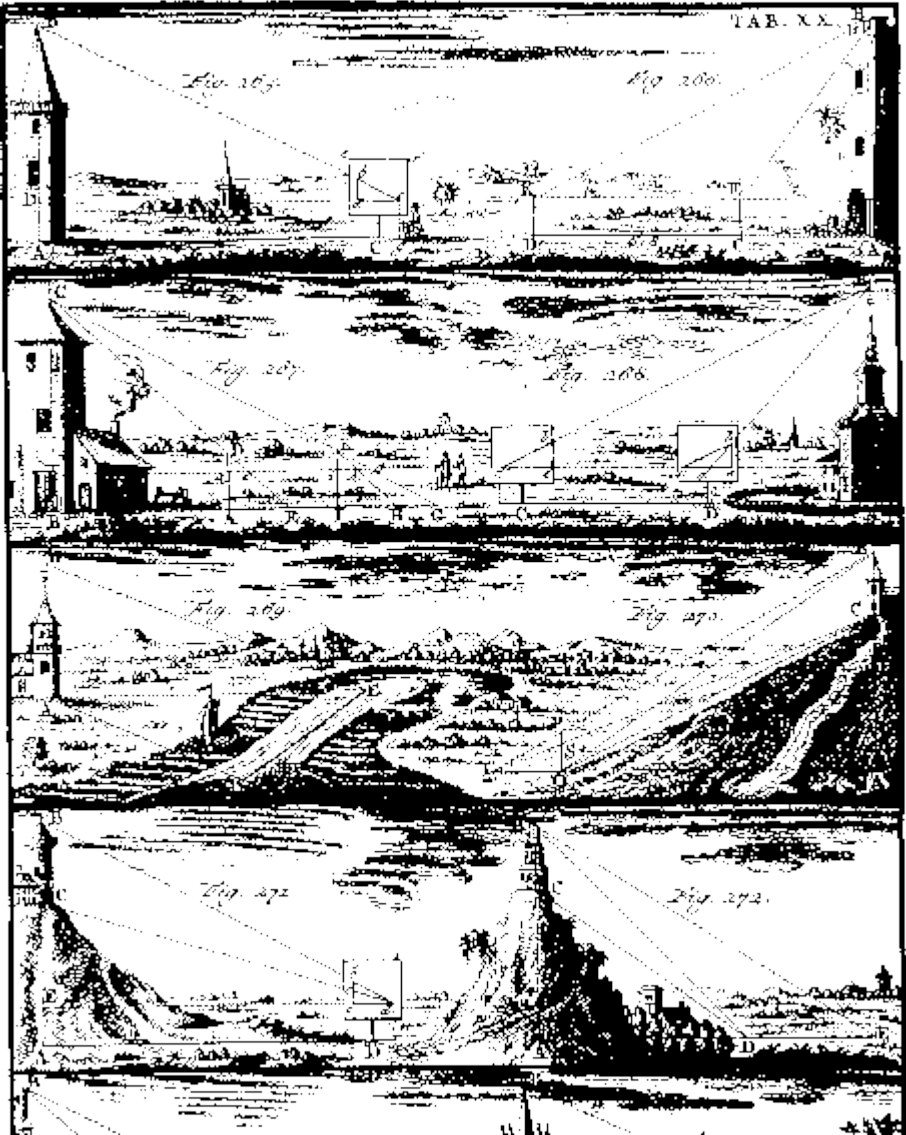
Vrijdag 15.45-16.45 uur

Morgenster en Knoop, wie kent ze nog? De associatie met een firma in lompen en oud papier dringt zich op, maar in de achttiende eeuw had het tweetal een zekere landelijke bekendheid, en wel als auteurs van het standaardwerk in de Nederlandse taal over landmeten: de *Werkdadige Meetkunst*.

Het boek, dat in 1707 voor het eerst verscheen, werd verschillende keren herdrukt. De Fundatie van de Vrijvrouwe van Renswoude, een - nog steeds actieve - liefdadige instelling, die weesjongens opvoedde tot het eerzame ambt van landmeter, bestelde met regelmaat nieuwe exemplaren, en de negentiende-eeuwse opvolger (Gisius Nanning) spreekt met respect over Morgenster en Knoop, ook al vindt hij ze wel wat verouderd.

