KU LEUVEN

Bijzondere krommen in de driedimensionale ruimte

Nationale Wiskunde Dagen 2024

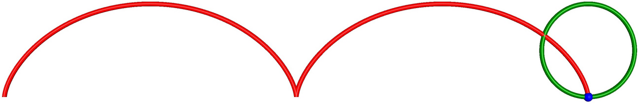
Wendy Goemans
KU Leuven

0 Inhoud

1 Outline

1 Inleiding

- Vlakke krommen



- Kromming van vlakke krommen
  - Nicolas d'Oresme (14de eeuw, kwalitatief)
  - Galileo Galilei (16de - 17de eeuw)
  - Sir Isaac Newton (17de - 18de eeuw, osculerende cirkel)
  - Gottfried Wilhelm Leibniz (17de - 18de eeuw)
  - Leonhard Euler (18de eeuw, booglengte en kromming)
  - ...

1 Inleiding

- Kromming van ruimtekrommen
  - Alexis Clairaut (18de eeuw)
  - Gaspard Monge (eind 18de - begin 19de eeuw)
  - Augustin Cauchy (19de eeuw)
  - Barré de Saint-Venant (19de eeuw, binormaal)
  - ...
  - Frenet-Serret formules
    - Karl E. Senff (1831)
    - Gasparo Michel-Marie Pagani de la Torre (1832, 1847)
    - Jean Frédéric Frenet (1845 of 1847)
    - Joseph Alfred Serret (1851)

Referenties

- Sebastián Montiel & Antonio Ros (2009) Curves and Surfaces in Graduate Studies in Mathematics Volume 69
- Dirk Huylebrouck (2018) Wiskundige markies in 'Dorp van de Ronde' in Het Laatste Nieuws 31 maart 2018

2 Outline

2 Voorbereiding

Voor vectoren

$$v = (v_1, v_2, v_3)\,, w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

definiëren we

- het *Euclidisch scalair product*

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

- de *norm* of *lengte van een vector*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

- *orthogonale vectoren*

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$$

Deze bewerking op vectoren is compatibel met het nemen van de afgeleide

-

$$\langle v(s), w(s)\rangle' = \langle v'(s), w(s)\rangle + \langle v(s), w'(s)\rangle$$

2 Voorbereiding

Voor vectoren

$$v = (v_1, v_2, v_3)\,,\, w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

definiëren we

- het *vector product*

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

- $v \times w \perp v$ en $v \times w \perp w$
- als $\|v\| = \|w\| = 1$ en $v \perp w$, dan is $\|v \times w\| = 1$ en dan vormen $(v, w, v \times w)$ een rechtsdraaiend referentiestelsel

De vector $\dfrac{v}{\|v\|}$ (voor $v \neq (0,0,0)$) heeft lengte 1

3 Outline

3 Krommen in de driedimensionale ruimte

Voor een kromme met *parametrisatie*

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$$

definiëren we

- de *raakvector* of *snelheidsvector* langs β

$$\beta'(s) := (\beta_1'(s), \beta_2'(s), \beta_3'(s))$$

- de *snelheid* van β in $\beta(s)$

$$v_\beta(s) := \|\beta'(s)\|$$

  een *booglengtegeparametriseerde kromme* heeft snelheid $v_\beta(s) \equiv 1$
- de *raaklijn* aan β in $\beta(s)$

$$\beta(s) + t\beta'(s)$$

4 Outline

4 Het Frenet-Serret referentiestelsel

Voor een booglengtegeparametriseerde kromme met parametrisatie

$$\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$$

definiëren we

- de *raakvector in* $\beta(s)$

$$T(s) := \beta'(s)$$

Aangezien $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ is $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$ dus $T'(s) \perp T(s)$
Definieer

- de *kromming in* $\beta(s)$

$$\kappa(s) := \| T'(s) \|$$

De kromme β is (een deel van) een rechte $\Leftrightarrow \kappa(s) \equiv 0$

4 Het Frenet-Serret referentiestelsel

Stel $\kappa(s) \neq 0$ en definieer

- de *hoofdnormaalvector in* $\beta(s)$

$$N(s) := \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$$

- de *binormaalvector in* $\beta(s)$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

- het *Frenet-Serret referentiestelsel*

$$(T(s), N(s), B(s))$$

4 Frenet-Serret referentiestelsel vlakken

Vlak opgespannen door	noemen we het	met vergelijking
$T(s)$ en $N(s)$	*osculatievlak*	$\langle x - \beta(s), B(s)\rangle = 0$
$N(s)$ en $B(s)$	*normaal vlak*	$\langle x - \beta(s), T(s)\rangle = 0$
$T(s)$ en $B(s)$	*rectificerend vlak*	$\langle x - \beta(s), N(s)\rangle = 0$

