Waarom bewijzen?

Karim Zahidi (UGent, UAntwerpen)

NWD 2024

Inleiding

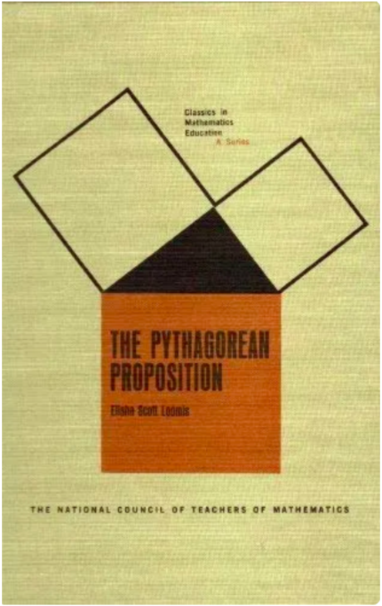
Wat is een bewijs?

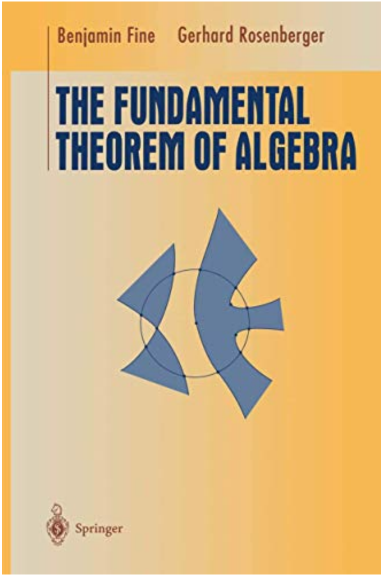
- redenering die overtuigt dat een bepaalde wiskundige uitspraak waar is
- redenering is sluitend
- Standaard-opvatting: opeenvolging van wiskundige uitspraken die volgen uit eerdere uitspraken via waarheidsbehoudende afleidingsregels

Waarom bewijzen?

- wiskunde:zekerheid
- bewijs levert zekerheid
- is dit de enige functie van bewijzen?

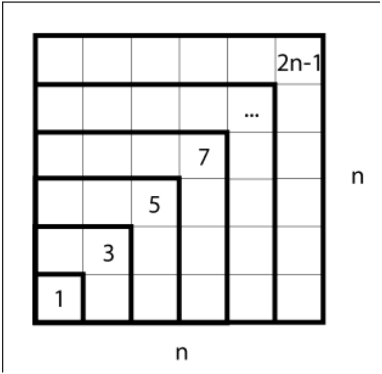
Waarom zo veel bewijzen?





Caveat: niet alle bewijzen zijn tekst

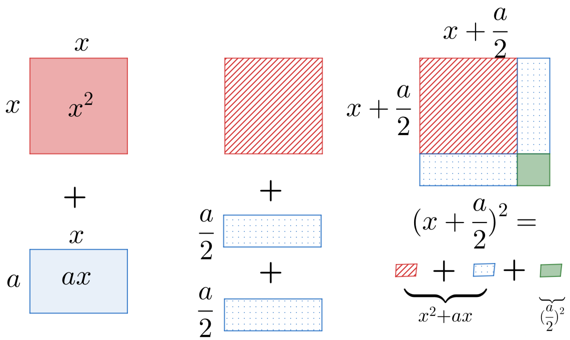
De som van de eerste n oneven getallen is n^2.
Bewijs:



Caveat: niet alle bewijzen zijn tekst

$$x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

Bewijs:



Wiskundige kennis zonder bewijzen?

Gedachtenexperiment: PYTHAGORIA (Y. Rav)

- wiskundig orakel
- 100% betrouwbaar
- voor elke wiskundige uitspraak geeft PYTHAGORIA het antwoord “waar” of “vals”
- is PYTHAGORIA een bron van wiskundige kennis?