De *Werkdadige Meetkunst* nodigt de hedendaagse lezer uit tot een hele serie activiteiten. Lezen (vanzelf, daar begin je natuurlijk mee), vergelijken met hoe wij tegenwoordig de meetkunde aanpakken, maar ook de 'werkstukken' zelf uitproberen, zoals bij twee stokken in het veld een stok daar precies midden tussenin te plaatsen. Als je een Dienaer hebt (deze behoorde net als een opschrijfboekje tot het instrumentarium van de landmeter), gaat dat gemakkelijker dan wanneer je het alleen moet doen. Rechte hoeken maken zonder hoeken te meten, ook een mooi probleem.

We gaan voor dit alles niet de duinen in, maar zullen dit compenseren met een practicum, uit te voeren aan de hand van de Nederlandse *Werkdadige Doos* (NWD).



# Niet thema-gebonden presentaties

Onder het kopje 'niet thema-gebonden presentaties' vindt u een drietal voordrachten die gehouden worden door leden van de Programmacommissie van de Nationale Wiskunde Dagen.

*Periodiciteit*

R. Tijdeman

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Vrijdag 15.45-16.45 uur

Periodiciteit is een fundamenteel begrip in de wiskunde (en de natuurkunde en de sterrenkunde). Het doet zich voor bij rijen en bij functies. In het voorgestelde profiel Natuur en Techniek voor vwo wordt expliciet aandacht besteed aan periodieke bewegingen zoals cardioïdes en cycloïdes. In deze voordracht gaat het vooral om periodieke rijen, met materiaal dat zich leent voor behandeling in de klas.

## 1. Periodieke ontwikkelingen.

De decimale ontwikkeling van een breuk is eindig (bijv. van  $\frac{2}{3}$ ) of periodiek (bijv. van  $\frac{1}{3}$ ). Welke ontwikkelingen breken af? Wat kan je zeggen over de periode als zij niet afbreekt? Is er verband tussen periodes van breuken met dezelfde noemer?

## 2. Resten van de veelvouden van een getal.

De resten van de veelvouden van een breuk zijn periodiek. Wat gebeurt er met de resten bij een irrationaal getal? Een interpretatie is dat een wiel eenparig ronddraait en de plaats waar een punt op het wiel zich bevindt elke seconde wordt opgetekend.

## 3. Dubbele periodiciteit.

Een periode heet minimaal als zij geen veelvoud is van een kleinere periode. Kan een rij (of reële functie) twee minimale periodes hebben? Niet als de rij oneindig lang is (resp. de functie continu is). Hoe lang kan een dubbel-periodieke rij worden? Hoe ziet een dubbel-periodieke functie eruit?

*De rij van Fibonacci*

H.J.A. Duparc

emeritus-hoogleraar, Technische Universiteit Delft

Zaterdag 9.00-9.45 uur

De rij van Fibonacci (geboren in 1175) is gedefinieerd door de beginvoorwaarden  $U_0 = 0$ ,  $U_1 = 1$  en de recurrente relatie  $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

De rij bezit vele fraaie eigenschappen. Een aantal ervan kan worden afgeleid uit een formule die  $U_n$  rechtstreeks uitdrukt in  $n$ . Het quotiënt van twee opeenvolgende elementen benadert (met stijgende  $n$  steeds nauwkeuriger) het getal  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ , dat een rol speelt in de meetkunde bij de theorie van de regelmatige tienhoek.

De rij heeft ook interessante getaltheoretische eigenschappen. De resten modulo een natuurlijk getal  $m$  van de elementen  $U_n$  vormen een periodiek patroon.

Redenerend van daaruit heeft men in de jaren vijftig de rij (en nadien een aantal generalisaties ervan) gebruikt voor het maken van kunstmatige aselechte getallenrijen (pseudorandom numbers), dat is het imiteren van ruis.