4 De Frenet-Serret formules

De *Frenet-Serret formules*

$$\begin{cases} T'(s) & = & & \kappa(s)N(s) & \\ N'(s) & = & -\kappa(s)T(s) & & +\tau(s)B(s) \\ B'(s) & = & & -\tau(s)N(s) & \end{cases}$$

drukken de wijziging van het Frenet-Serret referentiestelsel langsheen de kromme uit in functie van het Frenet-Serret referentiestelsel zelf

Hiervoor definiëren we

- de *torsie in* $\beta(s)$

$$\tau(s) := -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

4 De Frenet-Serret formules

De Frenet-Serret formules werden toegewezen aan

- Karl E. Senff (1831)
- Gasparo Michel-Marie Pagani de la Torre (1832, 1847)
- Jean Frédéric Frenet (1845 of 1847)
- Joseph Alfred Serret (1851)

Referenties

- Sebastián Montiel & Antonio Ros (2009) Curves and Surfaces in Graduate Studies in Mathematics Volume 69
- Dirk Huylebrouck (2018) Wiskundige markies in 'Dorp van de Ronde' in Het Laatste Nieuws 31 maart 2018

4 Meetkundige betekenis van kromming en torsie

Meetkundige betekenis van kromming en torsie van een kromme β

- $\beta(s)$ ligt in een vlak $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$
- $\beta(s)$ is een cirkel $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$ en $\kappa(s) \equiv c$ met c een reëel getal

5 Outline

5 Schroeflijnen of helices

Een kromme is een *cilinderschroeflijn* of *cilindrische helix* als de raakvector een constante hoek maakt met een vaste vector. In symbolen

- β is een cilinderschroeflijn $\Leftrightarrow$ er bestaan een $u \in \mathbb{R}^3$ en $\theta \in \mathbb{R}$ zodat

$$\langle T(s), u \rangle = \cos \theta$$

- u noemen we de *as van de cilinderschroeflijn*
- een cilinderschroeflijn groeit lineair in de richting van zijn as
- een cilinderschroeflijn is een kromme op een veralgemeende cilinder
- een cirkelschroeflijn is een speciale cilinderschroeflijn

5 Meetkundige betekenis van kromming en torsie

Meetkundige betekenis van kromming en torsie van een kromme β

- $\beta(s)$ ligt in een vlak $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$
- $\beta(s)$ is een cirkel $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$ en $\kappa(s) \equiv c$ met c een reëel getal
- β is een cirkelschroeflijn $\Leftrightarrow \kappa(s)$ en $\tau(s)$ zijn constant
- β is een cilinderschroeflijn $\Leftrightarrow \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} \equiv c$ met c een reëel getal

5 Frenet-Serret referentiestelsel vlakken

Vlak opgespannen door	noemen we het	met vergelijking
$T(s)$ en $N(s)$	osculatievlak	$\langle x - \beta(s), B(s) \rangle = 0$
$N(s)$ en $B(s)$	normaal vlak	$\langle x - \beta(s), T(s) \rangle = 0$
$T(s)$ en $B(s)$	rectificerend vlak	$\langle x - \beta(s), N(s) \rangle = 0$

Wat als alle ... vlakken een vast punt bevatten?

5 Enkele bijzondere krommen

Bevatten een vast punt	de kromme is een
alle osculatievlakken	?
alle normaal vlakken	?
alle rectificerende vlakken	?

5 Enkele bijzondere krommen

Bevatten een vast punt	de kromme is een
alle osculatievlakken	vlakke kromme
alle normaal vlakken	?
alle rectificerende vlakken	?

5 Enkele bijzondere krommen

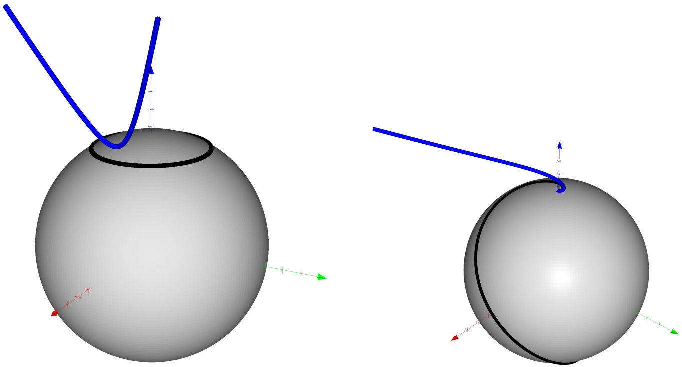
Bevatten een vast punt	de kromme is een
alle osculatievlakken	vlakke kromme
alle normaal vlakken	sferische kromme
alle rectificerende vlakken	?

