KU LEUVEN

Is de Belg een bedreigde soort? Wat een matrixmodel, eigenwaarden en eigenvectoren ons hierover kunnen leren

Johan Deprez

NWD 2025

Kennismaken

- wie ben ik?
- wie zijn jullie?
  - docenten voortgezet onderwijs?
  - (enigszins) vertrouwd met matrices?
  - (enigszins) vertrouwd met eigenwaarden en eigenvectoren?
- wat zullen we doen?
  - matrices maken berekeningen efficiënter en eleganter
  - eigenwaarden en eigenvectoren komen ‘vanzelf’ tevoorschijn in een (min of meer) realistische context
  - (enkel als er tijd is) …
- Uitwiskeling, eigen lespraktijk hoger onderwijs

KU LEUVEN

Deel 1: Een matrixmodel voor de evolutie van de Belgische bevolking

(Even) werken met de echte gegevens

STATBEL – België in cijfers | be.STAT

1. Hoeveel mannen van 60 jaar op 1/1/2024?

   aflezen…

2. Hoeveel vrouwen van 60 jaar op 1/1/2029?

   # vrouwen van 55 op 1/1/2024 aflezen en achtereenvolgens vermenigvuldigen met overlevingskans (1 –sterftekans) van 55-jarigen, …, 59-jarigen

3. Hoeveel 1-jarigen op 1/1/2026?

   via # 0-jarigen op 1/1/2025 = # geboorten in de loop van 2024 (!), vruchtbaarheidscijfers, …

4. Welke vereenvoudigingen heb je toegepast?

   overleving constant over jaren heen, geen migratie, …

Bevolking België op 1/1/2024

leeftijd	mannen	vrouwen	totaal
54	78.957	77.231	156.188
55	78.118	76.996	155.114
56	78.275	76.354	154.629
57	79.462	78.124	157.586
58	80.698	79.485	160.183
59	82.008	81.713	163.721
60	79.687	79.753	159.440
61	77.376	77.538	154.914

2021-2023	BELGIË	
	Mannen	Vrouwen
Verstreken leeftijd (x)	Sterftekans (Qx)	Sterftekans (Qx)
54	0,004502	0,002851
55	0,004799	0,003016
56	0,005605	0,003253
57	0,005870	0,003682
58	0,006195	0,003650
59	0,007421	0,004401
60	0,008093	0,004636
61	0,008761	0,005336

Vruchtbaarheidscijfers volgens de leeftijd van de vrouwen tijdens het jaar bereikt, 2023

Leeftijd van de vrouwen (tijdens het jaar bereikt)	Belgische bevolking
15 jaar	0,0002
16 jaar	0,0004
17 jaar	0,0018
18 jaar	0,0032

Een vereenvoudiging

	leeftijd	totaal 1/1/2024	over-levings-kans	vrucht-baarheids-cijfer
I	0-19	2.600.796	0,98	0,43
II	20-39	2.955.907	0,96	0,34
III	40-59	3.084.365	0,83	0,01
IV	60-79	2.471.832	0,3	0
V	80-99	647.822	0	0

- leeftijdsklassen van 20 jaar
- niemand haalt de 100
- geen onderscheid tussen mannen en vrouwen
- afronding op twee decimalen
- nog altijd: … (zie vorige slide)

1. Leg de betekenis van de 0,98 duidelijk uit.

   kans dat iemand die nu in leeftijdsklasse I zit binnen 20 jaar in II zit

2. Idem voor de 0,43.

   kans dat persoon (!) uit I tussen nu en binnen 20 jaar moeder (!) wordt van een nieuwe baby

3. Hoeveel mensen in klasse V op 1/1/2044?

   # in IV maal overlevingskans

4. En in IV, III en II?

   analoog

Een vereenvoudiging

	leeftijd	totaal 1/1/2024	over-levings-kans	vrucht-baarheids-cijfer
I	0-19	2.600.796	0,98	0,43
II	20-39	2.955.907	0,96	0,34
III	40-59	3.084.365	0,83	0,01
IV	60-79	2.471.832	0,3	0
V	80-99	647.822	0	0

