

# Nationale Wiskunde Dagen

## Nationale Wiskunde Dagen 2004

---

### *Voorwoord en welkom*

Ah, de eerste NWD! Dat waren tijden. Met de billen samengeknepen keken we iedere dag uit naar de postzak. Hoeveel aanmeldingen zouden er vandaag inzitten? Oeps! Slechts twee... Zou de eerste NWD eigenlijk wel door kunnen gaan? Mensen waren van tevoren wat sceptisch: wat een merkwaardig concept, en zo duur, en op een schooldag. We hoopten op 200 aanmeldingen. Tweehonderd! Was dat niet erg veel?

Rond 1 oktober moet het geweest zijn. Ik belde vanuit Amerika, nog steeds met de billen gespannen. Hoeveel? Het antwoord ervoer ik als een bevrijding: meer dan 200. DE NWD waren geboren. Tja, en dan nu de Tiende. De Leeuwenhorst is te krap. Er zijn ongelooflijk veel aanmeldingen, zo'n 700 deze keer. En we hadden ons nog zo voorgenomen niet meer dan 350 mensen toe te laten. Maar ja, als er zoveel mensen willen en de evaluatie steeds erg positief blijft, wat moet een mens dan? Nadenken dus. Hoe verder? Er zijn dit jaar veranderingen: slechts drie plenaire lezingen in plaats van vier. Dit maakt meer maatwerk mogelijk: in elk blok is een semi-plenaire lezing (voor maximaal 250 personen) en ruimte voor dubbele blokken van 90 minuten waarin *echte* workshops worden gehouden.

Is dit een vooruitgang? Het is aan u deze prangende vraag te beantwoorden. Hetzelfde geldt voor de verandering van zalen: de vertrouwde Rotonde kan onze plenaire sessies niet meer aan, vandaar het Atrium. Kan dat?

En hoe bevalt het om met zoveel collega's twee dagen onder één dak te vertoeven, en hoe om uit een groot aantal lezingen een keus te maken? Want meer docenten betekent ook meer presentaties. Kortom, de spanning doet toch weer een beetje aan 'toen' denken. Maar de tijden niet. 'Toen' had nog niemand van verdomming gehoord, van een wankelende positie voor wiskunde als zelfstandige discipline. We staan voor moeilijke tijden voor het wiskundeonderwijs. Oude wijsheden werken niet meer en nieuwe wijsheden liggen niet voor het oprapen. Behalve die van onze minister natuurlijk die vindt dat de docenten het wiskundeonderwijs dan maar aantrekkelijker moeten maken. En goedkoper. Zorgen genoeg dus.

Maar nu even niet. Twee dagen genieten van ons vak. Een heel aantrekkelijk vak. Voor de tiende keer een prachtprogramma. Met dank, veel dank aan alle deelnemers en sprekers die altijd weer belangeloos optreden. Dank ook aan alle mensen achter de schermen, dit jaar voor de laatste keer geïnspireerd en gedirigeerd door Heleen Verhage, die het na negen jaar NWD voor gezien houdt. Niet omdat het niet leuk meer zou zijn, maar omdat ze manager-beheerder wordt bij haar Freudenthal Instituut. Dank voor alles Heleen!

Prof.dr. Jan de Lange

# Plenaire lezingen

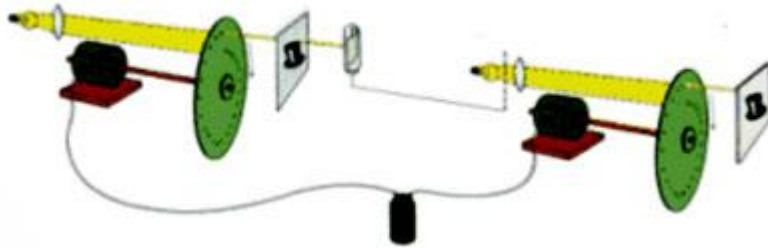
*Er staan drie plenaire lezingen op het programma. De voordrachten op vrijdagavond en zaterdagochtend zijn in het Engels. Alle plenaire lezingen vinden plaats in het Atrium.*

## Ontsnappen aan de Nipkow-doctrine: naar nieuwe typen beeldrepresentaties

Dr.ir. Kees van Overveld  
TU Eindhoven, Philips Research, Eindhoven

**vrijdag 11.15-12.00 uur**

Beelden bevatten informatie. Sinds de uitvinding van de elektrische beeldoverdracht door P.J.G. Nipkow in 1884, wordt die informatie in toenemende mate gecodeerd in de vorm van pixels. Het zal niet lang meer duren of zelfs foto's worden alleen nog digitaal verwerkt, verstuurd en opgeslagen. Op het eerste gezicht lijkt een representatie voor beelden die op pixels gebaseerd is de meest natuurlijke en eenvoudige. Toch kleven er veel nadelen aan pixels. Ze veroorzaken allerlei moiré-achtige beeldfouten. Belangrijker nog is dat ze heel weinig betekenis dragen, en daarom voor allerlei toepassingen te beperkt zijn.



*In deze voordracht wordt bekeken op welke andere betekenisniveaus beelden gerepresenteerd zouden kunnen worden. We geven argumenten voor een beschrijving van beelden in termen van zogenaamde dynamische segmenten, en we laten zien hoe door middel van zo'n representatie beelden onder meer schaalafhankelijk opgeslagen en bewerkt kunnen worden. We eindigen met een korte demonstratie van een computerprogramma om dynamische segmentaties te construeren, en we geven een vooruitblik op de soorten toepassingen die mogelijk zouden kunnen worden met dergelijke representaties.*

## Juggling: Theory and Practice

Colin Wright, Ph.D.  
Engeland

**vrijdag 20.30-21.15 uur**

Disguised as an entertaining description of juggling and the Site Swap notation, the presentation is really about science and mathematics, how they work, what they mean, and why they're important. The talk has been given in diverse locations throughout the world.



In 1985 there arose, simultaneously in three places around the world, by groups entirely unconnected and completely ignorant of each others' existence, a notation for juggling tricks. It is impossible to show in written form the infinite variety of juggling tricks that can be performed. Some have the arms moving sinuously past each other, somehow managing to toss, catch and carry three balls, never more than one per hand at a time, always moving over and past each other. Others have the hands largely stationary with the balls, rings, clubs, fire-torches or chainsaws spinning to various heights, seemingly none the same.

***There is always room for the performer's own interpretation of the basic moves, the underlying patterns. The Site Swap notation describes the trick that is the basis on which variations can then be built.***

***This presentation gives literally dozens of starting points for investigations, proofs, projects and understanding. More than that, it shows that mathematics isn't just arithmetic, and isn't only in the classroom. It emerges in the most unlikely places.***

[www.cix.co.uk/~solipsys/new/JugglingTalk.html](http://www.cix.co.uk/~solipsys/new/JugglingTalk.html)

## Should All Students Study a Significant Amount of Algebra?

Prof. Zalman Usiskin  
University of Chicago, USA

**zaterdag 11.45-12.30 uur**

***A person cannot read a newspaper, shop, engage in most games or sports, or work without dealing with numbers. So we never have to ask why all students should study arithmetic. But equations, functions, and expressions with variables are noticeably lacking from these everyday activities. Furthermore, many of the so-called 'real-world' algebra problems we give students can be solved using only arithmetic. So we are obliged to examine whether it is wise to require all students to learn a significant amount of algebra. Is it only 'mathematical patriotism' that causes us to support teaching all students algebra, or are there significant reasons to learn the subject? Does the existence of computer algebra systems help or hurt the case for teaching algebra to all students?***

***Zalman Usiskin is a professor of education at the University of Chicago. For the past 16 years he has also been overall director of the University of Chicago School Mathematics Project, a project begun in 1983 to improve mathematics education in all grades K-12. Over the past two decades it has been the largest university-based project in the United States. He is interested in all aspects of mathematics education, with particular emphasis on matters related to curriculum, instruction, and testing; teacher education; international mathematics education; the history of mathematics education; and educational policy.***

# Overzicht van semi-plenaire lezingen

Naast de drie hoofdlezingen is er dit jaar in elk parallel blok een semi-plenaire lezing. Deze lezingen worden gehouden in het Auditorium. De semi-plenaire lezingen zijn gekoppeld aan de NWD thema's van dit jaar. De uitgebreide samenvattingen van deze lezingen staan bij de beschrijvingen van de thema's. Om uw keuze voor een semi-plenaire lezing te vergemakkelijken, hieronder een korte aanduiding van de onderwerpen.

## **Blok 1 - Prof. dr. Paul Ernest: Images of mathematics**

### **Thema Wiskunde en didactiek**

Welke beelden bestaan er van de wiskunde? Het beeld van wiskunde dat leerlingen en leraren hebben van wiskunde zegt iets over hun houding ten opzichte van wiskunde en over hun opvattingen over het leren ervan.

Doelgroep: deelnemers die graag filosoferen over wiskundeonderwijs.

## **Blok 2 - Prof. dr. Johan van de Sanden: Naar meer samenhang tussen beroepsgerichte en algemeen vormende vakken in het vmbo**

### **Thema Wiskunde en vmbo**

De manier waarop de avo-vakken worden aangeboden in het vmbo staat haaks op de interesses en de belevingswereld van de vmbo leerlingen. Herontwerpen van dit onderwijs is daarom hard nodig.

Doelgroep: deelnemers die geïnteresseerd zijn in de actuele vmbo-ontwikkelingen.

## **Blok 3 - Prof. dr. Gerard Sierksma: De digitale coach**

### **Thema Optimale wiskunde**

Hoe ontwerp je het ideale voetbalteam en bepaal je de toegevoegde waarde van elke speler aan het team? Het computersysteem C&Sass kan hierbij helpen.

Doelgroep: deelnemers die van mooie toepassingen van de wiskunde houden.

## **Blok 4 - Prof. dr. Hendrik Lenstra: Reken mee met ABC**

### **Thema Wiskunde om de wiskunde: getaltheorie**

In deze lezing staat het abc-vermoeden centraal, zeg maar de nieuwe Heilige Graal van de getaltheorie, nu de laatste stelling van Fermat bewezen is.

Doelgroep: deelnemers die graag een goed verhaal horen over pure wiskunde.

## **Blok 5 - Dr. Bart de Smit: Escher en het Droste-effect**

### **Thema The best of...**

De wiskundige structuur achter de litho 'Prentententoonstelling' is blootgelegd en het gat in het midden is opgevuld. Duik het gat in

Doelgroep: liefhebbers van Escher die dit verhaal vorig jaar gemist hebben.

# Wiskunde om de wiskunde: getaltheorie

Heel simpel gezegd is getaltheorie de wiskunde van de gehele getallen: 1, 2, 3, 4, 5, ... Ondanks deze eenvoud blijken zich tussen deze getallen verrassende relaties af te spelen. Fascinerend aan de getaltheorie is dat er vragen over getallen zijn die weliswaar voor iedereen begrijpelijk, maar nog door niemand opgelost zijn.

Recentelijk is een aantal van die lastige problemen gekraakt. Zo werd vorig jaar de oplossing van het probleem van Catalan uit 1844 en van een polynomiale priemtest gevonden.

Voor velen blijft de getaltheorie bestaan als een gebied waarin men vele uurtjes in verwondering kan vertoeven.

## Kettingbreuken

Prof.dr. Frits Beukers  
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

vrijdag 13.45-14.30 uur

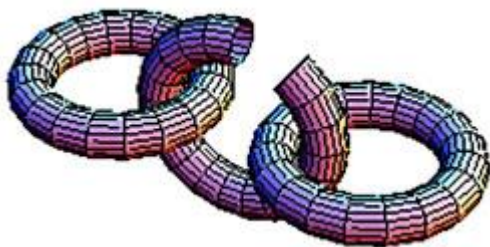
Behalve door decimale ontwikkelingen kunnen we reële getallen ook voorstellen door middel van zogenaamde 'kettingbreuken'. Hier is een voorbeeld:

$$\sqrt{53} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10 + \dots}}}}}}}}$$

Dat wil zeggen dat de rij partiële breuken

$$5, \quad 5 + \frac{1}{1} = 6, \quad 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{3}, \quad 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{23}{4}, \quad 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10}}}} = \frac{247}{43}, \dots$$

naar het getal  $\sqrt{53}$  convergeert. De snelheid waarmee dit gebeurt is enorm groot. Het verschil bijvoorbeeld tussen  $\sqrt{53}$  en  $\frac{247}{43}$  is al  $-0,0054\dots$  Er zijn nog meer opmerkelijke zaken. De rij getallen 5, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 10, ... noemen we de 'wijzergetallen' van de kettingbreuk. Het lijkt erop dat het blok 1, 2, 1, 10 zich periodiek herhaalt en dat is inderdaad het geval. Verder is het blokje 1, 2, 1 tussen elk tweetal tien een palindroom. En tenslotte,  $23^2 - 33 \cdot 4^2 = 1$ . We hebben dus een oplossing voor de vergelijking  $x^2 - 33y^2 = 1$  in gehele  $x, y$ . Dit soort fenomenen zien we niet alleen bij  $\sqrt{53}$ , maar ook bij kettingbreuken van ieder getal van de vorm  $\sqrt{d}$ , waarin  $d$  een positief geheel getal is, niet gelijk aan een kwadraat. In deze voordracht zullen we proberen deze verschijnselen te verklaren met gebruikmaking van een minimum aan formules.



Uiteraard is het streven dat het ook voor een geïnteresseerde vwo'er te volgen zal zijn. Het is natuurlijk heel leuk om zelf met kettingbreuken te experimenteren en we zullen aangeven hoe men hiervoor het programma Derive kan inzetten.

## Muntje werpen over internet

Wieb Bosma  
Faculteit NWI, Katholieke Universiteit Nijmegen

vrijdag 14.45-15.30 uur

Tante Truus is overleden, en heeft een hondje nagelaten aan haar favoriete neefje Bob en zijn vrouw Alice - niet wetende dat dit paar al enige tijd uit elkaar is. Een ontmoeting om te bepalen wie de zorg voor de akelige keffer krijgt zit er niet meer in, e-mail correspondentie is nog net haalbaar. Hoe worden Alice en Bob het eens over de uitkomst van (de simulatie van) een worp met een eerlijke munt per e-mail?

In deze voordracht gaat het over methoden om dat probleem op te lossen 'muntje werpen over internet', zeg maar. Zo'n methode bestaat, en maakt gebruik van kwadratische en niet-kwadratische resten modulo een priemgetal (eigenlijk twee verschillende priemgetallen).

Om te laten zien dat de methode eerlijk is gebruik je een bewijs van Gauss dat aantoonst dat er evenveel resten van beide typen zijn, en om efficiënt te laten zien van welk type een gegeven rest is, gebruik je zijn fameuze reciprociteitswet. Er spelen ook andere algoritmische vragen een rol: hoe bepaal je een wortel van een kwadratische rest, en hoe weet je dat niet een van beide partijen zich gemakkelijk aan de zorg van het mormel kan onttrekken?