Definieer een *rectificerende kromme* als een kromme waarvan alle rectificerende vlakken een vast punt bevatten

Referenties

- Bang-Yen Chen (2003) When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? in The mathematical association of America Monthly 110 p147-152
- Bang-Yen Chen & Franki Dillen (2005) Rectifying curves as centrodes and extremal curves in Bulletin institute of Mathematics Academia Sinica 33(2) p77-90

5 Rectificerende krommen



5 Rectificerende krommen

Een rectificerende kromme is een kromme waarvan alle rectificerende vlakken een vast punt bevatten

Eventueel na een translatie is het vast punt de oorsprong en kunnen we een rectificerende kromme parametriseren als

$$\beta(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

met λ en μ functies van de parameter s

β is een rectificerende kromme $\Leftrightarrow \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} = as + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

Referentie

- Dong-Soo Kim, Hei-Sun Chung & Kwan-Hee Cho (1993) Space curves satisfying $\tau/\kappa = as + b$ in Honam Mathematical Journal 15(1) p5-9

5 Meetkundige betekenis van kromming en torsie

Meetkundige betekenis van kromming en torsie van een kromme β

- $\beta(s)$ ligt in een vlak $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$
- $\beta(s)$ is een cirkel $\Leftrightarrow \tau(s) \equiv 0$ en $\kappa(s) \equiv c$ met c een reëel getal
- β is een cirkelschroeflijn $\Leftrightarrow \kappa(s)$ en $\tau(s)$ zijn constant
- β is een cilinderschroeflijn $\Leftrightarrow \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} \equiv c$ met c een reëel getal
- β is een rectificerende kromme $\Leftrightarrow \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} = as + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

6 Outline

6 Geodeten

Waarom is een rechte als verbinding tussen twee punten in $\mathbb{R}^3$ interessant?

- kortste afstand
- geen kromming

Een geodeet is een kromme op een oppervlak die het 'equivalent' is van een rechte in $\mathbb{R}^3$

- lokaal de kortste afstand
- geen kromming in het oppervlak

6 Geodeten op oppervlakken

Oppervlak	geodeten	kromming(en)
$\mathbb{R}^3$	rechten	$\kappa \equiv 0$
sfeer	grote cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
circulaire cilinder	?	
veralgemeende cilinder	?	
kegel	?	

6 Geodeten op oppervlakken

Oppervlak	geodeten	kromming(en)
$\mathbb{R}^3$	rechten	$\kappa \equiv 0$
sfeer	grote cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
circulaire cilinder	rechten	$\kappa \equiv 0$
	cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
	circulaire helices	κ en τ constant
veralgemeende cilinder	?	
kegel	?	

6 Geodeten op oppervlakken

Oppervlak	geodeten	kromming(en)
$\mathbb{R}^3$	rechten	$\kappa \equiv 0$
sfeer	grote cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
circulaire cilinder	rechten	$\kappa \equiv 0$
	cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
	circulaire helices	κ en τ constant
veralgemeende cilinder	rechten	$\kappa \equiv 0$
	cilindrische helices	$\frac{\tau}{\kappa} \equiv$ constant
kegel	?	

6 Geodeten op oppervlakken

Oppervlak	geodeten	kromming(en)
$\mathbb{R}^3$	rechten	$\kappa \equiv 0$
sfeer	grote cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
circulaire cilinder	rechten	$\kappa \equiv 0$
	cirkels	$\kappa \equiv$ constant en $\tau \equiv 0$
	circulaire helices	κ en τ constant
veralgemeende cilinder	rechten	$\kappa \equiv 0$
	cilindrische helices	$\dfrac{\tau}{\kappa} \equiv$ constant
kegel	rechten	$\kappa \equiv 0$
	rectificerende	$\dfrac{\tau}{\kappa} = as + b$
	krommen	met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

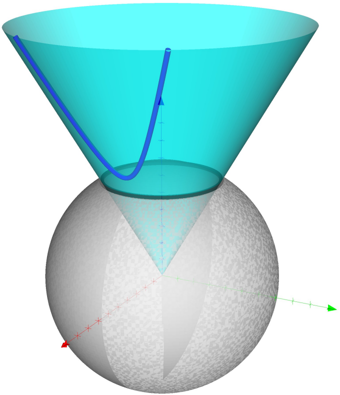
6 Geodeten op een kegel

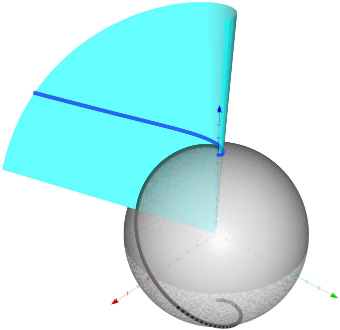
Rectificerende krommen zijn geodeten op een kegel

Referentie

- Shyuichi Izumiya & Nobuko Takeuchi (2004) New special curves and developable surfaces in Turkish Journal of Mathematics 28 p153-163

6 Rectificerende krommen als geodeten op een kegel





Dank u voor uw aandacht

Vragen?

E-mail wendy.goemans@kuleuven.be

Referentie

- Joeri Van der Veken (2018) Meetkunde I cursus KU Leuven