- leeftijdsklassen van 20 jaar
- niemand haalt de 100
- geen onderscheid tussen mannen en vrouwen
- afronding op twee decimalen
- nog altijd: … (zie vorige slide)

5. En, tot slot, in de 1ste klasse?

   som over klasse I, II en III van aantal in de klasse maal vruchtbaarheidscijfer

6. Hoeveel mensen in de 2de klasse op 1/1/2084? Leg uit hoe je dit zou kunnen vinden, zonder het daadwerkelijk te berekenen.

   dit is 3 periodes verder, via aantal in klasse I op 1/1/2064 = aantal geboorten tussen 1/1/2044 en 1/1/2064, dit via aantallen in I, II en III op 1/1/2044 en vruchtbaarheidscijfers

KU LEUVEN

Een matrixmodel

oeps, per ongeluk decimale punten i.p.v. komma's

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2.600.796 \\ 2.955.907 \\ 3.084.365 \\ 2.471.832 \\ 647.822 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{array}{c} \textit{van} \\ \begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \textit{naar}$$

1. Waar vind je de overlevingskansen? Klopt dit met de 'legende' bij de matrix?

   onder de hoofddiagonaal, 98% van wie in I zit zal over 20 jaar in II zitten, …

2. Waar vind je de vruchtbaarheidscijfers? Klopt dit met de 'legende' bij de matrix?

   op de eerste rij, klopt met 'legende' maar wat lastiger neer te schrijven…

3. Waar vind je de bevolkingsaantallen op 1/1/2024?

   in X_0

KU LEUVEN

Een matrixmodel

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2.600.796 \\ 2.955.907 \\ 3.084.365 \\ 2.471.832 \\ 647.822 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{array}{c} \textit{van} \\ \begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \textit{naar}$$

1. Wat stelt het matrixproduct $X_1 = L \cdot X_0$ voor?

   bevolkingsaantallen in elke leeftijdsklasse op 1/1/2044

2. Hoe kun je de bevolkingsaantallen op 1/1/2084 berekenen?

   3 periodes van 20 jaar, $X_2 = LX_1$, $X_3 = LX_2$, $X_3 = L \cdot L \cdot L \cdot X_0 = L^3 \cdot X_0$

- benamingen: Lesliematrix, Lesliemodel
- zie de gelijkenis met een meetkundige rij!
- nog altijd: vereenvoudigingen!