Ook al vormt dit 'protocol' een heel andere toepassing van elementaire algoritmische getaltheorie dan de gebruikelijke cryptosystemen, ook hier blijkt de veiligheid uiteindelijk afhankelijk van de veronderstelde moeilijkheid van het ontbinden van producten van grote priemgetallen. De moraal: ook voor het welzijn van dieren is het gewenst dat toekomstige Alicen en Bobs gesterkt door wiskundige kennis hun lot leren accepteren.

## Diophantische vergelijkingen vanuit de verte bekeken

Dr. Gunther Cornelissen  
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

vrijdag 16.15-17.15 uur (60 minuten)

De Arithmetica van Diophantus bevat een lange lijst polynoomvergelijkingen waarvan een 'rationale' oplossing in breuken wordt gezocht. Er wordt bijvoorbeeld in Lemma VI.1.2 beweerd dat als  $A + C$  een kwadraat is,  $Ax^2 + C = y^2$  oneindig veel zulke oplossingen heeft. Ons referentiekader voor dit soort problemen is vele eeuwen later heel anders: we weten dat we de reële oplossingen van zo een vergelijking in twee veranderlijken kunnen tekenen in het vlak (bovenstaande vergelijking geeft een hyperbool), de ruimte voor drie veranderlijken, enzovoort. Als we daarop dan alle rationale oplossingen inkleuren, kunnen we vragen beginnen te stellen die voor Diophantus onmogelijk te bedenken waren:

- 1. Hoe ziet die verzameling rationale punten eruit 'vanuit de verte bekeken'? Is ze daar nog te onderscheiden van het reële plaatje? (Dit blijkt voor bovenstaande vergelijking niet het geval te zijn).**
- 2. Hoe ingewikkeld kan de projectie van die verzameling punten op één van de assen zijn? Zijn zulke projecties zelf weer de rationale oplossingen van een polynoomvergelijking? We kunnen inmiddels mooie kleurenillustraties van deze verzamelingen maken met behulp van een computer en op basis daarvan zijn in de laatste jaren vermoedelijke antwoorden opgesteld. Of die kloppen heeft weer alles te maken met een vraag uit de wiskundige logica: is er een computerprogramma dat kan beslissen of een vergelijking überhaupt een oplossing heeft? Je kan trouwens dezelfde vragen stellen voor de verzameling gehele oplossingen.**
- 3.**

**Dan is er (sinds de jaren 1970) meer bekend. Zo is er een polynoomvergelijking in 26 veranderlijken zodat de projectie van de positieve gehele oplossingen op de eerste coördinaatas... precies de verzameling van alle priemgetallen oplevert!**



In lichte kleur de reële oplossingen, in donkere kleur de rationale oplossingen van

$$(y^2 - x^3 - x)(y^2 - x^3 - 2x) \dots (y^2 - x^3 - 20x) = 0 \text{ voor } 0 < x < 4.$$

## Reken mee met ABC

semi-plenair

Prof.dr. Hendrik Lenstra  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

**zaterdag 9.00-9.45 uur**

De laatste stelling van Fermat heeft lange tijd gegolden als de Heilige Graal die alle getaltheoretici te pakken wilden krijgen. Het is Andrew Wiles gelukt, en nu is er behoefte aan een nieuwe Graal. Een aantrekkelijke kandidaat is het zogenaamd 'abc-vermoeden', dat Joseph Oesterlé en David Masser in 1985 formuleerden. Centraal in dit vermoeden staat de vergelijking  $a + b = c$ . *Op het eerste gezicht ziet die vergelijking er niet zo belangwekkend uit, maar toch heeft het vermoeden te maken met vele mooie dingen die men in de getaltheorie tegenkomt: met Pythagoreïsche drietallen, met de vergelijking van Pell, met het onlangs bewezen vermoeden van Catalan, en ook met de laatste stelling van Fermat.*

Het wereldrecord
$a = 2$
$b = 6436341 = 3^{10} \cdot 109$
$c = 6436343 = 23^7$
$f = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 109 = 15042$
$q = 1,629912$
(Eric Reyssat, 1987)

*Van het 'abc-vermoeden' begrijpt men echter veel minder dan van de vier genoemde onderwerpen. Het is dan ook verbazend dat iedereen die kan optellen, vermenigvuldigen en weet wat priemgetallen zijn, een bijdrage kan leveren aan de studie van het vermoeden. Hoe dit in zijn werk gaat, zal in de voordracht worden voorgedaan. Meer informatie over het onderwerp is te vinden op de website: [www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html](http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html)*

## Mijn favoriete rekenmachine is gratis

Prof.dr. Bas Edixhoven  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Ook al ben ik professioneel wiskundige, en zelfs professor, toch heb ik al sinds minstens tien jaar geen rekenmachine meer in mijn bezit. Dat betekent niet dat ik nooit reken, integendeel, dat doe ik vaak. Maar dan doe ik het òf uit mijn hoofd, òf, als het wat moeilijker wordt, op een computer, dat wil zeggen op mijn palm pilot of op mijn laptop.

Mijn favoriete rekenprogramma voor de computer heet PARI/GP. Dit programma, dat werkt onder de meeste operating systems, zoals Unix, Linux, MacOS en Windows, is gratis te downloaden vanaf de volgende site: <http://pari.math.u-bordeaux.fr>



Het programma is niet alleen gratis, maar ook nog eens open source, wat betekent dat de gebruiker toegang heeft tot de broncode ervan, in de programmeertaal C. Preciezer: PARI/GP wordt geleverd onder de 'GPL: GNU General Public License'. Tijdens de voordracht zal ik een presentatie geven van dit programma.

Vanwege de recente belangstelling voor symbolisch rekenen, zal ik ook een demonstratie geven van mijn favoriete symbolische rekenmachine die, u raadt het al, ook gratis is en onder de GPL geleverd wordt. De naam is maxima, en de site is: <http://maxima.sourceforge.net>

Tenslotte, als tijd en techniek het toelaten, zal ik ook wat laten zien van de Web Interactive Mathematics Server (WIMS), waar men interactief sommen kan maken. Ook hier is alles gratis. De site is: <http://wims.unice.fr>

# Wiskunde: denken door doen

In dit thema gaan de deelnemers aan het werk met concrete voorbeelden waarbij wiskunde spelenderwijs naar boven komt.

Zo brengt het inpakken van ruimtelijke objecten ons op verrassende wijze bij convexe omhulsels. Het inpakken van blokken in een kubus levert fraaie algebra en redeneringen op. Een parabool ontstaat door rechte lijnen te tekenen of te vouwen, maar ook door een knikker over een hellend vlak te laten rollen. Veelhoeken vouwen nodigt uit tot redeneren. Kartonnetjes helpen bij kwadraat afsplitsen. Uit Schotland laten we enkele investigations zien waaruit na wat gepruts met materialen leuke wiskundige problemen ontstaan die vragen om een oplossing.

We doen wedstrijdje uit Hongarije die, hoe kan het ook anders in een land dat wiskundig zo hoog aangeschreven staat, getaltheoretische achtergronden hebben. Iedereen heeft wel eens het spel Yahtzee gespeeld, maar wist u dat iemand het geheim ervan wiskundig heeft uitgezocht? We laten het zien.

We denken dat het 'handwerk' op velerlei manieren ingezet kan worden in de klas.

## Handen uit de mouwen we gaan wiskunde vouwen

Josephine Buskes, Kandinsky College, Nijmegen en  
Ynske Schuringa-Schogt, Paasloo

**vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten, maximaal 25 deelnemers)**

**herhaling: zaterdag 9.15-11.00 uur**

U hebt vast wel eens voor bommetje gespeeld in het zwembad. Maar hebt u wel eens eigenhandig een waterbommetje gemaakt? En wat heeft dat te maken met de Platonische veelvlakken? Voel je kunstenaar als je gaat vouwen met de cirkelschijf. Kan dat een regelmatig achthoek opleveren? Een regelmatig twintigvlak? Wanneer je je vouwsel ontvouwt zie je een intrigerend patroon van lijnen. Is dat nu een regelmatige achthoek? Bewijs het maar.

Een parabool kun je vouwen. Maar parabolen ontstaan ook door rollende knikers. Stuiterende ballen en kleien brengen ons bij meetkundige rijen!

Doen is ons uitgangspunt. Denken door doen geldt dan ook voor elke deelnemer aan deze werkgroep, van de zij-instromer met wat minder wiskundige bagage tot de ervaren vwo-studiehuisdocent.

U gaat vouwen in 2D en in 3D; de vouwsels in 2D zijn ideaal voor vlakvullingen. Vervolgens denken we na over wat we gevouwen hebben en leveren we enkele bewijzen.

Daarnaast doet u kleine onderzoekjes, naar Schots model, die goed gebruikt kunnen worden als voorafje, ter illustratie, ter motivatie of ter ondersteuning bij kwadraatafsplitsen, parabolen en meetkundige rijen.

## Optimaal Yahtzee spelen

Dr.ir. Tom Verhoeff  
Faculteit Wiskunde en Informatica, TU Eindhoven

**vrijdag 14.45-15.30 uur**

Yahtzee is een populair familiespel met vijf dobbelstenen. Spelers vergaren om de beurt dobbelpatronen en noteren hiervoor punten op een scorekaart. De speler met de hoogste eindscore wint. Solitaire Yahtzee speel je alleen, met als doel je score te maximaliseren. Tijdens het spel zijn er een aantal keuzemomenten. Menselijke spelers twijfelen vaak bij hun keuzes, omdat de afwegingen gecompliceerd zijn. Met eenvoudige kansrekening op grafen en een snelle computer kun je aan het spel rekenen.

In de voordracht leg ik kort de spelregels van Yahtzee uit. Vervolgens sta ik stil bij criteria voor optimaal spelen en hoe je optimale spelstrategieën kan bepalen. Ik stip ook even de praktische rekenproblemen aan vanwege de grote toestandsruimte. Tenslotte geef ik wat concrete resultaten met betrekking tot een optimale strategie voor Solitaire Yahtzee.

Een optimale speler voor Solitaire Yahtzee en een vaardigheidstest zijn beschikbaar op het web: [www.win.tue.nl/~wstomv/misc/yahtzee](http://www.win.tue.nl/~wstomv/misc/yahtzee). Daar kan ook een PC-programma worden opgehaald.

## Tweemaal inpakken

Dr. Leon van den Broek  
RSG Pantarijn, Wageningen en Faculteit Wiskunde, Universiteit Nijmegen

**vrijdag 16.15-17.00 uur (maximaal 40 deelnemers)**

Een voorwerp inpakken is een pakje maken waarin dat voorwerp zit. Het in te pakken voorwerp bepaalt de vorm die het pakje gaat krijgen. Voorwerpen pakken in iets is die voorwerpen in dat iets (het pak) stoppen. Het pak bepaalt wat er in kan.

### *Inpakken*

Als de caissière je aankoop inpakt, maakt het niet zo veel uit of het pakpapier er strak omheen komt te zitten. Maar in de wiskunde is het pas interessant als het papier perfect om het voorwerp past. We gaan allerlei voorwerpen (wiskundige vormen) in gedachten inpakken. Hoe zal het pakje eruit gaan zien? Vooral als het voorwerp gebogen randen heeft, krijgen we verrassende resultaten. Zie ook het novembernummer van Pythagoras (2003).



### *Pakken in*

Verhuizers weten uit ervaring goed hoe ze dozen in een vrachtwagen moeten stapelen om de ruimte goed te benutten. Een doos meer of minder maakt trouwens niet zo veel uit. Maar in de wiskunde maken we ons daar wel druk om.

Vier rechthoeken van  $a$  bij  $b$  kun je pakken in een vierkant van  $a + b$  bij  $a + b$ . Dit leidt tot de interessante ongelijkheid  $4ab \leq (a + b)^2$ . Hetzelfde gaan we in de ruimte proberen. Hoeveel blokken van  $a$  bij  $b$  bij  $c$  kun je pakken in een kubus van  $a + b + c$  bij  $a + b + c$  bij  $a + b + c$ ?

Deze puzzel staat bekend als de Hoffman-puzzel. Hij leidt tot interessante redeneringen.

Zie ook: [www.puzzles.force9.co.uk/gall5/hoffman.htm](http://www.puzzles.force9.co.uk/gall5/hoffman.htm)



## Strategische puzzels uit Hongarije

Jeanne Breeman, Zwolle en  
Berend Wielens, Mill-Hillcollege, Goirle

**zaterdag 9.15-11.00 uur (90 minuten, maximaal 32 deelnemers)**

Schoolwiskunde nodigt niet altijd uit tot denkexperimenten. Vaak komen we niet veel verder dan reproduceren en toepassen van geleerde kennis en vaardigheden, hooguit binnen een andere context.

Hoe zet je leerlingen echt aan tot nadenken? Hoe leer je ze niet tevreden te zijn met zomaar een oplossing, maar pas met de beste oplossing? Hoe leer je ze een optimale, dus winnende, strategie te ontwikkelen?

De rijke Hongaarse geschiedenis van wiskundekampen en wiskundewedstrijden heeft een schat aan strategische puzzels opgeleverd, die een antwoord zouden kunnen geven op deze vragen. De inleiders hebben tijdens twee Plato-reizen naar Budapest kennis gemaakt met de puzzels van Lajos Posa. Deze zijn uitdagend, uitermate bruikbaar in de klas, ideaal voor groepswork en er is geen specifieke voorkennis nodig.

In deze workshop worden de deelnemers zelf aan het werk gezet met weegschalen, vreemde ganzenborden, deelbaarheid, duikboten en vallende eieren.



# Optimale wiskunde

Goedkoper, beter, kleiner, sneller, zuiniger! Mens en maatschappij streven naar superlatieven en de wiskunde helpt daarbij. Wiskunde ondersteunt het kwantificeren van eigenschappen en biedt methoden om tussen zeer veel alternatieven een betere of de beste te vinden. Wiskundige technieken om te optimaliseren zijn nog steeds in ontwikkeling en dat is nodig, want de problemen uit de praktijk worden steeds groter, complexer en soms onoplosbaar.

In het thema 'optimale wiskunde' belichten we een aantal aspecten van wiskundige optimalisering. Naast verschillende technieken komen er belangrijke toepassingen aan de orde, soms uit een onverwachte hoek, zoals de sport. Optimalisering kan ook helpen bij het oplossen van meetkundige problemen, zoals: Kun je zeven potloden zodanig vasthouden dat elk tweetal elkaar raakt?