Ook op ander gebied heeft de rij toepassingen. In de natuur ontmoet men veel lengten met quotiënt  $\alpha$ .

Gaat men uit van iets andere beginvoorwaarden, namelijk  $V_0 = 1$ ,  $V_1 = 2$  maar wel met dezelfde recurrente relatie, dan ontstaat de geassocieerde rij van Fibonacci die via een ontdekking van E. Lucas (ruim een eeuw geleden) een methode biedt om onder de getallen  $M_s = 2s - 1$  (van Mersenne, 1588-1648) priemgetallen op te sporen. Het zijn de recordhouders onder de thans bekende priemgetallen; zo af en toe leest men in de krant dat een volgende (voorlopige!) recordhouder is gevonden.

Deze lezing sluit aan op de workshop van A.W. Boon (zie *Docentenworkshops*).

*Spelen met spiegelingen*

Aïda B. Paalman-de Miranda

Faculteit WINS, Universiteit van Amsterdam

Zaterdag 10.00-10.45 uur

Lijnspiegelingen kun je opvatten als de bouwstenen van de bewegingsgroep van het Euclidische vlak: elke beweging kan verkregen worden als een opeenvolging van lijnspiegelingen. Zo is bijvoorbeeld het effect van de samenstelling van twee lijnspiegelingen in onderling loodrechte spiegellijnen hetzelfde als dat van een draaiing om het snijpunt over 180 graden. Met andere woorden, het is de puntspiegeling in het snijpunt. Bij elke lijn hoort precies een lijnspiegeling en bij elk punt hoort precies een puntspiegeling. Punten en lijnen uit de vlakke meetkunde corresponderen zo met de involutorische elementen van de Euclidische bewegingsgroep, dat wil zeggen de elementen waarvan het kwadraat het eenheidselement in de groep, de identieke afbeelding, is. Het verrassende is dat je op deze

manier allerlei meetkundige stellingen kunt vertalen in groepentheoretische termen, waarna je ze helemaal algebraïsch kunt bewijzen.

# Docentenworkshops

Nieuw op deze derde Nationale Wiskunde Dagen is dat er workshops van docenten uit het voortgezet onderwijs in het programma zijn opgenomen. Een deskundige jury heeft twee bijdragen geselecteerd uit de inzendingen die binnen kwamen naar aanleiding van de oproep in de folder. De jury heeft richtlijnen voor de beoordeling geformuleerd en vervolgens gekozen:

- een workshop waarin verslag wordt gedaan van een originele activiteit die de docent(e) daadwerkelijk met de klas heeft uitgevoerd
- een workshop met relevante achtergrondinformatie op wiskundig gebied.

*De gulden snede*

Drs. A.W. Boon

Christelijk Gymnasium Sorghvliet, Den Haag

Vrijdag 13.30-14.15 uur

De gulden snede, zelfs wel goddelijke snede genoemd, komen we niet in het wiskundeprogramma tegen. Toch hebben weinig wiskundige begrippen zoveel furore gemaakt, juist ook buiten de wiskunde. Men treft de gulden snede aan in de architectuur, maar ook in de vioolbouw; in het ontwerp van drukletters, maar ook in de moderne plastische chirurgie. Zij zit zelfs verstopt in de pinpas en het biljet van



50 gulden.

In onze ontdekkingsreis langs gouden driehoeken, gouden rechthoeken, pentagrammen en de gulden rij (van Fibonacci) zullen we speciaal aandacht geven aan mogelijkheden om het onderwerp in de klas aan te snijden. Voor deze workshop heeft u genoeg aan papier, potlood, geodriehoek en rekenmachine.

*Wiskunde op je werk*

Irene Dalm

Develsteincollege, lokatie Hendrik Ido Ambacht

Zaterdag 9.00-9.45 uur

De vraag tijdens de wiskundelessen 'Waarvoor hebben we dit nodig?' zullen de meeste leraren wel gehoord hebben.

Om het antwoord op deze vraag meer inhoud te geven dan alleen maar een uitleg over de verschillende beroepen, kunt u in deze workshop kennis maken met opdrachten die leerlingen van een mavo-3 klas meegekregen hebben naar hun stageplaats.