KU LEUVEN

Deel 2: Studie van de langetermijnevolutie leidt tot twee wiskundige begrippen

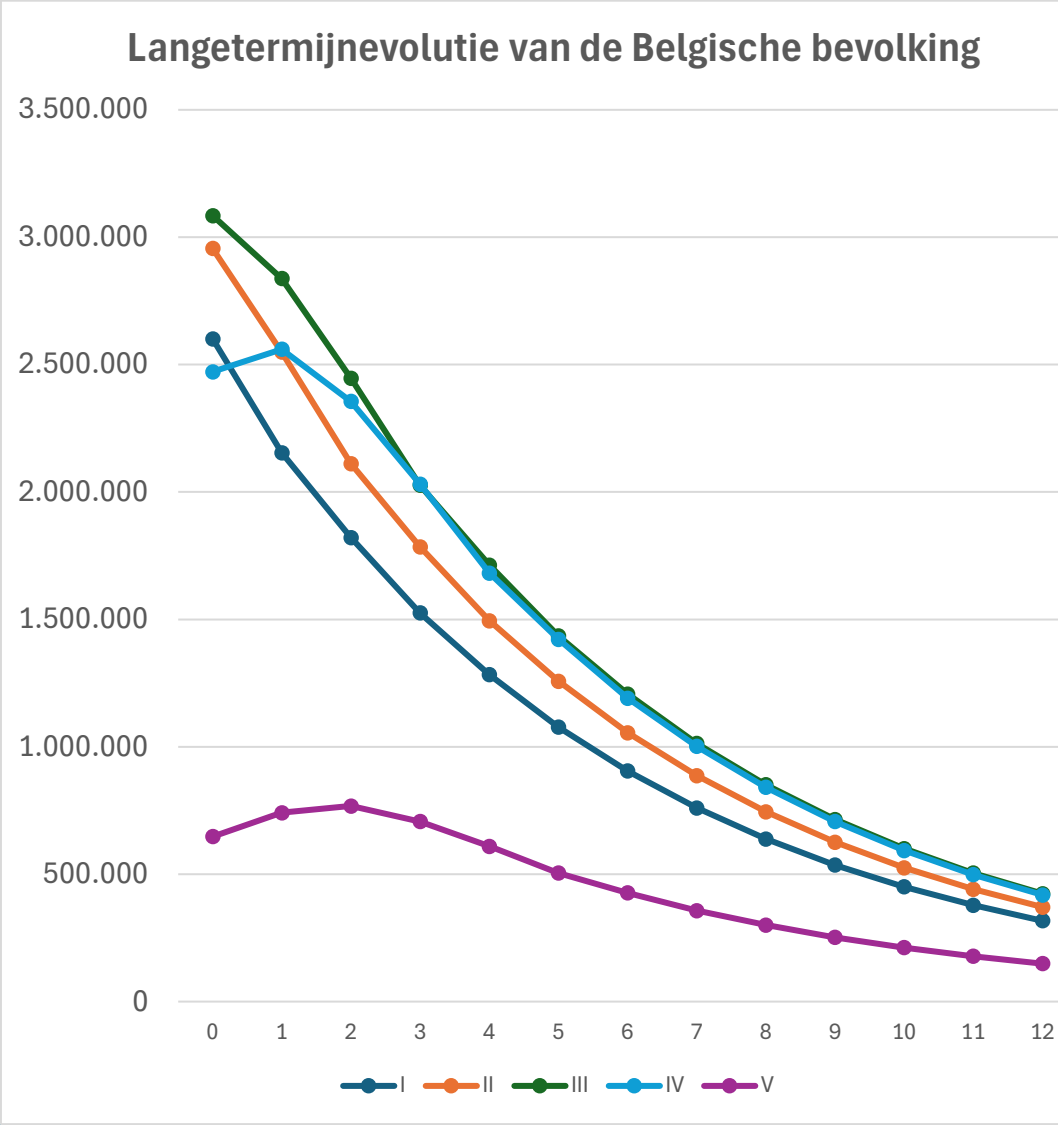
Een grafiek

1. zie de horizontale as: maken we het nu niet te bont met onze ‘voorspellingen’?

   ja en neen… het is niet de werkelijkheid! maar wel: uitvergroting van eigenschappen van onze huidige maatschappij, zoals weerspiegeld in huidige overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers

2. Stel je voor dat je een Belg bent. Waar ben je dan terug te vinden in deze grafiek?

   voor mezelf: op tijdstip 0 op curve IV, op tijdstip 1 op curve V, en dan …



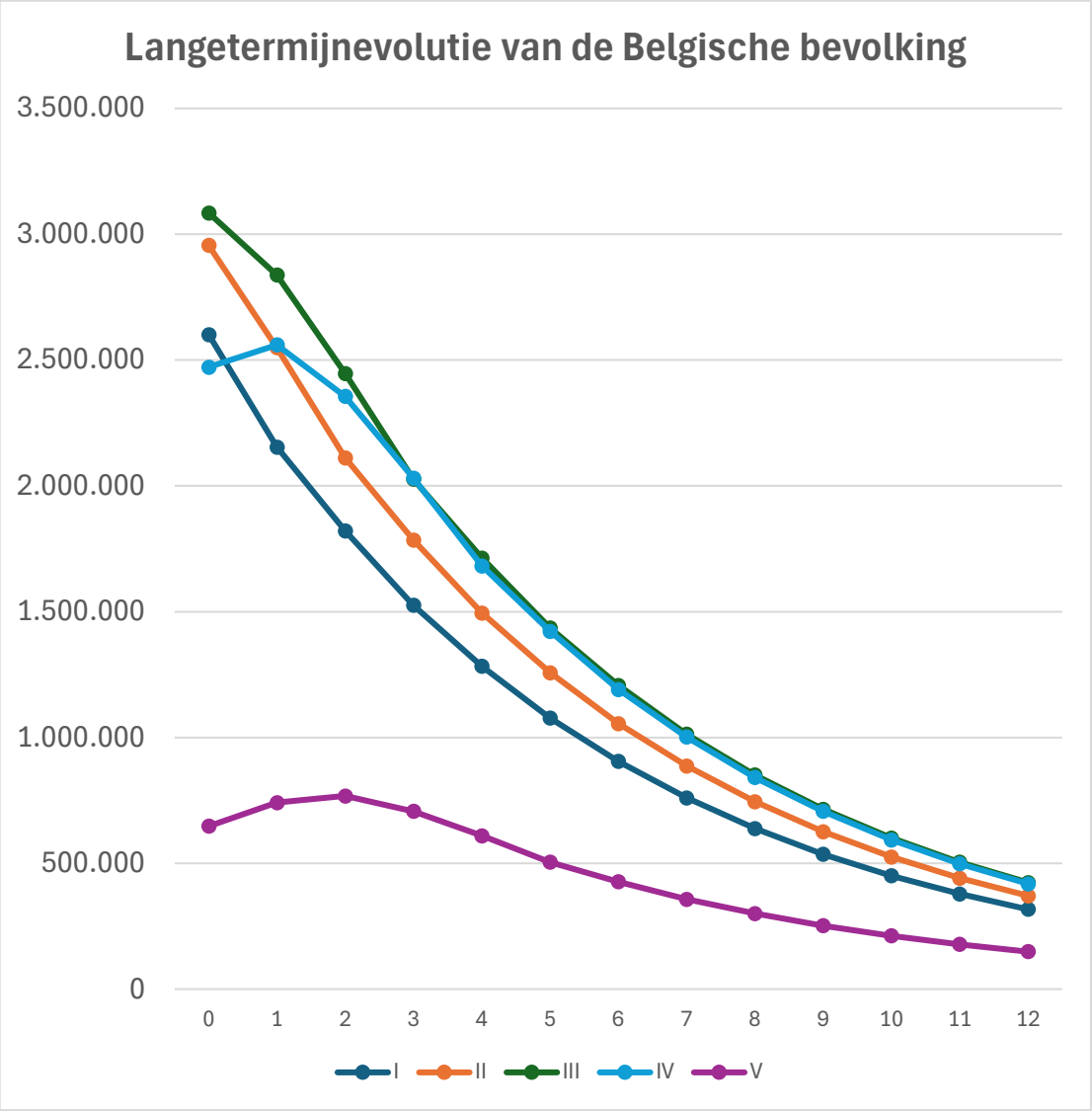
KU LEUVEN

Een grafiek

Bemerk de regelmaat in de grafiek na enkele stappen!

3. Kun je (voor elke leeftijdsklasse, startend op tijdstip 4) een eenvoudige formule bedenken voor de aantallen? Laat je inspireren door de grafieken!

   exponentieel? beginwaarde is aantal op tijdstip 4, groeifactor?