## Beslissen met wiskunde

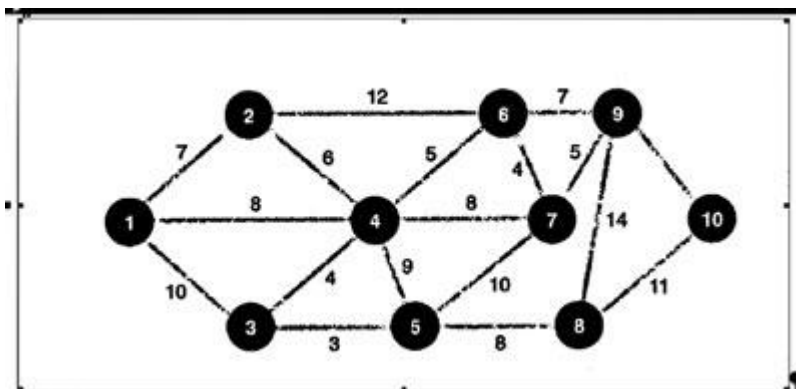
Prof.dr.ir. Dick den Hertog  
Faculteit Economische Wetenschappen, Universiteit van Tilburg

vrijdag 13.45-14.30 uur

Met name sinds de Tweede Wereldoorlog wordt wiskunde in het bedrijfsleven veelvuldig gebruikt om beslissingen te onderbouwen en te optimaliseren. Het vakgebied dat zich hiermee bezig houdt, heet Operations Research (OR). In deze voordracht laten we u kennismaken met dit vakgebied. Ik wil u ook laten zien dat OR bij uitstek geschikt is om middelbare scholieren enerzijds het praktisch nut van wiskunde te laten zien, en anderzijds te demonstreren hoe fascinerend theoretisch wiskundig onderzoek kan zijn.

In mijn voordracht wil ik eerst laten zien dat OR in alle geledingen van onze maatschappij gebruikt wordt. Veel beslissingsproblemen in bijvoorbeeld de logistiek, vervoer, productie, landbouw en de financiële sector, worden tegenwoordig met OR aangepakt. Enkele concrete voorbeelden van dergelijke beslissingsproblemen:

- **Wat is de kortste route om alle brievenbussen in een stadsdeel te legen?**
- **Wat is de optimale samenstelling van vluchtschema's voor vliegtuigen, rekening houdend met bijvoorbeeld de eisen van luchthavens en eisen ten aanzien van onderhoudsbeurten?**
- **Wat is een optimaal rooster voor de bemanning van treinen?**
- **Hoe kan een raffinaderij de juiste producten in de gevraagde hoeveelheden maken tegen zo laag mogelijke kosten?**
- **Wat is de optimale geometrie voor een beeldbuis, zodanig dat de beeldbuis sterk genoeg blijft maar het gewicht zo laag mogelijk is?**



Vervolgens laat ik aan de hand van drie concrete problemen zien hoe de OR beslissingsproblemen oplost. Ik zal een voorraad-, productie- en kortste pad probleem behandelen. Naast het toepassen van de OR wordt er ook veel onderzoek gedaan naar nieuwe modellen en technieken. Ik wil aan de hand van het lineair programmeringsprobleem laten zien hoe fascinerend dit onderzoek is.

## Toepassingen van optimalisatie in de economie

Dr. Jan Brinkhuis  
Econometrisch Instituut, Erasmus Universiteit Rotterdam

**vrijdag 14.45-15.30 uur**

Eenvoudige optimalisatiemodellen en -methoden geven vaak een verfrissende kijk op allerlei problemen met een economisch of econometrisch karakter. Dit wordt aan de hand van de volgende voorbeelden geïllustreerd:

- 1. *Waarom is een vliegtuigticket met een overnachting op zaterdag of zondag veel goedkoper en hoe berekent een vliegtuigmaatschappij de korting?***
- 2. *Waarom trekken politieke partijen naar het midden toe?***
- 3. *Twee bedrijven concurreren. Eén maximaliseert winst, de ander houdt ook rekening met de omzet. Wie wint?***
- 4. *Hoe kunnen vervoersstromen geschat worden als alleen totale export en import per land bekend zijn?***

## De digitale coach

**semi-plenair**

Prof.dr. Gerard Sierksma  
Faculteit der Economische Wetenschappen, Rijksuniversiteit Groningen

**vrijdag 16.15-17.00 uur**

Eén van de problemen in de sport, en in het algemeen bij human resource management, is het vinden en aantrekken van nieuwe teamleden. Goed teamwerk is onontbeerlijk voor het bereiken en behouden van een toppositie. Om te beoordelen of iedereen zich in de juiste positie bevindt en of de kwaliteiten van een potentiële nieuwe speler optimaal aansluiten bij de gevraagde kwaliteiten, competenties en functionele eisen, gaat men meestal af op intuïtie en gezond verstand.

Met het systeem Coach & Scout Assistant (C&Sass) is het mogelijk om het ideale team te ontwerpen en de toegevoegde waarde van elke speler in het bestaande team en van eventuele nieuwe spelers te bepalen. C&Sass is getest en gebruikt in het voetbal, veldhockey, volleybal, roeien en bij tienkampatleten.

De presentatie sluit af met een demonstratie van C&Sass. We laten een schematisch voetbalspel met een fictieve spelersopstelling zien. Wanneer een speler wordt verplaatst (met de muis) naar een andere positie, dan laat het systeem zien wat dit voor het team betekent. Bij de toevoeging van een nieuwe speler aan het team laat het systeem zien wat zijn positie is, evenals andere veranderingen in de teamopstelling. Op die manier kan de ideale plaats van elke speler in het team voor een maximaal resultaat worden bepaald. Voor elk van de elf posities maakt C&Sass grafieken die de ontwikkeling van de spelers laten zien.

Zie ook: [www.teamsupportsystems.co](http://www.teamsupportsystems.co) en [www.coachandscoutassistant.com](http://www.coachandscoutassistant.com)

## Optimale meetkunde

Dr. Hans Melissen  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, TU Delft

**zaterdag 9.00-9.45 uur**

Iedereen kent wel de mooie vorm van een voetbal, die is opgebouwd uit 12 gelijkzijdige vijfhoeken en 20 gelijkzijdige zeshoeken. In 1993 kregen twee Nederlanders patent op een voetbal die 'ronder' zou zijn dan de standaardvoetbal. De patentrechten zijn overgenomen door Nike die de bal produceert en hij schijnt door sommige voetballers inderdaad geprefereerd te worden boven de gebruikelijke. Maar wat valt er nu eigenlijk nog te verbeteren aan een voetbal?

Zo zijn er veel meetkundeproblemen waarin een optimale situatie wordt nagestreefd. Zeer bekend is het probleempje waarbij je uit de hoeken van een vierkant stuk papier vier vierkantjes knipt en er een bakje van vouwt. Wanneer is het volume van dit bakje maximaal? Dit is eenvoudig uit te rekenen. Maar wat nu als je geen vierkantjes wegnipt, maar een andere vorm, kan het dan nog beter? Hoeveel potloden kun je tegen elkaar houden zodanig dat elk paar elkaar raakt? Zijn dat er 6, 7 of misschien 8? Dit is nog een onopgelost probleem, maar er valt wel iets meer over te zeggen. Hoe kun je een vierkant stuk grond in vieren verdelen en daarbij zo weinig mogelijk hekwerk gebruiken? Hoeveel korter wordt een stuk touw als je er een knoop in legt? Hoe dik zijn bomen in een bos als je niet meer door het bos heen kunt kijken? Hoe groot kan een bankstel zijn dat je nog door een gang met een hoek kunt manoeuvreren? Wat is de kortste kromme die vanuit elke richting even goed zichtbaar is? Op dit soort vragen zal tijdens deze lezing worden ingegaan.



# Wiskunde en rekenwerk: het jaarthema van Pythagoras

De wijze waarop rekenwerk wordt uitgevoerd, is de afgelopen vijftig jaar enorm veranderd. Werden vijftig jaar geleden tabellen nog met de hand en eenvoudige rekenmachines berekend, nu zijn we bijna zover dat het nalopen van bewijzen wordt uitbesteed aan de computer. Een ander onderwerp dat aandacht krijgt binnen dit thema is breukrekenen in het basisonderwijs. Hoe leren kinderen dat tegenwoordig en wat is er zo moeilijk aan? Ook het hoofdrekenen wordt onder de loep genomen, maar dan vanuit het perspectief van de vedsische wiskunde.

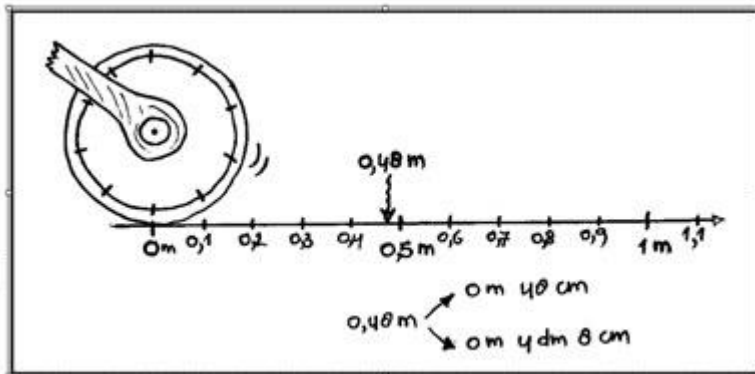
Dit thema sluit aan bij het jaarthema van de jaargang 2003-2004 van het wiskundetijdschrift Pythagoras.

## Van rekenen naar redeneren met kommagetallen

Kees Buijs  
SLO, Enschede

**vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten)**

Van oudsher vormt het domein van de kommagetallen (of decimale breuken) een belangrijk leerstofgebied in de hoogste leerjaren van het basisonderwijs. Het accent lag daarbij tot voor kort op het inoefenen van rekenregels voor de vier hoofdbewerkingen: het cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met kommagetallen.



Sinds enige tijd doen zich echter ingrijpende veranderingen in het leerplan voor. De nadruk komt meer en meer te liggen op een goed begrip van kommagetallen, op het betekenis kunnen geven, het op de getallenlijn leren plaatsen en het vergelijken en ordenen van kommagetallen (wat is meer: 0,8 of 0,48?). Verder speelt bij het leren opereren met kommagetallen de rekenmachine in toenemende mate een rol. De aandacht

verschuift daarmee steeds meer van leren rekenen naar leren redeneren met kommagetallen. In deze werkgroep wordt een beeld geschetst van de leerlijn rond kommagetallen zoals die in de meest recente reken-wiskundemethoden voor het basisonderwijs te vinden is. Bepaalde elementen uit deze leerlijn worden nader onder de loep genomen en ter discussie gesteld. Vervolgens richt de aandacht zich op het voortgezet onderwijs. Er wordt een analyse gemaakt van enkele voorbeeldopgaven met betrekking tot kommagetallen uit klas 1 en 2. Besproken wordt welke vaardigheden en inzichten daarbij van de leerlingen zoal gevraagd worden en wat, meer in het algemeen, de betekenis van kommagetallen als leerstofgebied in het voortgezet onderwijs is. Tenslotte buigen we ons over de problematiek rond de overgang van basis- naar voortgezet onderwijs. In hoeverre mogen we verwachten dat deze overgang voor veel leerlingen soepel zal verlopen? Welke problemen kunnen zich voordoen? En wat valt daaraan te doen?

## Bewijzen in de computer

Dr. Freek Wiedijk  
Faculteit Natuurwetenschappen, W&I, Katholieke Universiteit Nijmegen



vrijdag 16.15-17.00 uur

Het is een eeuwenoude droom om de hele wiskunde expliciet uit een handvol axioma's af te leiden. Dit probeerden bijvoorbeeld Whitehead en Russell in hun Principia Mathematica. Maar het bleek altijd weer een onrealistische onderneming. Er zijn gewoon veel te veel details. Zo kost het in de Principia Mathematica honderden pagina's om  $1 + 1 = 2$  af te leiden, en veel verder dan dat komt het dan ook niet. Maar met de komst van de computer is dit eindelijk veranderd! Nu maakt de computer het wel mogelijk om echt verder te komen dan  $1 + 1 = 2$ . De computer kan namelijk alles netjes bijhouden en zelfs simpele details zelf invullen. En er bestaan nu systemen met wiskundige bibliotheken waarin niet-triviale wiskundige stellingen in volledig detail uit de axioma's van het systeem worden afgeleid.

**Proof 6.41 Solution**

- Happy(a) ↔ ¬Happy(b) ✓ Given
- ∀x ((Tet(x) ∧ Large(x)) → (Happy(x) ↔ ¬Happy(b))) ✓ Given
- ∀x (Cube(x) → (Happy(x) ↔ ¬Happy(d))) ✓ Given
- LeftOf(a, d) ✓ Given
- ¬Cube(c) ∧ c ≠ d ∧ c ≠ a ✓ Given
- ∀x (x = a ∨ x = b ∨ x = c ∨ x = d) ✓ Given
- ¬Cube(d) ✓ Log Con
- LeftOf(a, d) → ¬Cube(a) ✓ Observe
- ¬Cube(a) ✓ Taut Con

**Goals:** ? Is the following sentence a consequence of the given information?  
¬Happy(d)  
Help

Wiskunde gaat over berekenen en bewijzen. Bij berekenen gaat het om het wat, om het antwoord, en bij bewijzen gaat het om het waarom, om het begrip. Tegenwoordig lijkt het er soms op dat bewijzen een uitstervend ambacht is, maar in de informatica zijn ze helemaal niet uitgestorven, de bewijzen. Integendeel! Daar worden ze gebruikt om te laten zien dat chips of

computerprogramma's foutloos zijn. Om deze 'informaticabewijzen' te controleren zijn er een aantal systemen gebouwd, en die worden ook gebruikt om wiskunde mee te doen. Een wiskundig bewijs zó opschrijven dat de computer het kan nalopen, combineert het beste van twee werelden: programmeren en wiskunde. Het is als het schrijven van een computerprogramma, maar je weet zeker dat er geen 'bugs' in zitten. En het gaat over wiskunde, maar je hoeft je niet af te vragen of je het wel echt begrepen hebt, want de computer houdt je eerlijk. Een bewijs in de computer coderen is als het spelen van een geweldig computerspel: als de stelling helemaal is bewezen voelt het alsof je een level hebt uitgespeeld. Het is als het doen van hele mooie, hele ingewikkelde puzzels. En het gaat dan nog ergens over ook! (Het plaatje toont Hyperproof, een programma voor het onderwijs, om studenten wiskundige logica mee te leren.)

## Vedic Mathematics: a Unified System

Kenneth Williams  
Mathematics teacher, Carmel College, St. Helens, Engeland

**zaterdag 9.00-9.45 uur (lezing in het Engels)**

चलनकलनाभ्याम्

Vedic Mathematics is the name given to the ancient system of mathematics that was rediscovered from ancient Indian texts (the Vedas) at the beginning of the 20th century, and according to which all of mathematics is based on sixteen Sutras, or word-formulae.