De leerlingen hebben een week stage gelopen op een werkplek die ze zelf uitgekozen hebben. De opdrachten zijn per stageplaats gemaakt naar aanleiding van een bezoek en gesprek met de mensen aldaar, om zo opdrachten te maken die toegespitst zijn op de handelingen op het werk.

De opdrachten variëren van prijsvergelijking van reizen op een reisbureau tot het inslaan van handvaardigheidsmaterialen voor een activiteitenbegeleider.

De leerlingen hebben op deze manier gezien dat wiskunde niet alleen in de wiskundeles gebruikt wordt en het heeft ze tijdens hun stageweek wat houvast gegeven om dingen te vragen aan hun 'werkgever'.

# NWD ontwerpdagen

Jan de Lange met docenten

Zaterdag 10.00 - 10.45 uur

Zoals verleden jaar al aangekondigd zijn afgelopen september de eerste ontwerpdagen gehouden. Een groep van zo'n 16 docenten en Freudenthal medewerkers heeft anderhalve dag zitten brainstormen over vier onderwerpen van de Nationale Wiskunde Dagen die de moeite waard leken om omgezet te worden in leerlingmateriaal. Op deze bijeenkomst hopen we de materialen en enige ervaringen met het werken met de ontwerpen op school te presenteren. Tevens hopen we over de toekomst van deze nieuwe activiteit te discussieren.



# Overige activiteiten

De Nationale Wiskunde Dagen zijn in belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes bieden u de gelegenheid van gedachten te wisselen met collega's. Het Leeuwenhorst Congres Centrum biedt bovendien voldoende rustige hoekjes om u terug te trekken om samen met collega's over de wiskunde en het wiskundeonderwijs te praten.

## *Expositie*

In de gang richting B-vleugel en bij de Rotonde is een expositie ingericht.

U treft er foto's en objecten aan die verband houden met de thema's astronomie en weer, robotica, en architectuur. Diverse personen en instanties hebben hiervoor bereidwillig materiaal beschikbaar gesteld.

Verder exposeert de wiskundedocent (en deelnemer aan de NWD) Jan H. Tillman uit Utrecht met een aantal schalen en vazen.

## *Informatiemarkt*

Op de informatiemarkt in B2/4 kunt u stands vinden van organisaties, instellingen en instituten die zich op een of andere wijze met wiskunde of wiskundeonderwijs bezighouden.

U treft er stands aan van:

- Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
- Computer Algebra Nederland
- Educatieve Partners Nederland (met Getal en Ruimte)
- Uitgeverij Epsilon
- Freudenthal instituut
- Lekopro
- Uitgeverij NIB
- Nederlandse Onderwijs Televisie
- Open Universiteit
- Rotring (importeur Casio)
- SLO
- Texas Instruments
- Uitgeverij Thieme
- Vierkant
- Uitgeverij Visiria
- Vrouwen en Exacte Vakken
- Wiskunde A-lympiade

- Wolters groep Groningen
- Zometool.

De openingstijden van de informatiemarkt zijn:

vrijdag 10.00 - 11.00 uur

12.00 - 14.30 uur

15.15 - 18.00 uur

19.30 - 20.30 uur

zaterdag 8.30 - 11.15 uur

12.30 - 13.30 uur.

#### *Workshops van standhouders*

Tijdens de pauzes worden in B8 en B10 mini-workshops van ongeveer 20 minuten verzorgd door Texas Instruments en door CAN, respectievelijk over de grafische rekenmachine en over computeralgebra. De aanvangstijden van deze workshops zijn (onder voorbehoud):

vrijdag in de lunchpauze: om 12.10 uur en 13.10 uur;

vrijdag voor en na het diner: om 17.00 uur, 17.30 uur en 20.00 uur.

#### *Informatietechnologie*

Dit jaar voor het eerst is in de Leeuwenhorst standaard voor congresgangers een aantal Internet-computers beschikbaar. De computerruimte is te vinden bij de hoofdingang.