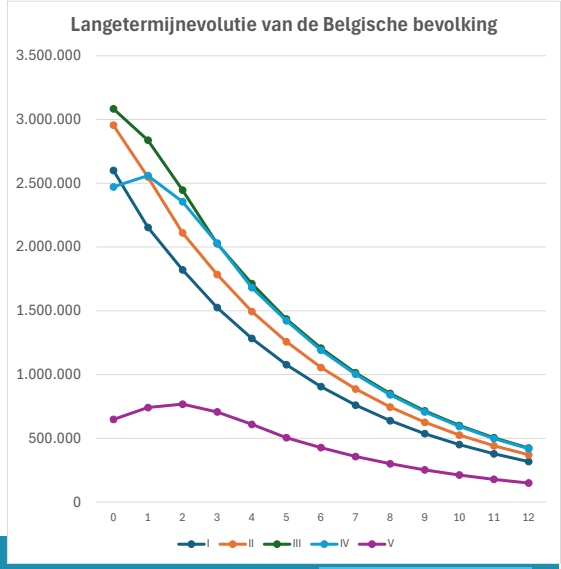
KU LEUVEN

Een grafiek en een tabel

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	2.600.796	2.154.194	1.821.265	1.525.390	1.283.030	1.077.097	905.008	760.113	638.531				
II	2.955.907	2.548.780	2.111.110	1.784.840	1.494.882	1.257.369	1.055.555	886.908	744.911				
III	3.084.365	2.837.671	2.446.829	2.026.666	1.713.447	1.435.087	1.207.075	1.013.333	851.432				
IV	2.471.832	2.560.023	2.355.267	2.030.868	1.682.133	1.422.161	1.191.122	1.001.872	841.067				
V	647.822	741.550	768.007	706.580	609.260	504.640	426.648	357.337	300.562	252.320	212.007	178.063	149.582
TOT	11.760.722	10.842.218	9.502.478	8.074.344	6.782.752	5.696.354	4.785.409	4.019.563	3.376.502	2.836.235	2.382.448	2.001.252	1.681.053

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I		0,828	0,845	0,838	0,841	0,839	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84
II		0,862	0,828	0,845	0,838	0,841	0,839	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84
III		0,92	0,862	0,828	0,845	0,838	0,841	0,839	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84
IV		1,036	0,92	0,862	0,828	0,845	0,838	0,841	0,839	0,84	0,84	0,84	0,84
V		1,145	1,036	0,92	0,862	0,828	0,845	0,838	0,841	0,839	0,84	0,84	0,84
TOT		0,922	0,876	0,85	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84

- twee tabellen
- onderaan: groeifactor t.o.v. het vorige tijdstip
- stabiliseert na verloop van tijd!
- voor elke leeftijdsklasse zelfde groeifactor (0,84)
- … en dus ook voor de hele populatie
- (mijn) benaming: **langetermijngroeifactor**



KU LEUVEN

Nog een tweede vaststelling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I	0,221	0,199	0,192	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189	0,189
II	0,251	0,235	0,222	0,221	0,22	0,221	0,221	0,221	0,221
III	0,262	0,262	0,257	0,251	0,253	0,252	0,252	0,252	0,252
IV	0,21	0,236	0,248	0,252	0,248	0,25	0,249	0,249	0,249
V	0,055	0,068	0,081	0,088	0,09	0,089	0,089	0,089	0,089
TOT	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- tabel toont voor elke leeftijdsklasse welk ‘percentage’ ze vertegenwoordigt van de totale populatie
- stabiliseert na verloop van tijd!
- (mijn) benaming: **langetermijnleeftijdsstructuur**
- hangt samen met het voorgaande!
- herinner je: uitvergroting van eigenschappen van onze huidige maatschappij, zoals weerspiegeld in huidige overlevingskansen en vruchtbaarheidscijfers

KU LEUVEN

Een elegantere manier om de LT-leeftijdsstructuur te bepalen

- bevinding over LT-groeifactor in matrixvorm: voor grote n is

$$X_{n+1} = L \cdot X_n \approx 0{,}84 \cdot X_n$$

- X_n is dus een benaderende oplossing van het stelsel $L \cdot X = 0{,}84 \cdot X$,
- voluit, met $X = [x_1 \ \ldots \ x_5]^t$

$$\begin{cases} 0{,}43x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}01x_3 & = & 0{,}84x_1 \\ 0{,}98x_1 & = & 0{,}84x_2 \\ 0{,}96x_2 & = & 0{,}84x_3 \\ 0{,}83x_3 & = & 0{,}84x_4 \\ 0{,}30x_4 & = & 0{,}84x_5 \end{cases}$$