Perhaps the most striking feature of the Vedic system is its coherence and unity, which make it easy to understand and easy to apply. Its beautiful simplicity means that calculations can be carried out mentally (though the methods can also be written down). There are many advantages in using a flexible, mental system: pupils can invent their own methods, they are not limited to the one 'correct' method. This leads to more creative, interested and intelligent pupils. The system is gaining popularity around the world and is taught in some schools with great success.

Although the maths in this talk is mainly at the 8-14 year-old level, some more advanced applications will be illustrated. This introductory talk will give an overview of the system and participants will be given the opportunity to practice the Vedic techniques.

### literatuur en bronnen

Recommended books, details available at [www.vedicmaths.com](http://www.vedicmaths.com)

*The Cosmic Calculator course*, by Kenneth Williams & Mark Gaskell.

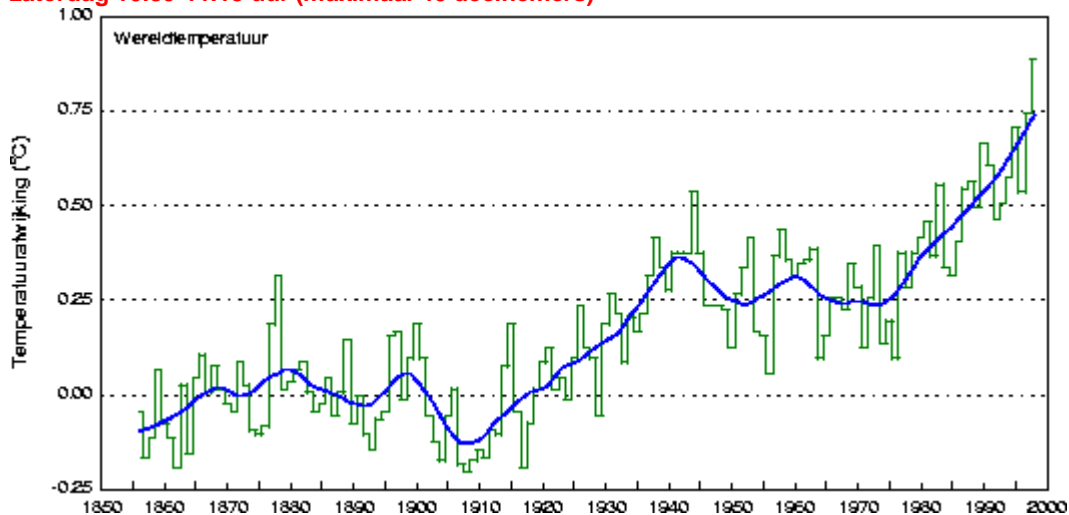
*Vedic Mathematics Teacher's Manuals, Elementary, Intermediate and Advanced*, by Kenneth Williams.

Link to Vedic Mathematics web site: [www.vedicmaths.org](http://www.vedicmaths.org)

## Rekenen aan weer en klimaat

Matthijs Coster, Vossiusgymnasium, Amsterdam  
Toon Moene, KNMI, De Bilt

**zaterdag 10.30-11.15 uur (maximaal 40 deelnemers)**



Wereldgemiddelde temperatuur sinds 1856. (bron: [www.knmi.nl](http://www.knmi.nl))

De zomer van 2002 was zeer nat, die van 2003 uitzonderlijk warm. Is ons klimaat echt aan het veranderen? Het is niet uitgesloten dat het KNMI op korte termijn het effect van het broeikaseffect op ons klimaat zal bevestigen. In deze workshop gaan we vooral in op de statistische achtergrond van een dergelijke uitspraak. We laten echter eerst zien hoe een tweedaagse voorspelling tot stand komt. Om het weer te voorspellen voor een periode van twee dagen moet een gebied bekeken worden met

afmetingen van 8000 x 6000 km. Dit gebied is opgedeeld in deelgebieden van ca. 22 x 22 km. Per deelgebied moeten temperatuur, windrichting, hoeveelheid zon, neerslag, luchtdruk en vele andere parameters worden ingevoerd. De berekening die daarna volgt is zo groot dat er een supercomputer aan te pas komt. Deze computer doet de gehele berekening in 50 minuten. Zodoende wordt diverse malen per dag de tweedaagse voorspelling bijgesteld.

In deze workshop laten we zien hoe rond het thema 'Weersvoorspelling' een les in elkaar gezet kan worden voor leerlingen in de onderbouw, waarbij de leerling zelf een aantal natuurlijke vragen beantwoordt, zoals vermeld in Pythagoras, aflevering november 2003.



# Wiskunde en kunst

Voor sommige wiskundigen is goede wiskunde geen wetenschap maar kunst. Cardano noemde in 1545 zijn innovatieve algebra *Ars Magna* ofwel 'de grote kunst' en Stevin had het over 'wiskonst'. Voor sommige kunstenaars is wiskunde een inspiratiebron, iets waar je een kunstwerk over maakt. Dan zijn er die de wiskunde zien als een hulpmiddel om kunst te maken. Ze componeren er hun werken mee (muziek of niet). En iedereen mag natuurlijk wiskunde gebruiken om kunst te analyseren. De verhouding tussen wiskunde en kunst is spannend en soms gespannen (want niet alle schilders laten zich de regels van het lineair perspectief voorschrijven).

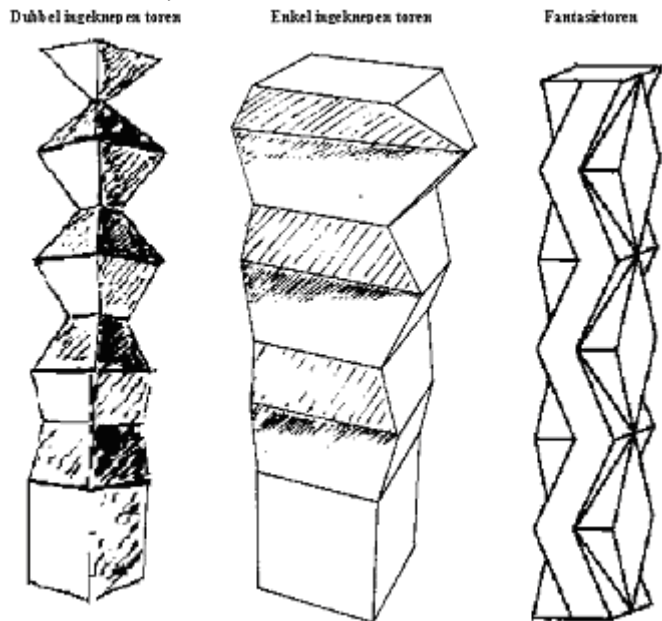
## Wiskundige torens en vormveranderingen

Ir. Ton Konings  
APS, Utrecht en ILS, Nijmegen

vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten, maximaal 25 deelnemers)  
herhaling: zaterdag 9.15-11.00 uur

De werkgroep bestaat uit drie onderdelen:

1. Een presentatie over een aantal torenvormige wiskunstige bouwsels: de Toren van Snelson, een aantal objecten van Alfons Kunen, ...
2. Een presentatie van een project dat in een 3 vwo-klas is uitgevoerd, maar ook bruikbaar is als praktische opdracht in 4 en 5 havo. In dat project bouwden de leerlingen de torens uit nevenstaand plaatje. Wiskundige stof daarbij is: aanzichten, bouwplaten, Pythagoras in de ruimte. Die blijkt in deze context met weinig structurering een behoorlijk beroep te doen op ruimtelijk inzicht.
3. Hierna werken de deelnemers aan praktische opdrachten waarbij alle 'leerlingen' elk een ander object maken van een reeks. In zo'n reeks verandert bijvoorbeeld een kubus in een piramide. Dit leidt tot één gezamenlijk 'kunstwerk'. Dit idee is door de keuze van de vormverandering en de mate van structurering op alle niveaus van het voortgezet onderwijs uitvoerbaar. Er wordt gezorgd voor karton, snijmesjes, linialen, lijm potlood, papier. Wilt u zelf een rekenmachine meebrengen?



Het resultaat wordt tentoongesteld aan de deelnemers van de NWD.

## Wiskunde en kunst in vier kwadranten: gevoel, ratio, illusie en werkelijkheid

Henk Ovink  
Adviseur Strategie & Proces, Royal Hasking, Den Haag

vrijdag 14.45-15.30 uur

Wiskunde en kunst verhouden zich tot elkaar. Soms zichtbaar, voelbaar, soms in de achterliggende gedachten van de kunstenaar. Soms alleen gevoelsmatig voor de maker en soms alleen zichtbaar voor de beschouwer. Deze relatie tussen maker en beschouwer, wiskunde en kunst wil ik bediscussieren met de zaal. Na een korte introductie waarin ik de verhouding tussen wiskunde en kunst categoriseer en toelicht, wil ik door middel van een aantal aansprekende voorbeelden deze relatie toetsen aan de opinie van de toehoorders, opnieuw beschouwers.

Te beginnen met het werk: een kunstwerk van eigen hand, gerealiseerd in 1996 in opdracht van de Rijksuniversiteit Groningen. Het is mijn verbeelding van het brachystochroon-probleem dat Johann Bernoulli (1667-1748) in juni 1697 publiceerde.

Ik onderscheid vier verhoudingen tussen wiskunde en kunst. Van bewust en onbewust ervaren tot bewust en onbewust gebruiken, maken. Deze verschillende verhoudingen zijn eerst dan intrigerend wanneer de beschouwer en de maker hiermee worden geconfronteerd. Met name de situatie waarin de kunstenaar bewust wiskunde aan zijn werk koppelt terwijl de beschouwer dat niet zo ervaart, en de situatie waarin de beschouwer bij zijn kunstwerk duidelijk het gevoel heeft dat er wiskunde 'achter zit' terwijl de kunstenaar dat niet zo bedoeld heeft.

Voor de kunstenaar is deze analyse een belangrijke denkoefening, want het verduidelijkt de verhouding van de fysieke en mentale elementen in het artistieke proces (materie versus idee). Voor wiskundigen evenzo, want een beeld geeft houvast, het daagt uit, vat samen, intrigeert. Maar wat gebeurt er nu echt met de wiskunde?



## Structure, movement, and counting, on the work of Santiago Calatrava

Prof. Alexander Tzonis M.Sc.  
Faculteit Bouwkunde, Technische Universiteit Delft

vrijdag 16.15-17.00 uur (lezing in het Engels)

Architect, artist, and engineer Santiago Calatrava was born in 1951, in Valencia, Spain. Calatrava studied art and architecture in Spain, France and Switzerland. Attracted by the mathematical rigor of certain great works of historic architecture, Calatrava decided to pursue post-graduate studies in civil engineering.



In 1984, Calatrava designed and built the Bach de Roda Bridge, commissioned for the Olympic Games in Barcelona. This was the beginning of the bridge projects that established his international reputation. Exhibitions of Calatrava's work were first mounted in 1985, with a showing of nine sculptures in an art gallery in Zurich. Calatrava has an architectural and engineering office in Zurich and Paris. Using the oeuvre of Calatrava, the lecture will show how mathematics can contribute greatly not only in solving design problems but also enhancing creative imagination to generate and subsequently build new unprecedented

spatial arrangements.

Professor Alexander Tzonis holds the chair of Architectural Theory and Design Methods at the University of Technology of Delft and is Director of DKS (Design Knowledge Systems), a multi-disciplinary research centre on Architectural Cognition. He was educated at Yale University and taught at Harvard University between 1967 and 1981. He has held visiting professorships at MIT, Columbia University, the Universities of Montreal, Strasbourg, Singapore, University of Technology Vienna, the Technion, Israel, and the College de France.

### Literatuur en bronnen

Alexander Tzonis (1999), *Santiago Calatrava - The Poetics of Movement*. Universe Publishing, New York.

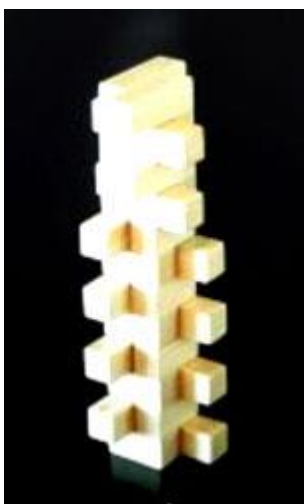
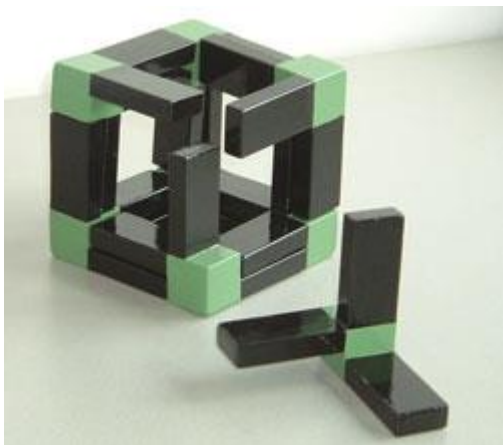
## Puzzels, blokken en veranderbare kunst

Dr. Marc van Kreveld

Instituut voor Informatica en Informatiekunde, Universiteit Utrecht

**zaterdag 9.00-10.00 uur (60 minuten)**

Bij het ontwerp van nieuwe meetkundige puzzels maak ik vaak gebruik van wiskunde en informatica. We zullen een klasse van 2290 kubuspuzzels bekijken, analyseren hoeveel oplossingen ze hebben, definiëren hoe moeilijk een puzzel is, en daarna de moeilijkste puzzel van de 2290 bepalen. Daartoe gebruiken we combinatoriek, de computer en een portie intuïtie. Naast twee van deze puzzels zullen nog andere nieuwe meetkundige puzzels aanwezig zijn. Sommige daarvan zijn in feite blokken waarmee mooie bouwwerken gemaakt kunnen worden.



**Veranderbare kunst gaat over objecten die uit verschillende onderdelen bestaan en op meerdere manieren in elkaar gezet of aan elkaar gehangen kunnen worden. Om te bepalen op hoeveel manieren dat kan is een combinatie van wiskunde en**

*informatica nodig. We bekijken het opstellen van recurrente betrekkingen en de programmeertechniek dynamisch programmeren.*



*Zowel bij puzzels als bij veranderbare kunst is wiskunde nodig om computerprogramma's efficiënt te maken. Zonder de juiste observaties en technieken zou de computer vele dagen nodig hebben om de informatie te berekenen die nodig is voor het ontwerp van de puzzel.*

<http://home.compaqnet.nl/~kalde063/puzzels/ned.htm>

[www.cs.uu.nl/~marc/composable-art](http://www.cs.uu.nl/~marc/composable-art)

## De Nacht van Newton

Aad Goddijn  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Geloof er niets van, dat wiskunde en kunst harmonisch samengaan! Tijdens deze NWD zullen diverse kunstenaars hun bezwaren tegen de wiskunde naar voren brengen. Uitgenodigd zijn onder andere de dichter/graficus William Blake, de architect/schilder Theo van Doesburg, de surrealisten Magritte en Queneau, de Middeleeuwer Dante, de veelschrijvers Goethe, Enzensberger en Musil, de beeldhouwers Rude en Carpeaux, de Brahmaan Dèr Mouw en tot slot Carl Frederik Hill, die in zijn jeugd ernstig geleden heeft onder een dominant-mathematische vader. Piet Mondriaan heeft helaas afgezegd wegens een slepend conflict met Theo van Doesburg over, het viel te raden, de ware aard van de wiskunde. De antipathie van deze kunstenaars, die soms diep verborgen zit onder schijnbaar pro-mathematische drogredenen, wordt op de bijeenkomst krachtig onderbouwd. De wiskundigen zouden een regelrechte bedreiging vormen voor de Verbeelding in het algemeen en voor de Poëzie van de Regenboog in het bijzonder. Ook worden wiskundigen vanuit de artistieke sector minder aangename karaktertrekken toegedicht, waarvan een bloedeloos rationele eenzijdigheid nog wel de minst ergerlijke lijkt te zijn.