Aardige sites om eens te proberen zijn:

- de homepage van het Freudenthal instituut: [www.fi.ruu.nl](http://www.fi.ruu.nl)
- het digitale wiskundelokaal: [digischool.bart.nl/wi/wilok.htm](http://digischool.bart.nl/wi/wilok.htm)
- Amerikaanse Vereniging van Wiskundeleraren: [www.NCTM.org](http://www.NCTM.org)
- software evaluaties: [bve-scennet.dds.nl](http://bve-scennet.dds.nl)
- Java Applets voor meetkundeonderwijs:  
[loki.cs.brown.edu:8080/pages/Mocha.html](http://loki.cs.brown.edu:8080/pages/Mocha.html)
- spirograaf: [juniper.tc.cornell.edu:8000/spiro/spiro.html](http://juniper.tc.cornell.edu:8000/spiro/spiro.html)
- de site van Print wiskunde: [print.cps.nl](http://print.cps.nl) In de digitale versie van dit programmaboekje ([www.fi.ruu.nl/NWD](http://www.fi.ruu.nl/NWD)) kunt u verwijzingen vinden naar een aantal sprekers van de NWD en andere interessante adressen.

In zaal B31 staat een aantal computers opgesteld, waarop u tijdens de pauzes computerprogramma's voor wiskunde kunt bekijken en mee kunt werken.

#### *Videoprogramma*

Tijdens de pauzes zullen enkele video's getoond worden, waaronder enkele programma's die onlangs door Teleac in samenwerking met de Open Universiteit zijn uitgezonden. (Andrew Wiles en de laatste stelling van Fermat. In het kader van Escher.) Ook kunt u alvast kijken naar de serie *Wat en waar is wiskunde*, die in februari en maart door teleac/not wordt uitgezonden.

#### *Ramsj verkoop*

Het Freudenthal instituut houdt uitverkoop van een aantal oude publicaties, die vaak nog zeer lezenswaardig zijn. De prijs wordt vastgesteld op een vast bedrag per kilo. In de conferentiemap zal een lijst met titels worden opgenomen.

#### *Muziek*

De opvallende eigen sound en het hoge muzikale peil, vermengd met de jeugdig enthousiaste wijze waarop deze viermansformatie spetterende Boogie Woogie en verfrissende Rhythm & Blues vertolkt, maakt hun optreden tot een gedenkwaardige gebeurtenis. Daarbij is elk van de bandleden voortdurend op zoek naar de grenzen van zijn eigen specifieke talent en het publiek geniet volop mee als zij elkaar daarvoor ruimschoots de gelegenheid geven.

Hun succesvolle optredens tijdens diverse grote festivals als het populaire Amsterdams Bluesfestival in de Meervaart, het toonaanfevende Belgium Rhythm'n Blues Festival in Peer, het Drijf-In-Bluesfestival in Giethoorn, de Boogie Woogie Festivals in Rotterdam en Peer enzovoort, zijn daarvan maar enkele van de vele markante voorbeelden. Hier stonden zij met internationaal bekende bluesgrootheden als Van Morrison, Matt Guitar Murphy, Johnny Copeland, The Big Town Playboys en the Blues Brothers Band op één podium.

#### *Fun run*

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de fun run. We lopen weer het bekende rondje van (bijna) 6 km. De snelste tijd van vorig jaar was 22.11 en werd gelopen door Floor van Lamoen.

De start is stipt om 7.00 uur in de morgen.

Deelname is gratis en als beloning ligt er een prachtig T-shirt voor u bij de finish te wachten. Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte beker.

Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn.



# Nationale Wiskunde Dagen 1998

De vierde Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op **vrijdag 6 en zaterdag 7 februari 1998**. Bij het organiseren van deze vierde Nationale Wiskunde Dagen hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de Nationale Wiskunde Dagen van dit jaar. Omdat wij graag willen weten wat u van de Nationale Wiskunde Dagen vindt, ontvangt u bij binnenkomst een *evaluatieformulier*.

Wij hopen dat u uw opmerkingen gedurende de twee dagen wilt noteren en het formulier aan het eind wilt inleveren bij het secretariaat. Wij stellen uw mening zeer op prijs!