1. Los dit stelsel op! (tip: begin onderaan)

oneindig veel oplossingen

KU LEUVEN

Een elegantere manier om de LT-leeftijdsstructuur te bepalen

$$\begin{cases} 0{,}43x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}01x_3 & = & 0{,}84x_1 \\ 0{,}98x_1 & = & 0{,}84x_2 \\ 0{,}96x_2 & = & 0{,}84x_3 \\ 0{,}83x_3 & = & 0{,}84x_4 \\ 0{,}30x_4 & = & 0{,}84x_5 \end{cases}$$

1. Bijkomende voorwaarde: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1\ (= 100\%)$

   dit geeft: $x_1 = 0{,}189$, $x_2 = 0{,}221$, $x_3 = 0{,}252$, $x_4 = 0{,}249$, $x_5 = 0{,}089$

   Dit zijn de ‘percentages’ van op de vorige slide!

Conclusie: De LT-leeftijdsstructuur van het Lesliemodel met LT-groeifactor $0{,}84$ is een oplossing van het stelsel $L \cdot X = 0{,}84 \cdot X$ (kies de oplossing met som van de componenten gelijk aan 1)

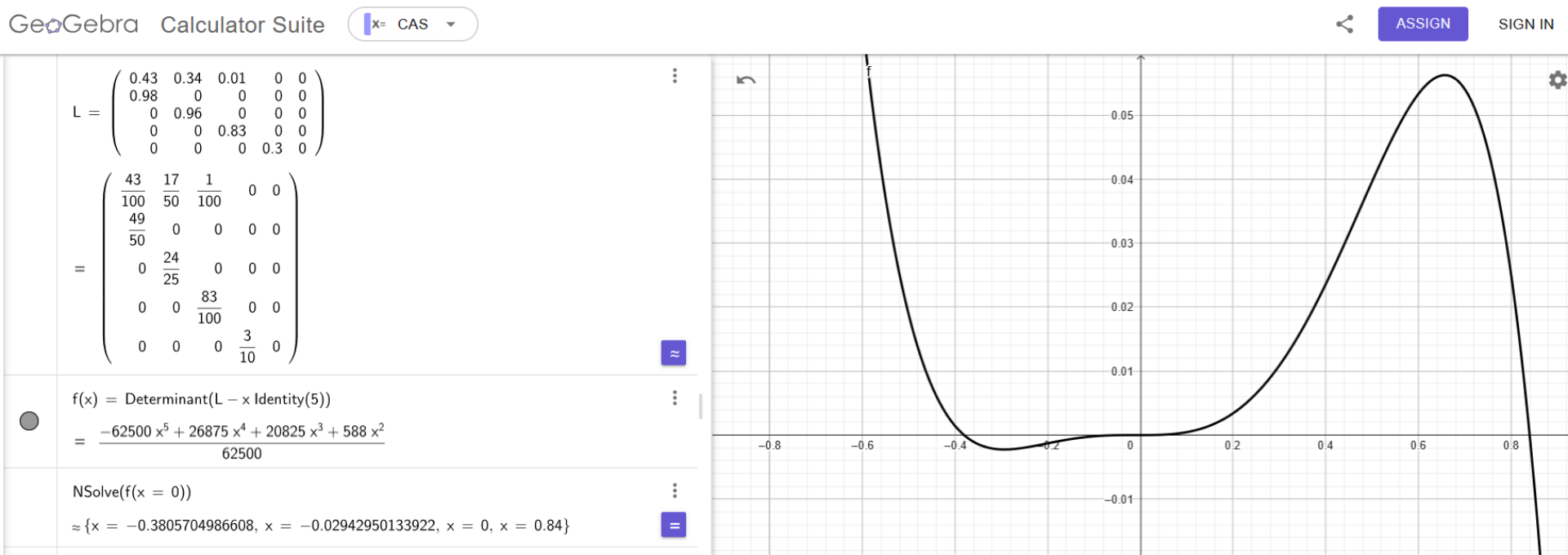
KU LEUVEN

Een elegantere manier om de LT-groeifactor te bepalen

- LT-leeftijdsstructuur is een <u>niet-nuloplossing</u> van het stelsel $L \cdot X = 0{,}84 \cdot X$
- voor de meeste getallen λ heeft het stelsel $L \cdot X = \lambda \cdot X$ <u>alleen de nuloplossing</u>
- $L \cdot X = \lambda \cdot X$ heeft niet-nuloplossingen asa

$$\det(L - \lambda \cdot I_n) = 0$$

- vijfdegraadsvergelijking
- oplossingen voor λ voor het Lesliemodel van de Belgen: zie Geogebra