## Newton van W. Blake

Bij William Blake kunnen Rede en Poezie absoluut niet door één deur. Hij staat er dan ook op misverstanden rond zijn veel geciteerde 'The Tiger' (Fearfull Symmetry!) te komen rechtzetten. Ook wil hij definitief een einde maken aan de verafgoding van Newton, die hij als de duivel beschouwt. Niet iedereen heeft dat uit bijgaand portret begrepen, maar het was toch echt de bedoeling. De bijeenkomst wordt opgeluisterd met cabareteske bijdragen van de komedieschrijvers Aristophanes en Pieter Langendyk.



# Wiskunde en risico's

Welk risico loop je, als je een griep prik hebt gehaald, om toch ziek te worden omdat het virus gemuteerd is? Hoe groot is het risico dat je in Wilnis nog een keer geconfronteerd wordt met een dijkdoorbraak? Twee thema's waarin risico een rol speelt, die belicht gaan worden door een viroloog en een probabilistisch bouwkundige. Om uitspraken over dit soort risico's te doen, moet je gegevens verzamelen en verwerken. Op landelijk niveau wordt dat gedaan door het Centraal Bureau voor de Statistiek. Een medewerker van het CBS opent de rij. Hoe groot acht u het risico dat zijn betoog over statistiek gaat?

## Wat heeft de oude Pythagoras ons vandaag nog te vertellen?

Dr. Paul Knottnerus  
Centraal Bureau voor de Statistiek, Voorburg

**vrijdag 13.45-14.30 uur**

Wellicht is het moeilijk voorstelbaar dat een simpele stelling als  $a^2 + b^2 = c^2$  nog enig nut zou kunnen hebben voor wiskundige problemen van onze tijd. Het blijkt echter dat de oude Pythagoras nog steeds springlevend is. Hij kan ons nog altijd grote diensten bewijzen, vooral op het terrein van de statistiek.

Een bekend probleem uit de statistiek is het aanpassen/fitten van een lijn door een puntenwolk in het  $xy$ -vlak. Algebraïsch komt dit neer op het minimaliseren van een kwadratische functie van twee variabelen. Zoals bekend, is dit meetkundig gezien weer te interpreteren als een projectie van een vector met  $y$ -waarden op een vlak dat wordt opgespannen door een vector van  $x$ -waarden en een vector met éénen. Met name deze algemene projectievorm biedt een snelle methode om met Pythagoras allerlei variaties te berekenen.

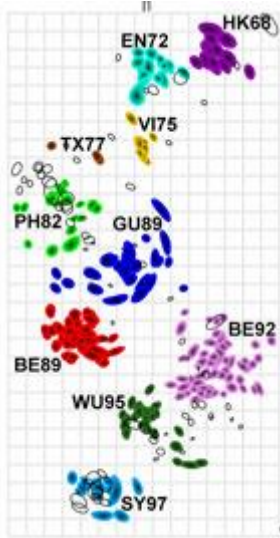
Minder bekend is dat Pythagoras ook een nuttige bijdrage kan leveren bij problemen uit de operations research zoals het minimaliseren van een kwadratische functie onder lineaire restricties. Een andere toepassing betreft de pythagorische afleiding van de zogenaamde Kalman-vergelijkingen uit 1961 die een oplossing gaven voor een klassiek probleem uit de jaren dertig van de vorige eeuw. Omdat deze vergelijkingen nogal veel in de ruimtevaart worden gebruikt, merkte Kalman eens op 'No Kalman, no moon'. Een mooi voorbeeld is ook de gevreesde ongelijkheid van Cramér-Rao uit de statistiek.

Gevreesd wil hier zeggen dat in de meeste tekstboeken het desbetreffende hoofdstuk wordt aangeduid met een \*, omdat het bewijs van deze ongelijkheid zo moeilijk zou zijn. In de woorden van Pythagoras is de ongelijkheid echter niets anders dan dat de zijde  $c$  langer is dan de zijde  $a$ . Op dezelfde manier kunnen nog wel meer voorbeelden worden gegeven van toepassingen van Pythagoras die op het eerste oog misschien niet veel van doen hebben met de klassieke meetkunde van Pythagoras en Euclides.

## Evolutie van griepvirussen

Dr. Ron Fouchier  
Virologie en Nationaal Influenza Centrum, Erasmus MC Rotterdam

vrijdag 16.15-17.00 uur



Het influenza A-virus is een belangrijke verwekker van griep bij de mens. De griepvrij kan infectie met en/of ziekteverschijnselen ten gevolge van influenzavirussen voorkomen. Omdat griepvirussen snel kunnen veranderen, volgt een wereldwijd netwerk van onderzoekers deze op de voet, zodat de griepvrij snel kan worden aangepast. Hiertoe meten we de reactiviteit van griepvirussen met antilichamen en bestuderen we het erfelijk materiaal van virussen. Deze beschikbare datasets zijn gebruikt om de evolutie van griepvirussen in kaart te brengen, en de effectiviteit van de griepvrij te verbeteren. Hiertoe wordt gebruik gemaakt van multidimensional scaling algoritmes (MDS), regressie-analyses en theoretische wiskundige modellen die de reactie van het menselijk immuunsysteem op virus-infecties nabootsen. Met behulp van MDS worden 'landkaarten' gemaakt om de evolutie van griepvirussen te kwantificeren en visualiseren (zie figuur). Deze 'landkaarten' zijn zeer bruikbaar binnen het wereldwijde influenza surveillance netwerk, maar ook voor fundamenteel onderzoek naar griepvirussen en andere ziekteverwekkers.

## Hoe hoog moeten de dijken zijn?

Houcine Chbab  
Rijkswaterstaat RIZA, Lelystad

zaterdag 10.30-11.15 uur

Nederland wordt door dijken beveiligd tegen overstromingen door de zee en de rivieren. Die dijken moeten voldoen aan door de overheid vastgesteld veiligheidsnormen. Een dijk kan falen door verschillende faalmechanismen. Eén van de belangrijkste is het overstromen van de dijk. Ook kan hij doorbreken. In berekeningen zijn stochasten als zeewaterstand, windsnelheid en rivierafvoer van groot belang, en dan met name in extreme omstandigheden. In de presentatie wordt de rol van deze stochasten geïllustreerd voor het benedenrivierengebied, dat bestaat uit het benedenstroomse deel van de Waal, Lek en Maas tot aan zee. Eén van de problemen van de extreme waarden statistiek, is welke kansverdelingen voor de benodigde extrapolatie moeten worden genomen. De Bayesiaanse methode is een manier om dit probleem aan te pakken. Die methode zal geïllustreerd worden voor de Rijnafvoer te Lobith en voor de zeewaterstand te Hoek van Holland. De presentatie besluit met een aantal problemen die de komende jaren aangepakt gaan worden.



# Wiskunde en didactiek

Wat is belangrijker voor een goede wiskundedocent: wiskundekennis of kennis van de didactiek van de wiskunde? De meningen in docentenland zijn verdeeld en de discussie hierover zie je regelmatig in kranten terug. Zouden docenten op het vwo eigenlijk hun doctoraal (master of science) wiskunde moeten hebben en leren ze de didactiek wel al doende?

In dit thema is de didactiek juist wel van belang. Hoe maak je leerlingen enthousiast voor je prachtige vak en wat zijn manieren om ze goed wiskunde te leren? Elke wiskundedocent is al expert op zijn vakgebied. Door te luisteren naar good practices en te discussiëren over didactische oplossingen uit de ons omringende landen wordt onze expertise nog uitgebreider.

In dit thema kunt u met collega's uit binnen- en buitenland praten/luisteren/discussiëren over het hoe en waarom van wiskundeonderwijs.

## Images of Mathematics

semi-plenair

Prof. Paul Ernest  
University of Exeter, School of Education & LL, Engeland

vrijdag 13.45-14.30 uur (lezing in het Engels)

There are images of mathematics on various levels. There are different philosophies of mathematics, and these relate to developments in philosophy in general. There are different personal philosophies or perceptions of mathematics to be found in the public, and among teachers and children. There are different personal attitudes to mathematics and its study.

All of these can be seen in the way mathematics is represented in the media, and by children and others. There are important lessons to be learned from these images. Especially in the way they relate to and reveal the public's, teachers' and children's views of mathematics and attitudes to its learning.

Het is niet voor niets dat Paul Ernest een semi-plenaire lezing houdt op de tiende NWD.



Paul Ernest is begonnen als wiskundeleraar in Engeland en is tegenwoordig professor in de filosofie van het wiskunde-onderwijs in Exeter. Hij geeft lezingen over wat wiskunde is in de ogen van overheden, wiskundecollega's, leerlingen en schoolleidingen. Er bestaan bij deze diverse groepen diverse ideeën over wat wiskunde is en hoe wiskunde gegeven moet worden. Dat leidt tot conflicten waar we lering uit kunnen trekken. Paul Ernest heeft dat al over de hele wereld uitgedragen en zijn boeken en artikelen worden vertaald in bijna alle grote wereldtalen. Hij is overal geweest, maar nog nooit eerder in Nederland.

We zijn blij dat Paul Ernest tijdens de NWD kan vertellen hoe we om kunnen gaan met de diverse ideeën over wiskunde en hoe we daar binnenkort met elkaar toch een nieuw curriculum voor de

tweede fase en de vernieuwde basisvorming van kunnen maken.

## Intuïtie en wiskundig probleemoplossen: een interpretatiekader voor fouten van leerlingen?

Drs. Wim van Dooren  
Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie, KU Leuven, België

vrijdag 14.45-15.30 uur

Onder vakdidactici wiskunde en wetenschappen is er veel belangstelling voor de hardnekkige fouten (misconcepties, preconcepties, ...) die leerlingen maken in diverse toepassingsdomeinen. Zo benadrukte de Israëlische onderzoeker Fischbein de rol die intuïties kunnen spelen bij het wiskundig probleemoplossen. Intuïties zijn inzichten die op zich evident lijken, en verder reiken dan de

onmiddellijke feiten. Vaak zijn ze correct (ik weet bijvoorbeeld intuïtief dat ieder getal een opvolger heeft), maar ze kunnen ook misleidend zijn (vele leerlingen zijn er bijvoorbeeld van overtuigd dat een vermenigvuldiging altijd groter maakt en een deling altijd kleiner). Tijdens de lezing bekijken we hoe intuïties, in positieve en negatieve zin, van belang zijn bij het oplossen van wiskunde problemen.

De Israëlische onderzoekers Tirosh en Stavy beweren dat de correcte én incorrecte oplossingen van leerlingen bij het oplossen van problemen in wiskunde en wetenschappen vaak verklaard kunnen worden doordat ze een beperkt aantal intuïtieve regels toepassen. Zo is er de 'meer A, meer B'-regel, die vaak tot juiste (bijvoorbeeld 'cirkels met een grotere diameter hebben een grotere oppervlakte') maar soms ook tot onjuiste redeneringen leidt (bijvoorbeeld ' $20(8a - 3)$  is groter dan  $6(2b - 1)$  want de getallen zijn groter'). Een andere regel is 'hetzelfde A, hetzelfde B', die ook vaak correct is (bijvoorbeeld ' $x^3 = y^3$  dus moet  $x = y$ '), maar soms ook incorrect (bijvoorbeeld 'de kans om 20 keer munt in 30 worpen is even groot als de kans om 200 keer munt te gooien in 300 worpen want  $20/30 = 200/300$ ').

Tijdens de lezing bekijken we hoe deze intuïtieve rules theory kan helpen bij het interpreteren van uiteenlopende fouten van leerlingen (zoals vastgesteld in onderzoek). Vervolgens bekijken we de resultaten van een Vlaamse studie. Vlaamse leerlingen blijken minder sterk beïnvloed door de intuïtieve regels, en wanneer we de oplossingsstrategieën van leerlingen grondiger bekijken blijkt dat er vaak andere fouten gemaakt worden dan de toepassing van een intuïtieve regel.

## WiskundePlus!

Voorzitter: Swier Garst.

Met medewerking van: Rainer Kaenders, Canisius College Nijmegen en KUN; André de Boer, Maimonides Amsterdam; Marianne Lambriex, Stedelijk College Eindhoven; Dmitri Karpov, Sint Petersburg, Rusland.

**vrijdag 16.15-17.15 uur (60 minuten)**

Middelbare scholen beginnen zich steeds meer ten opzichte van elkaar te profileren. Tweetalige scholen schieten als paddestoelen uit de grond. Maar er zijn andere gebieden waarop scholen zich kunnen onderscheiden, bijvoorbeeld door een sterk bètaprofiel aan te bieden. Dat is maatschappelijk zeer gewenst, gezien de vijftien procent meer instroom in bèta- en techniekopleidingen in 2010 waaraan het kabinet Balkende zich heeft verplicht.

In deze workshop bekijken we bètaplus-initiatieven vanuit de wiskunde. Vier docenten presenteren de wiskundeplus-activiteiten die zij op hun school ontplooiën. De manier waarop zal van school tot school verschillen: van Olympiadeactiviteiten in Rusland, wiskunde in het Engels, rekenlessen, ICT-onderwijs en samenwerking met andere bètavakken tot de oprichting van een bètaplusschool in samenwerking met de universiteit (Canisius College Nijmegen).

Na de presentaties is er gelegenheid tot discussie.

## Wiskundeonderwijs over de grenzen

Carl Peter Fitting, Geschwister-Scholl-Gesamtschule, Moers, Duitsland  
Gilberte Verbeeck, Essen, België  
Helen Russell, South Hunsley School, East Yorkshire, Engeland

**zaterdag 9.15 - 11.00 uur (90 minuten, voertaal Engels)**

Schoolmethoden worden mooier, motiverender, groter, ... Er wordt kosten noch moeite gespaard om de wiskundemethoden zó te presenteren dat leerlingen zelfstandig het curriculum kunnen doorlopen. En als dat niet voldoende is ontvangen wij naast onze schoolmethoden ook nog docenthandleidingen, studiewijzers, ICT-ondersteuning, proefwerkbundels, verzamelingen praktische opdrachten, ... Een kind kan de was doen. De vraag is: wat is de rol van de docent nog?