Een elegantere manier om de LT-groeifactor te bepalen

- LT-leeftijdsstructuur is een <u>niet-nul</u>oplossing van het stelsel $L \cdot X = 0{,}84 \cdot X$
- voor de meeste getallen λ heeft het stelsel $L \cdot X = \lambda \cdot X$ <u>alleen de nuloplossing</u>
- …
- conclusie: De LT-groeifactor van een Lesliemodel is (onder voorwaarden) de enige strikt positieve oplossing van de vergelijking $\det(L - \lambda \cdot I_n) = 0$ (en die is meteen ook de grootste in absolute waarde)

KU LEUVEN

Loskomen van de context

- LT-groeifactor van een Lesliemodel is (een van de) **eigenwaarde**(n) van een matrix.
- LT-leeftijdsstructuur van een Lesliemodel is (een van de) **eigenvector**(en) bij een (van de) eigenwaarde(n)

deze toepassing meer in detail (maar met oudere cijfers): zie https://perswww.kuleuven.be/~u0010098/ bij Lesmateriaal 2005

Deel 3 (enkel als we tijd hebben) Een kleiner voorbeeld, wat dieper duiken in de LT-evolutie en veralgemening voor 2-maal-2-Lesliemodellen

Een 2-maal-2-Lesliemodel

- Lesliemodel $X_n = L \cdot X_{n-1}$ met

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } X_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 800 \end{bmatrix}$$

  (2 leeftijdsklassen, 80% van de 0-jarigen is een jaar later nog in leven, …)

- we berekenen LT-groeifactor en LT-leeftijdsstructuur nu m.b.v. eigenwaarden en eigenvectoren

KU LEUVEN

Eigenwaarden

- zoek λ zo dat $\det(L - \lambda \cdot I_2) = 0$
- $\det \begin{bmatrix} 0{,}2 - \lambda & 1 \\ 0{,}8 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$
- $-\lambda(0{,}2 - \lambda) - 0{,}8 = 0$
- $\lambda^2 - 0{,}2\lambda - 0{,}8 = 0$
- $\lambda = 1$ of $\lambda = -0{,}8$
- LT-groeifactor is 1
- op LT zullen de volledige populatie en de aantallen in elke leeftijdsklasse stabiel blijven