Het is belangrijk om je als docent steeds betrokken te voelen bij het leren van je leerlingen en enthousiast te blijven voor je vak. Dat betekent hoe dan ook dat wij op zoek blijven naar mooie aansprekende praktijken die passen bij de eigen affiniteit voor het vak van wiskundedocent.

In deze workshop laten drie docenten uit onze buurlanden Duitsland, Engeland en België zien hoe zij aankijken tegen de rol van de docent. Wat doen zij om hun leerlingen te enthousiasmeren? Zij zullen lesidëeen en voorbeelden laten zien uit hun eigen lespraktijk. Achteraf is er gelegenheid om vragen te stellen en het lesmateriaal te bekijken.

# Wiskunde voor bavo en vmbo

Voor dit thema was de afgelopen jaren bijzonder veel belangstelling. Het aanbod op de komende *nwd* zal daarom uitgebreider zijn: meer werkgroepen met meer onderwerpen. Inmiddels bekende onderwerpen zijn: gecijferdheid, actief en zelfstandig leren, praktische opdrachten in een *lwt*-klas. Een nieuw onderwerp is de aansluitingsproblematiek, met een werkgroep speciaal voor brugklasdocenten over de aansluiting basisonderwijs - voortgezet onderwijs, en een werkgroep die zich bezig houdt met de vraag 'Welke wiskundige vaardigheden vragen bedrijven van de vmbo-leerling?'

## Balklagen en stenen verdelen met Interactief Bouwen

Joop Brugman  
Brewinc College, Doetinchem

**vrijdag 13.30-14.30 uur (60 minuten, maximaal 25 deelnemers)**

In deze presentatie maakt u allereerst kennis met Interactief Bouwen. Interactief Bouwen is een digitale 'webbased' leeromgeving voor de afdeling bouwtechniek in het vmbo. Het programma biedt leerlingen de helpende hand bij het uitvoeren van de praktijkopdracht. In Interactief Bouwen is een start gemaakt met de integratie van het beroepsgerichte vak en het vak wiskunde.

Tijdens de presentatie zullen enkele rekenkundige knelpunten besproken worden waarmee vmbo-leerlingen tijdens het uitvoeren van hun praktijkopdracht in aanraking komen.

In het tweede deel van de sessie maakt u zelf één van de praktijkopdrachten zoals die door de vmbo-leerlingen worden uitgevoerd. U ervaart daarbij welke eisen aan de rekenvaardigheden van de leerlingen worden gesteld.



## 10 jaar basisvorming en verder...

Monica Wijers en Corine van den Boer  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

**vrijdag 13.30-14.30 uur (60 minuten)**

De inmiddels tien jaar oude basisvorming is, zo menen velen, toe aan vervanging. In de nieuwe plannen van de taakgroep vernieuwing basisvorming wordt daarom, mede op advies van de minister, de term basisvorming vervangen door 'nieuwe onderbouw'. Daarmee is natuurlijk nog niet duidelijk wat er gaat veranderen en wat de gevolgen voor het wiskundeonderwijs in die nieuwe onderbouw kunnen zijn. Wel is duidelijk dat de scholen meer dan voorheen hun eigen invulling aan het onderwijs in de onderbouw kunnen geven.

In deze werkgroep kijken we kort terug op tien jaar basisvorming, maar we kijken vooral vooruit naar

de 'nieuwe onderbouw'. Welke kant gaan de vernieuwingen op? Hoe zien de nieuwe kerndoelen voor wiskunde er uit en nog belangrijker: welk onderwijs past daarbij en hoe realiseren we dat? We presenteren enkele voorbeelden van mogelijke invulling van de kerndoelen, en vragen u actief mee te denken over de vormgeving van de nieuwe basisvorming op uw school.

## Naar meer samenhang tussen beroepsgerichte en algemeen vormende vakken in het vmbo

semi-plenaire

Prof.dr. Johan van der Sanden  
TU Eindhoven en Fontys Pedagogische Technische Hogeschool Eindhoven

vrijdag 14.45-15.30 uur

In het vmbo bestaat er nauwelijks samenhang tussen de beroepsgerichte en de algemeen vormende (avo) vakken en er is nauwelijks sprake van vakkenintegratie. De manier waarop de avo-vakken op het vmbo worden aangeboden, staat haaks op de interesses en de belevingswereld van vmbo-leerlingen. Deze situatie is mede debet aan de teruglopende belangstelling voor de sector Techniek. Leerlingen verlaten de school voortijdig en stromen moeizaam door naar vervolgonderwijs en bedrijfsleven. Meer samenwerking tussen de exacte avo-vakken en de beroepsgerichte vakken kan deze situatie verbeteren. Nieuw, beter bij de beroepspraktijk passend lesmateriaal geeft deze integratie vorm en zal de motivatie van leerlingen vergroten.

In mijn bijdrage ga ik in op de aanpak en de resultaten van het door *AXIS* en het Ministerie van *OCW* gefinancierde project *WINST*: 'Wiskunde, Natuur/Scheikunde in de sector Techniek voor het vmbo', dat wordt uitgevoerd door een samenwerkingsverband van het Freudenthal Instituut, de *s/o* en vier vmbo-scholen. In dit project wordt rondom contexten uit de beroepspraktijk samenhangend lesmateriaal ontwikkeld dat aansluit op de gebruikte lesmethoden voor de beroepsgerichte vakken. Omgekeerd worden de gevonden verbanden weer verwerkt in aangepast sectorspecifiek geïntegreerd materiaal voor wis-, natuur- en scheikunde.

Ik plaats het project in het kader van een integraal herontwerp van het techniekonderwijs in het vmbo, waarbij ik aansluit bij de onlangs verschenen *AXIS*-publicatie *Naar aantrekkelijk technisch vmbo*. Resultaten van drie jaar herontwerp. Voor meer informatie over deze publicatie en de resultaten van het *WINST*-project verwijst ik naar: [www.kennisbanktechniek.nl](http://www.kennisbanktechniek.nl)

## Integratie exacte vakken in de praktijk: Van losse onderdelen naar één geheel

Willem Klopman en Jaap van der Wielen  
Katholiek Drents College, Emmen

vrijdag 16.15-17.00 uur

Leerlingen in de beroepsgerichte leerwegen van het vmbo hebben vaak te maken met twee 'schoolwerelden': die van de beroepsvakken en die van de avo-vakken. Het KDC Emmen is bezig te komen van 'Losse onderdelen tot één geheel'. In de nieuwe programma's Techniek Breed en Techniek en Welzijn wordt gewerkt aan integratie van wiskunde (en natuur- en scheikunde 1) in de beroepsvakken. Daarbij wordt uitgegaan van de belevingswereld van de leerling. De integratie is nog volop in ontwikkeling. Niet alleen wordt er bij de modules van de beroepsvakken passende en aansluitende wiskunde (en nask 1)stof gezocht en worden er lessen ontwikkeld. Ook vindt een deel van het wiskunde- (en nask 1)onderwijs plaats in de praktijklokalen. Zo wordt bij het maken van een vuurkorf bijvoorbeeld aandacht besteed aan maten en aan cirkels; bij de decoratie van kluisdeurtjes doen leerlingen materiaal-onderzoek, ontwerpen zij decoraties met

diverse vormen en maken ze berekeningen over de benodigde hoeveelheid verf.  
In deze werkgroep ziet u voorbeelden van de integratie en hoort u over de ervaringen in de praktijk.

## Wiskunde in de BB: hoezo examen?

Anders Vink  
APS, Utrecht

**vrijdag 16.15-17.00 uur**

In deze presentatie verkennen we de stand van zaken rond wiskunde in de basisberoepsgerichte (BB) leerweg: Hoe gaan de examens? Wat kunnen BB-leerlingen verwachten in het vervolgonderwijs? Welke wiskunde heeft betekenis voor deze leerlingen? Richt ik mijn lessen vooral op het examen, of misschien meer op wat leerlingen in het dagelijks leven nodig hebben? Welke keuzes maakt u als het gaat om dit soort vragen? En welke gevolgen hebben die keuzes voor het wiskundeonderwijs over, laten we zeggen, vijf jaar? Wordt wiskunde een steunvak voor de praktijkvakken, of heeft wiskunde voor BB-leerlingen een eigen karakter? Veel vragen; aan u de uitdaging uitspraken te doen!  
Deze presentatie is een variant op de lezing op de APS Reehorstconferentie van 15 januari 2004.

## Aardappelen in de klas

Adri Knop  
Sg Tabor, locatie Oscar Romero, Hoorn

**zaterdag 9.00-10.00 uur (60 minuten, maximaal 25 deelnemers)**

Een aantal jaar geleden, toen de bavo-toetsen nog verplicht waren, heeft het *CITO* de aardappelopdracht verstuurd naar alle scholen in Nederland. Het werd aangeboden als alternatief voor de afsluitende bavo-toets. Het initiatief sprak me aan. Opgewekt worstelde ik me door de achttien pagina's handleiding heen om een volledig beeld te krijgen van de totale opdracht. Het werd me pas na een aantal maal lezen duidelijk.

Wij aan de slag met de leerlingen. Het meten ging best redelijk, hoewel er een groot aantal praktische probleempjes waren om op te lossen. VU-statistiek hadden we al jaren op school. Eén les per jaar naar het computerlokaal en de opdrachten uit de methode door laten werken. Klaar was het weer. Onbevredigend voor mij als docent.

Het vmbo dient zich aan. Handelingsdelen en Praktische Opdrachten doen hun intrede. *ICT* speelt nog steeds een belangrijke rol. Kortom, het oude project weer uit de la getrokken en opnieuw bewerkt en er *ICT* bij betrokken.

Stof schrappen uit het statistiekhoofdstuk, geen schriftelijke toets geven en je hebt `drie' lessen over.



- 1. Handelingsdeel VU-statistiek uit de methode *Moderne Wiskunde*.**
- 2. *Praktisch bezig zijn, in het lokaal meten aan aardappelen, wegen, middelen, rekenen, afdrogen, morsen en chaos, maar wel leuk.***
- 3. *Met de meetresultaten uit de tweede les, de ervaring uit de eerste les, met behulp van de computer een antwoord geven op de onderzoeksvraag.***

Kortom, een prima mogelijkheid om de drempelvrees te overwinnen om een praktische opdracht in klas 2-vmbo uit te voeren. Materiaallijst, stencils en werkwijze neemt u na afloop mee. Zaterdagavond nog langs de supermarkt voor een zak met binten en volgende week uitproberen.  
Scholengemeenschap Tabor, locatie Oscar Romero, was met deze inzending een van de winnaars van de Wiskunde Scholen Prijs 2003.



## Gecijferdheid en wiskundige geletterdheid

Kees Hoogland  
APS, Utrecht

**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Kunt u een tabelletje met percentages direct goed doorzien? Kunt u de instructies bij het bouwen van een doe-het-zelfkast interpreteren? Kunt u vlot omgaan met de menu-structuur in uw gsm? Beseft u alle mogelijke consequenties van een aandelenleaseconstructie?

Waarom betalen sommige leerlingen alleen met groot geld? Waarom staat één op de vijf leerlingen in het vmbo gemiddeld 1500 euro rood? Waarom kunnen leerlingen niet schatten hoeveel verf of behang nodig is voor het inrichten van een kamer? Waarom trekken leerlingen zo vaak verkeerde conclusies over allerlei codes op producten?



Nederland	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
Duitsland	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
Engeland, VS	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Belgie	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
Frankrijk	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
Italië	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56

*De bovenstaande vragen hebben gemeen dat ze allemaal gaan over de mate van gecijferdheid van de persoon in kwestie. Nationaal en internationaal worden diverse definities gehanteerd voor gecijferdheid. Die definities met voorbeelden zullen aan de orde komen in de werkgroep. Vanuit het APS-denktankproject 'Gecijferdheid' wordt onderzoek gedaan naar manieren waarop het gecijferdheidsniveau van leerlingen in bijvoorbeeld de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo, in leerwerktrajecten, leerwegondersteuning en praktijkonderwijs verhoogd kunnen worden. Waarom? Bij aspecten van het maatschappelijk functioneren is gecijferdheid voor deze leerlingen soms van levensbelang: bij werk, bij geld, bij gezondheid, bij vervoer, etcetera.*

*Maar eigenlijk is voor iedereen een mate van gecijferdheid essentieel voor het functioneren in deze maatschappij. Deze gecijferdheid kan in ieder geval niet aangeleerd worden door eindeloze rijtjes sommen te maken. Hoe dan wel? Daarover gaan we met u in discussie. Geïnteresseerd? Kom langs in de werkgroep of neem een kijkje op de website in aanbouw: [www.gecijferdheid.nl](http://www.gecijferdheid.nl)*

# Diversen

Onder dit ietwat saai klinkende kopje treft u vijf bijzonder interessante bijdragen aan, die alle vijf een hoog doe-gehalte hebben.

De workshop van onze Vlaamse collega's is bijzonder omdat het een bij onze Zuiderburen beproefde workshop is waarbij u zelf op de computer aan de slag gaat (wat ongebruikelijk is op de NWD); de workshop over Tangles kan opgevat worden als een cadeautje van de Wiskunde B-dag aan tien jaar NWD; de workshops van respectievelijk Klaske Blom - Frank van den Heuvel en Rob van Oord zijn uitgekozen door de immer kritische NWD jury (die dit jaar moest kiezen uit negen inzendingen) en de workshop van Peter Vaandrager was een winnende inzending van Wiskunde Scholen Prijs 2003. Volop kwaliteit gegarandeerd dus!

## Van foto's tot driedimensionale computermodellen

Prof.dr. Theo Moons en Prof. Ignace Van de Woestyne  
Katholieke Universiteit Brussel, België

**vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten, maximaal 30 deelnemers)**

**herhaling: zaterdag 9.15-11.00 uur**

Recente technologische ontwikkelingen in de filmindustrie maken het mogelijk om adembenemende visuele effecten te creëren door beelden van levende personen en bestaande omgevingen te combineren met door de computer gegenereerde voorwerpen en scènes. Ook in computergames worden de virtuele werelden waarin de actie zich afspeelt met de dag realistischer. De meeste van deze effecten worden verkregen door een computermodel te maken van de driedimensionale wereld die men wil beschrijven en tonen.

Minder bekend is echter dat dezelfde technologie eveneens en steeds vaker wordt aangewend bij de besluitvorming in verschillende maatschappelijke domeinen. Voorbeelden hiervan zijn het gebruik van driedimensionale stadsmodellen in ruimtelijke ordening (bijvoorbeeld om de mogelijke geluidsoverlast in naburige woningen van een nieuw aan te leggen weg in te schatten of om de optimale positie van antennes voor mobiele telefonie te bepalen), het gebruik van digitale hoogtemodellen (bijvoorbeeld om overstromingsgevaar bij stormvloed of bij hevige regenval te voorspellen) en van gedetailleerde gebouwmodellen in de monumentenzorg (bijvoorbeeld voor archivering of voor stabiliteitsstudies bij de conservering of de restauratie van historische gebouwen en bij archeologische opgravingen).

Politiediensten maken op hun beurt regelmatig gebruik van dergelijke methoden om metrische informatie over de dader(s) van een misdrijf af te leiden uit filmmateriaal dat opgenomen werd door een bewakingscamera tijdens een incident. Maar hoe indrukwekkend het resultaat ook lijkt, de constructie van zo'n computermodel is gebaseerd op vrij eenvoudige (ruimte)meetkundige inzichten. Tijdens de workshop zal uitgelegd worden hoe computermodellen geconstrueerd worden uit foto's, film- of videobeelden van de desbetreffende ruimtelijke omgeving en zullen concrete voorbeelden uit de hierboven vermelde toepassingsgebieden besproken worden. Bovendien zullen de deelnemers tijdens de workshop zelf een driedimensionaal computermodel van een echte scène kunnen opbouwen. Speciale voorkennis op het gebied van wiskunde of informatica is niet vereist om aan deze workshop te kunnen deelnemen. Enig ruimtelijk inzicht en interesse in het onderwerp volstaan.

*Deze workshop bevat een computerpracticum waarbij u zelf aan de slag gaat.*

## Tangles

Henk van der Kooij  
Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut

**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Soms smeken speeltjes gewoon om wiskundige activiteit. De Tangle met zijn kronkelige verschijning is daar een voorbeeld van. De vijfde Wiskunde B-dag opgave was in zijn geheel opgehangen aan de

Tangle. Leerlingen van 5/6 vwo en 5 havo werden uitgedaagd om op basis van experimenten met het concrete materiaal wiskundig te gaan redeneren en te generaliseren. Op 28 november (de wedstrijddag) of op een latere datum (als praktische opdracht) zijn ongeveer 1450 teams overal in het land druk bezig geweest hun wiskundige (proces)vaardigheden te testen. In de workshop krijgt ook u alle gelegenheid om wiskundig actief te zijn met het speeltje. Verder zullen we mooie 'kronkelredeneringen' van leerlingen bekijken.



## Waarom er elk jaar verkiezingen zouden moeten zijn

*Statistiekproject in 5 vwo: ordenen van gegevens, (on)zinnige conclusies trekken en deze vervolgens verdedigen in een wiskundig debat*

Klaske Blom en Frank van den Heuvel  
Meridiaan College, locatie 't Hooghe Landt, Amersfoort

**vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten, maximaal 25 deelnemers)**

Heeft u ook overal een mening over? Houdt u van debatteren op het scherpst van de snede? Maar kunt u het ook op basis van wiskundige argumenten en met statistische onderbouwde stellingnames? Of als u een speciale rol krijgt opgelegd? En over een onderwerp waar u op voorhand niet zoveel van weet?

Onze leerlingen bleken dit alles wel te kunnen. Als 'campagnemedewerkers' van een politieke partij moesten ze de verkiezingsuitslagen analyseren, daar een verslag over schrijven en dit verslag vervolgens in een pittig debat (in vier rondes met strikte regels) tegenover de andere partijen verdedigen.

In onze werkgroep (die zijn naam eer aan doet, er moet door u echt gewerkt worden), laten we u ervaren hoe dit alles in zijn werk is gegaan (wel met een ander onderwerp aangezien het kabinet nog niet is gevallen). Daarnaast vertellen we over onze ervaringen en de (onverwachte) gevolgen van dit project. Kom dus en laat u verrassen. Na afloop horen wij graag wat u er van vindt.

U zelf houdt er in ieder geval een bijzondere en bruikbare praktische opdracht aan over.

## Golden Section

Peter Vaandrager  
Chr. Sg Liudger, locatie Raai, Drachten

**vrijdag 16.00-17.00 uur (60 minuten, maximaal 25 deelnemers)**



Een internationale uitwisseling: twintig leerlingen van jouw school ontvangen allemaal een gast uit het buitenland. Wat ga je dan doen in zo'n week? Wordt het een toeristisch programma of, zoals de subsidieverstrekkers graag willen, een programma dat past in het lesstofplan? Het programma zou toegankelijk moeten zijn voor alle leerlingen die aan het uitwisselingsproject meedoen en moet het karakter hebben van een uitwisselingsweek waarin kennismaking met een andere cultuur en een andere omgeving en internationale samenwerking centraal staan.

Dit waren onze gegevens bij het maken van een nieuw programma. En waarom zou wiskunde daar geen rol in kunnen spelen? We zijn toen aan de slag gegaan met het thema Golden Section (Gulden Snede). In het programma zijn de leerlingen vier dagdelen op verschillende manieren bezig met de Gulden Snede: inleiding, een drietal workshops (constructies, natuur, Fibonacci-spel), creatieve verwerking (Le Corbusier, spiralen, fotografie) en het voorbereiden en het uitvoeren van presentaties. In deze workshop willen wij jullie aan de ene kant kort iets vertellen over ons MSP-project (Multilateral School Partnership) en het programma, en aan de andere kant een aantal onderdelen van het programma met jullie doen. Daarvoor is het handig als je bij je hebt: een passer, een geodriehoek, een potlood en rekenmachine.

*Christelijke Scholengemeenschap Liudger, locatie Raai, was met deze inzending een van de winnaars van de Wiskunde Scholen Prijs 2003.*

## **Makkelijker kunnen we het niet maken, wel leuker**

Rob van Oord  
Coenecoop College, Waddinxveen

**zaterdag 9.00-9.45 uur**

Vandaag geef ik jullie in vogelvlucht een kijkje op mijn wiskunde door het jaar heen. Met enkele voorbeelden laat ik jullie, de deelnemers aan deze workshop, beleven hoe je met kleine dingen de lessen wiskunde een stuk leuker kunt maken. Niet met grote projecten, maar met dingen die je zelf zó kunt organiseren wil ik laten zien dat je met een enthousiaste aanpak en wat durf al gauw een spannende les kunt maken.

Tijdens de workshop zullen jullie aan de slag moeten. De manier waarop ik werk zal zijn zoals ik dat af en toe in mijn lessen doe. De inhoud is op meta-niveau. In de opdrachten zitten enkele van mijn hot items verscholen. Het is niet mijn bedoeling dat jullie mij klakkeloos gaan nadoen, maar ik wil jullie laten beleven hoe je met kleine aanpassingen de les spannender en leuker kunt maken. Ik denk dat iedereen vanuit zijn eigen beleving, afhankelijk van je achtergrond, je belangstelling en ontwikkeling tot de mens die je nu bent, de les een persoonlijker tintje kan geven.

De inhoud van de geboden wiskunde is vooral op bovenbouw havo/vwo afgestemd omdat ik daar op dit moment al mijn lessen geef. Ik heb in de onderbouw ook veel leuke en spannende lessen gegeven, maar omdat die niet actueel zijn beperk ik me wat inhoud betreft tot de bovenbouw.

# The best of...

Negen jaar NWD heeft veel moois opgeleverd. De programmacommissie probeert steeds nieuwe dingen te verzinnen, maar het oude blijft ook zeer de moeite waard. Daarom worden ter gelegenheid van NWD10 onder het kopje the best of... een aantal toppers uit het verleden herhaald.

## Wisrun

**Deskundige jury onder leiding van Marjolein Kool.  
vrijdag 14.00-15.30 uur (90 minuten, maximaal 40 deelnemers)**

*Verzamel zo veel mogelijk decimalen van pi en presenteer ze in een wervelende rap aan de jury ...*

Dit is één van de vele wiskundeopdrachten die op vrijdagmiddag in de Leeuwenhorst aan de muur zullen hangen. De andere zijn moeilijker of gekker of wiskundiger of creatiever. In ieder geval zullen de deelnemers met elkaar moeten samenwerken om tot een oplossing te komen. Die oplossing moet gepresenteerd worden aan een jury, waarmee schoonheidspunten te verdienen zijn. Een sluitend bewijs oogst waardering, maar een sluitend bewijs dat bovendien op een glasheldere, interactieve of doldwaze manier aan de jurytafel wordt voorgedragen, oogst roem, bewondering en extra punten!

Sta echter niet te lang stil bij een nieuwe opdracht wordt wisrun-NWD, als uitgereikt, zullen van de funrun van de wisrun. getreurd, want u aan de wisrun wisrunopgaven. de slag gaan.



de eerste plaats om begonnen. Wiskunde kan ook op uw school voor elke leerling een uitdaging en stimulans zijn, dus niet alleen voor de wizzkids. Organiseer in plaats van de traditionele sportdag eens een wisrun! De opdrachten zijn zeer uiteenlopend van aard en niveau. Groepjes brugklassers kunnen doodleuk tegen groepjes van de bovenbouw strijden. In de workshop wordt duidelijk hoe dat kan. Voor deelname aan de wisrun is een wiskundeknobbel handig, maar acteertalent, gouden handjes, uithoudings- en doorzettingsvermogen zijn even onmisbaar. De wisrun scherpt het verstand en test de lachspieren. Wie niet kan samenwerken, kan wel inpakken.

Als het wisrunvirus u te pakken heeft, hebben wij ons doel bereikt. Pas op: we doen niet aan nazorg!

**Wie aan de wisrun deelneemt, moet meenemen: passer, rekenmachine, geodriehoek, schaar, ruitjespapier, gezond verstand en gevoel voor humor.**

*De Wisrun is een herhaling van NWD 2000 (thema Wiskunde, uitdaging en stimulans)*

## Perspectief in een kastje

Drs. Agnes Verweij  
Technische Universiteit Delft, faculteit EWI

**vrijdag 13.45-14.30 uur**

Om 'diepte' te zien in een perspectiefafbeelding, moet je er met één oog vanuit een bepaald punt naar kijken. Zo'n afbeelding komt nog meer tot leven als je daarbij niet afgeleid wordt door de realiteit om de afbeelding heen. Dan krijg je de illusie dat je zelf deel uitmaakt van de afgebeelde ruimte. Om anderen met dit effect te verrassen zonder eerst te hoeven uitleggen hoe zij moeten kijken, kun je de afbeelding tegen de achterwand in een kastje van de juiste diepte aanbrengen en in de voorkant van de kast op de juiste plaats een kijkgaatje maken. Dit is een vondst van Hollandse interieurschilders uit de zeventiende eeuw, die de illusie nog versterkten door ook andere binnenwanden van zo'n perspectiefkastje te beschilderen. De kunst was daarbij de perspectiefafbeeldingen op de verschillende wanden goed op elkaar te laten aansluiten. Nog kunstiger was het als de wanden van het kastje andere hoeken met elkaar maakten dan de wanden van het afgebeelde interieur en als de vloer en het plafond voor een deel op de opstaande wanden van het perspectiefkastje geschilderd waren. Slechts zes van deze kunststukjes zijn bewaard gebleven, waarvan er nog maar één in Nederlands bezit is.



Dit is de perspectiefkast van het Museum Bredius in Den Haag, waarvan de voorkant ontbreekt (de foto is niet vanuit het juiste gezichtspunt genomen). Het idee is later nog wel eens nagevolgd. In de jaren tachtig van de vorige eeuw verpakten sommige Nederlandse bakkers hun gebakjes in een doosje met een kijkgat waarin het interieur van een bakkerij in perspectief was getekend.

Tijdens de voordracht kijken we naar de opzet van het perspectief in dit gebaksdoosje en in de zeventiende-eeuwse kastjes. Hoe zijn de vluchtpunten gekozen? Wat is de relatie tussen de vluchtpunten en de plaats van het kijkgat? Hoe verdeel je de afbeelding van een object dat in het interieur staat over twee of drie wanden van de lege kijkkast? Ten slotte bespreken we de mogelijkheid leerlingen, als praktische opdracht bijvoorbeeld, zelf

een perspectiefdoosje te laten maken.

*Deze workshop is een herhaling van NWD 2001 (toen als plenaire lezing).*

## Een schilderij komt tot leven

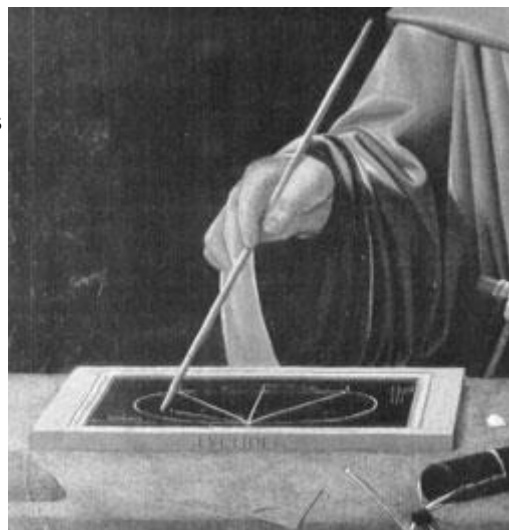
Michel Roelens, KHLim - Dep. Lerarenopleiding, Diepenbeek, België

**vrijdag 14.45-15.30 uur**

Op een lei wordt een meetkundige figuur getekend. Het is een detail van een doek van vijfhonderd jaar geleden, waarop een wiskundeles is vereeuwigd. Van welke leraar is de hand? Wie schildert? Waarover gaat de les? Wie krijgt les?

Vertrekkend van het (volledige) schilderij, willen we deze historische wiskundeles reconstrueren en actualiseren. Hiertoe gaan we even neuzen in oude teksten, wagen we hier en daar een gok en experimenteren we met karton en computer.

*Deze workshop is een herhaling van NWD 1998 (thema Wiskunde en geschiedenis).*



## Geodetische Koepels

Martin Kindt  
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

**vrijdag 16.15-17.00 uur**

Stel je een regelmatig twintigvlak (icosaëder) met omgeschreven bol voor. Een vlak door het middelpunt van de bol en een ribbe van het veelvlak snijdt het boloppervlak volgens een geodetisch boogje dat twee hoekpunten van het veelvlak verbindt. Op deze wijze kun je 30 boogjes maken, evenveel als er ribben zijn aan de icosaëder.

Die 30 boogjes vormen als het ware een geraamte van de bol. Zo'n geraamte van driehoekjes noemt men een geodetische koepel of een geode. In het spraakgebruik veroorloven we ons enige slordigheid: ook het veelvlak waarvan de ribben de koorden zijn bij de geodetische boogjes wordt een geode genoemd. De Amerikaanse architect Richard Buckminster Fuller ontwierp gebouwen als delen van bollen en gebruikte daarbij de geodestructuur. Voor zijn beroemde prototype gebruikte hij de structuur van een veelvlak met 3840 driehoekige zijden. Eén van de beroemdste geodetische koepels staat te Montreal en is destijds gebouwd voor de wereldtentoonstelling.