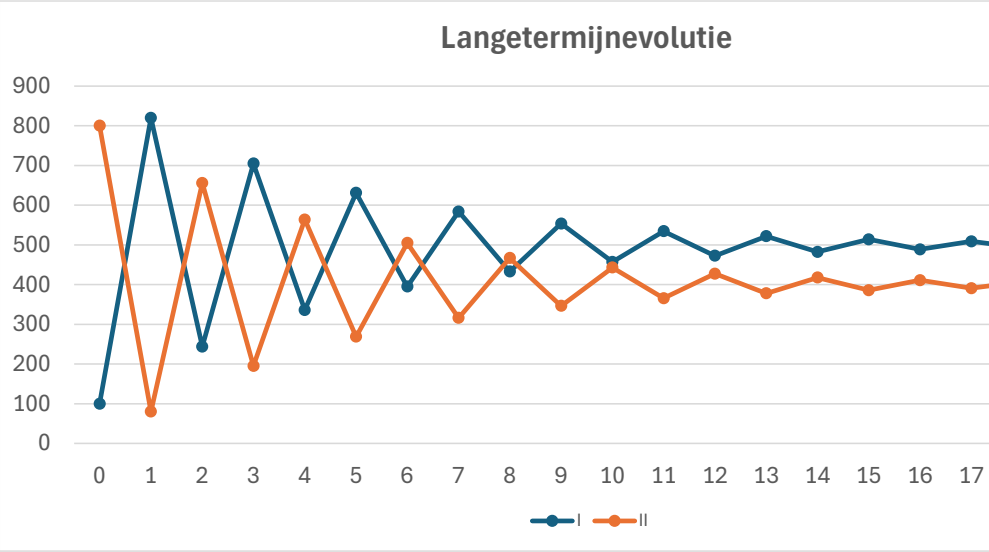
KU LEUVEN

Eigenvectoren

- bij eigenwaarde 1:
  - zoek X zo dat $L \cdot X = 1 \cdot X$
  - $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  - $\begin{cases} 0{,}2x + y = x \\ 0{,}8x = y \end{cases}$
  - stelsel heeft inderdaad oneindig veel oplossingen
  - een eenvoudige oplossing: $E_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
  - LT-leeftijdsstructuur: $\begin{bmatrix} 5/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}55\ldots \\ 0{,}44\ldots \end{bmatrix}$
- bij eigenwaarde $-0{,}8$
  - …
  - een eenvoudige oplossing: $E_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

KU LEUVEN

Verklaring voor de LT-evolutie



- $\mathrm{E}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\mathrm{E}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- eigenvectoren bij de twee eigenwaarden vormen een basis
- $X_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 800 \end{bmatrix} = 100E_1 + 400E_2$
- $X_n = L^n X_0$

  $= L^n \cdot (100E_1 + 400E_2)$

  $= 100 \cdot L^n \cdot E_1 + 400 \cdot L^n \cdot E_2$

  $= 100 \cdot 1^n \cdot E_1 + 400 \cdot (-0{,}8)^n \cdot E_2$

  $= \begin{bmatrix} 500 - 400 \cdot (-0{,}8)^n \\ 400 + 400 \cdot (-0{,}8)^n \end{bmatrix}$

- als n heel groot is, is $(-0{,}8)\hat{}n \approx 0$
- en dus is $X_n \approx \begin{bmatrix} 500 \\ 400 \end{bmatrix}$
- opmerking
  - in het algemeen is de ‘dominante eigenwaarde’ niet gelijk aan 1
  - maar (onder voorwaarden) $\lambda_1 > |\lambda_2|$
  - en dus convergeert $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n$ naar 0

KU LEUVEN

Algemeen 2-maal-2-Lesliemodel

- 2×2-Lesliematrix in het algemeen $L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ p & 0 \end{bmatrix}$, met
  - f_1 en f_2 de vruchtbaarheidscijfers van de eerste en tweede leeftijdsklasse
  - p het overlevingscijfer van de eerste leeftijdsklasse
- we veronderstellen dat $f_1 > 0$ en $f_2 > 0$ en $0 < p < 1$
- twee eigenwaarden

$$\lambda_1 = \frac{f_1 + \sqrt{f_1^2 + 4pf_2}}{2} > 0 \text{ en } \lambda_2 = \frac{f_1 - \sqrt{f_1^2 + 4pf_2}}{2} < 0 \text{ met } \lambda_1 > |\lambda_2|$$

Algemeen 2-maal-2-Lesliemodel

- eigenvectoren
  - bij λ_1: alle niet-nul-veelvouden van $E_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ p \end{bmatrix}$

    (beide componenten strikt positief)
  - bij λ_2: alle niet-nul-veelvouden van $E_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ p \end{bmatrix}$

    (componenten zijn tegengesteld)
- elke beginpopulatie X_0 is een lineaire combinatie van E_1 en E_2
- hiermee kun je een formule opstellen voor X_n
- conclusie: op lange termijn
  - groeien de totale populatie en de aantallen in beide leeftijdsklassen bij benadering exponentieel met groeifactor λ_1
  - wordt de leeftijdsstructuur gegeven door het veelvoud van E_1 waarvan de som van de componenten 1 is

KU LEUVEN