De structuur van geodes hangt ten nauwste samen met molecuulstructuren die in de scheikunde worden bestudeerd, de zogenaamd buckey balls of fullerenen, waarvan het eenvoudigste voorbeeld de voetbal is met zijn vijf- en zeshoekige zijden. Die voetbalstructuur, een Archimedisches veelvlak, is bijvoorbeeld te vinden in het werk van Albrecht Dürer.

De wiskundige achtergrond van geodes en fullerenen is niet moeilijk te begrijpen en zou in de bovenbouw van havo of vwo kunnen worden behandeld. Met wat combinatoriek, de formule van Euler en de cosinusregel kom je al een heel eind. Bovendien is er op de educatieve markt materiaal te koop waarmee de leerling zelf modellen kan bouwen. De classificatie van alle mogelijkheden levert aardige resultaten op. Die resultaten zijn te bewonderen in het echte leven, zowel in groot formaat (de geodetische bouwwerken) als in de microarchitectuur (moleculen, virussen).

*Deze workshop is een herhaling van NWD 1997 (thema Wiskunde en architectuur)*

## Hoe hard rijdt de auto?

Prof.dr. Jan Aarts  
Faculteit ITS, TU Delft

**vrijdag 16.15-17.00 uur (maximaal 40 deelnemers)**

Kun je de snelheid berekenen van een bewegend voorwerp op een video?

Soms lukt dat. We behandelen in deze workshop een voorbeeld: het gaat om de snelheid van een auto op de video van een reconstructie van een ongeluk. We beschikken over zestien frames van de video, met tussenpozen van 0,2 seconde tussen opeenvolgende frames. De betreffende auto rijdt over een nagenoeg rechte weg. Langs de weg staan (gelukkig) afstandspaaltes met een onderlinge afstand van ongeveer veertig meter. De gegevens over de uitvoering van de reconstructie bevatten voldoende informatie om de virtuele afstand van de frames te berekenen: de afstand van het oog tot het beeld (de kopie van het frame). Met deze kennis kunnen we op een rechte lijn in het frame aangeven: het verdwijnpunt, de positie van de auto en, met behulp van de paaltjes, ijkpunten op deze rechte weg. Daarmee kan voor ieder frame de werkelijke positie van de auto op de weg worden bepaald.

De deelnemers aan de workshop worden uitgenodigd om deze berekening uit te voeren bij één van de frames. De verzamelde gegevens worden dan gebruikt om de snelheid van de auto te berekenen.



*Deze workshop is een herhaling van NWD 2003 (thema Wiskunde en modelleren).*

## **Werkdadige Meetkunst**

Dr. Jan van Maanen  
Rijksuniversiteit Groningen, Vakgroep Wiskunde

**zaterdag 9.00-10.00 uur (60 minuten)**

Morgenster en Knoop, wie kent ze nog? De associatie met een firma in lompen en oud papier dringt zich op, maar in de achttiende eeuw had het tweetal een zekere landelijke bekendheid, en wel als auteurs van het standaardwerk in de Nederlandse taal over landmeten: de *Werkdadige Meetkunst*. Het boek, dat in 1707 voor het eerst verscheen, werd verschillende keren herdrukt. De Fundatie van de Vrijvrouw van Renswoude, een - nog steeds actieve - liefdadige instelling die weesjongens opvoedde tot het eerzame ambt van landmeter, bestelde met regelmaat nieuwe exemplaren en de negentiende-eeuwse opvolger (Gisius Nanning) spreekt met respect over Morgenster en Knoop, ook al vindt hij ze wel wat verouderd.

De *Werkdadige Meetkunst* nodigt de hedendaagse lezer uit tot een hele serie activiteiten. Lezen (vanzelf, daar begin je natuurlijk mee), vergelijken met hoe wij tegenwoordig de meetkunde aanpakken, maar ook de 'werkstukken' zelf uitproberen, zoals bijvoorbeeld het plaatsen van een stok precies midden tussen twee andere stokken in het veld. Als je een Dienaer hebt (deze behoorde net als een opschrijfboekje tot het instrumentarium van de landmeter), gaat dat gemakkelijker dan wanneer je het alleen moet doen. Rechte hoeken maken zonder hoeken te meten: ook een mooi probleem

*Deze workshop is een herhaling van NWD 1996 (thema Wiskunde en geschiedenis).*

## **Pentomino's**

Odette de Meulemeester  
KSO Glorieux, Ronse, België

**zaterdag 9.00-10.00 uur (60 minuten)**

In 1953 introduceerde Solomon W. Golomb, toen student aan de Harvard Universiteit, de term polyomino voor figuren die gevormd worden door eenheidsvierkanten samen te voegen. Omdat een domino bestaat uit twee aaneengesloten vierkanten, stelde Golomb voor figuren met drie vierkanten tromino's te noemen. Die met vier tetromino's, en verder pentomino's, hexomino's, heptomino's, enzovoort. De eenheidsvierkanten kunnen op verschillende manieren aaneengesmeed worden. Er is één monomino en één domino. Er zijn twee verschillende tromino's, vijf verschillende tetromino's en twaalf verschillende pentomino's.

In deze workshop ligt het accent op het uitwisselen van concrete leservaringen omtrent het werken rond pentomino's met leerlingen van dertien, veertien en vijftien jaar. Om mee te beginnen ontdekken



we de verschillende pentomino's (12); eventueel met uitbreiding naar hexomino's (met ontvouwingen van een kubus) en naar pentakubussen (met het bekijken van aanzichten). De meeste toepassingen zijn te vinden in de meetkunde: spiegelen, congruentie, maar vooral bij gelijkvormigheid.

Aan onze eerste wedstrijdopgave (zie onze website) koppelde ik het begrip omtrek en oppervlakte van rechthoek, vierkant en cirkel. Bij het versnijden van pentomino's heeft men prachtige toepassingen op de stelling van Pythagoras en op de irrationale getallen.

Het allerleukste vinden mijn leerlingen en ik onze website: <http://home.planetinternet.be/~demeod>, en de vele, soms verrassende inzendingen, reacties en hulp die we krijgen ([o.d.m@pi.be](mailto:o.d.m@pi.be)) en die we soms belonen met onze zelfgemaakte pentominoset (in de les Technologische Opvoeding).

*Deze workshop is een herhaling van NWD 2002 (winnende docentenworkshop).*

## Escher en het Droste-effect

semi-plenair

Dr. Bart de Smit  
Mathematisch Instituut, Leiden

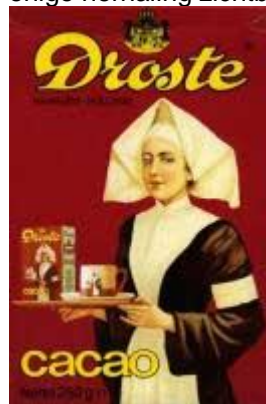
**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Van Eschers vele werken die de realiteit ontstijgen, is de litho 'Prentententoonstelling' een van de meest opmerkelijke. Hierop is een prentententoonstelling afgebeeld waarin een jongeman kijkt naar een prent van een stad. Met een kolkende draaiing is Escher er in geslaagd om de galerij waarin de jongeman staat deel te laten uitmaken van de stad op de prent. In het midden van de draaikolk heeft Escher een wit gat opengelaten met zijn handtekening.



De getaltheoreticus Hendrik Lenstra heeft begin 2000 de wiskundige structuur achter Eschers litho blootgelegd. Zonder dat er in Eschers litho enige herhaling zichtbaar is, blijkt hierbij een Droste-effect op te treden: een afbeelding die zichzelf op kleinere schaal bevat.

In een twee jaar durend project aan de Universiteit van Leiden is het gat in het midden gevuld en zijn computeranimaties gemaakt waarmee de kijker het gat induikt. De resultaten zijn in de zomer van 2002 in de New York Times verschenen en hebben de aandacht getrokken van vele Nederlandse kranten en het NOS-journaal.



Website: [www.mcescher.nl/escherdroste.math.leidenuniv.nl](http://www.mcescher.nl/escherdroste.math.leidenuniv.nl)

*Deze workshop is een herhaling van NWD 2003 (thema Wiskunde en actualiteit).*

## Workshop: 'Het astrolabium'

Dr. Jan Hogendijk  
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

**zaterdag 10.30-11.15 uur**

Een astrolabium is een instrument om met behulp van hemellichamen tijd en plaats te bepalen ('astro' betekent ster en 'labe' betekent vrij vertaald 'nemen' of 'vinden'). In de westerse wereld was dit instrument vanaf de oudheid tot in de zeventiende eeuw in zwang, in de islamitische wereld zelfs tot ver in de negentiende eeuw. Moslims gebruikten het astrolabium ook om hun gebedstijden vast te stellen en voor de oriëntatie op Mekka.

In deze workshop bouwt elke deelnemer uit voorgedrukt papier, drukknop en overheadsheet, een model van de voorkant van een astrolabium. Het model is gebaseerd op het beroemde astrolabium

van al-Khojandi (ca. 985), zie:

[www.ncgia.ucsb.edu/projects/tobler/Qibla/sld041.htm](http://www.ncgia.ucsb.edu/projects/tobler/Qibla/sld041.htm)

Hierna zullen we het model als klok en als kompas leren gebruiken. Zie alvast: [www.math.uu.nl/people/hogend/astro.pdf](http://www.math.uu.nl/people/hogend/astro.pdf).

Het model kan wel in de klas worden gebruikt, maar helaas niet op zee!

*Deze workshop is een herhaling van NWD 2003 (thema Wiskunde en zeevaart).*

# Overige activiteiten

De NWD is in belangrijke mate bedoeld als ontmoetingsplaats. De koffie-, thee- en lunchpauzes bieden u de gelegenheid van gedachten te wisselen met collega's. Maar, zoals u hieronder kunt lezen, er is meer te doen!

## Avondprogramma

De NWD bestaat tien jaar en dat moet gevierd worden! Niet alleen met een zeer uitgebreid lezingenprogramma overdag, maar ook met extra feestelijke avondactiviteiten. Na de avondlezing op vrijdag biedt NH Leeuwenhorst u uit onze naam graag een drankje aan in de buurt van het Auditorium en het Dalí-restaurant, waar het avondprogramma plaats zal hebben. Daar kunt u genieten van theater, muziek en van het muzikale talent van uw collega's.

- **BadmutZ** is een enthousiaste theatersportvereniging uit Utrecht. Theatersport is een improvisatievoorstelling in de vorm van een wedstrijd. Teams dagen elkaar uit tot het spelen van verschillende scènes. De ingrediënten van een scène - de karakters, de relatie tussen de karakters, de plaats van handeling, de inhoud, de stemming, enzovoort - vragen de spelers aan het publiek. Met de suggesties van het publiek spelen de acteurs a l'improvise een (korte) scène. Vanavond zullen zij voor u scènes gaan improviseren en daarbij geldt: U roept, zij spelen!



- Het **Haarlems Straatorkest** bestaat ruim 16 jaar en heeft een groot aantal muziekstijlen op het repertoire staan: van Ska tot Afrikaanse Swing en Big Band; filmmuziek en Oost-Europese nummers; Jazz, Pop, Klezmer, Soul, Blues en vele Cross-overs. Sinds jaar en dag onderhouden ze innige muzikale banden met gelijkgestemde orkesten in binnen- en buitenland en treden ze op in Nederland en daarbuiten. Ze spelen graag in op uw wensen en de sfeer van het moment. Binnen of buiten, op een podium of lopend door de straten: zonder stekkers zijn zij flexibel en mobiel. Het Haarlems Straatorkest speelt muziek van overal voor iedereen van 0 tot 100 jaar, ongeacht opleidingsniveau, gender en haardracht.
- In het verleden is gebleken dat zich onder NWD-bezoekers veel muzikaal talent bevindt. Om dat tot zijn recht te laten komen, vindt vrijdagavond een korte, bruisende muzikale workshop plaats, waarin een **Instant Big Band** wordt gecreëerd. Zangers en instrumentalisten, zowel beginners als gevorderden, werken in een informeel kader enkele bekende muzikale thema's uit. Voor degenen die muziek lezen zijn van tevoren partituren van deze populaire leitmotieven beschikbaar. Het belooft een bijzondere samenspel te worden voor zowel de deelnemers als het publiek. Kom maar op als je durft!

## Funrun

Een vast onderdeel van de Nationale Wiskunde Dagen is de funrun op zaterdagochtend. We lopen weer het bekende rondje van precies 6 km. Deelname is gratis en als beloning ligt er een prachtig T-shirt voor u bij de finish te wachten. Voor de snelste dame en de snelste heer is er een echte (wissel)beker.



De snelste tijd in 2003 was 23:55, gelopen door Alex Philipse. Het record stamt uit 2002 en staat op naam van Leon Tolboom (20:59). Het record bij de vrouwen staat op 25:16 en werd in 2001 gerealiseerd door Wilma den Boer.

De start van de funrun 2004 is stipt om 7.00 uur in de morgen, voor de ingang van NH Leeuwenhorst. Er is geen tijdslimiet, maar u wordt vriendelijk verzocht vóór de eerste lezingen terug te zijn. Wandelen mag trouwens ook, maar dan adviseren we u het halve rondje van 3 km te doen en wat eerder te vertrekken. U kunt de funrun ook skeeleren.

## Nationale Wiskunde Dagen 2005

De elfde Nationale Wiskunde Dagen zijn gepland op vrijdag 4 en zaterdag 5 februari 2005. Bij het organiseren van deze elfde NWD hopen we gebruik te kunnen maken van uw opmerkingen en suggesties naar aanleiding van de NWD van dit jaar. U ontvangt daartoe ter plekke een evaluatieformulier.

*Wij hopen dat u uw opmerkingen gedurende de twee dagen wilt noteren en het formulier aan het eind wilt deponeren in de blauwe bakken. Wij stellen uw mening zeer op prijs!*

### Programmacommissie Uitvoerend comité

J.M. Aarts	J. van Lint	Mieke Abels	Henk v.d. Kooij
H. Eroer	J.A. van Maanen	Michiel Doorman	Jan de Lange
Mw. J. Daemen	J.B.M. Melissen	Paul Drijvers	Sonia Palha
S.J. Doorman	S.W. Rienstra	Sylvia Eerhart	Arneleen Post
S. Garst	M. Roelens	Els Feijs	Heleen Verhage
J. Hop	D. Siersma	Tom Goris	Chris Zaal
Mw. M. Kool	J.J. Tuininga	Ank v.d. Heiden	
J. de Lange	Mw. L. Wesker		

Nationale Wiskunde Dagen  
Freudenthal Instituut  
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht  
tel. 030-263 55 54, fax 030-266 04 30  
email: [nwd@fi.uu.nl](mailto:nwd@fi.uu.nl)  
website: [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)

De Nationale Wiskunde Dagen worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in samenwerking met het Interfacultair Instituut voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievoordigheden (IVLOS) van de Universiteit Utrecht.