Gedachtenexperiment: PYTHAGORIA (Y. Rav)

De laatste stelling van Fermat

- $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2, \forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = z^n \Rightarrow xyz = 0$
- wat zouden we gemist hebben mocht Fermat Pythagoria hebben geraadpleegd?:
  - algebraïsche getaltheorie
  - theorie elliptische krommen en modulaire vormen
- Rav: wiskundige kennis groeit door het proberen oplossen van problemen
- sterker nog: we zouden nooit in staat zijn om vragen te formuleren

Waarom herbewijzen?

Ravs metafoor

Ravs metafoor

Think of proofs as a network of roads in a public transportation system, and regard statements of theorems as bus stops; [...] (Rav, 1999)

Ravs metafoor

- wiskundige kennis als netwerk
- groei wiskundige kennis:
  - “geografische uitbreiding van het netwerk ” (meer bushaltes/stellingen)
  - verdichting van het netwerk (meer busroutes/meer bewijzen)
- epistemisch functies van bewijzen:
  - unificatie
  - verklaring
  - zekerheid

Verklarende bewijzen

Voorbeeld: Rekenmachine-getallen

- rekenmachine-getallen: getallen waarvan decimale notatie bestaat uit de 4 hoekpunten van een rechthoek (doorlopen in (tegen)wijzerzin)
- bv: $7931 : 11 = 721$,
  $1397 : 11 = 127$
  $5632 : 512 = 218$
- vermoeden: alle rekenm.-getallen zijn deelbaar door 11
- hoe bewijzen?

Voorbeeld: Rekenmachine-getallen

- hoe bewijzen?
- bewijs 1: eindig veel rechthoeken, controleer voor elke van de getallen deelbaarheid door 11
- saai!!
- waarom deze eigenschap?

Voorbeeld: Rekenmachine getallen

- getallen van de vorm: $A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D$
- herschrijf als: $A \cdot (10^3 + 1) + B \cdot (10^2 - 1) + C \cdot (10 + 1) + D - A + B - C$
- is deelbaar door 11 (want $(10^3 + 1) = (10^2 - 10 + 1)(10 + 1)$ en $(10^2 - 1) = (10 + 1)(10 - 1)$
- is 0
- getal is deelbaar door 11

Vergelijking 2 bewijzen

- rekenbewijs toont aan dat de eigenschap geldt
- maar geeft geen enkele verband tussen de manier waarop de getallen geconstrueerd zijn
- tweede bewijs verbindt de waarheid van de uitspraak met de manier waarop getallen zijn geconstrueerd
- maakt duidelijk waarom ander constructiemethoden (met hoekpunten van rechthoek) niet werken:

Vergelijking 2 bewijzen

- 2de bewijs is ook toepasbaar op andere bepaalde andere constructie methodes (bv hoekpunten van een parallelogram)

- bewijs geeft nodig en voldoende voorwaarde voor deelbaarheid in termen van de cijfers

Verklarende bewijzen

- geven antwoord op de vraag waarom een bepaalde eigenschap geldt voor bepaalde wiskundige objecten
- vergroten het begrip
- laten toe om “wat als”-vragen te beantwoorden

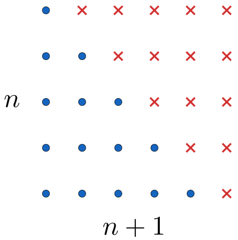
Som eerste n natuurlijke getallen: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Inductief bewijs

$S(1) = 1$

$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Bewijs van Gauss



$$\# \bullet + \# \times = 2S(n)$$

Karim Zahidi (UGent, UAntwerpen)

Irrationaliteit $\sqrt{2}$

Bewijs I

- onderstel $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ met $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$, dan $a^2 = 2b^2$
- dus a^2 even, maar dan ook a even (kwadraat van een oneven getal is oneven; bewijs: rekenen)
- dus a^2 deelbaar door 4
- dus b^2 even, en dus b even
- contradictie!

Irrationaliteit $\sqrt{2}$

Bewijs II

- unieke priemfactorisatie van natuurlijke getallen: voor elk natuurlijk getal n bestaan er priemgetallen $p_1, p_2 \ldots, p_k$ en exponenten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ zodat

  $$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

  Deze factorisatie is uniek.
- onderstel $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dan $a^2 = 2b^2$
- 2 komt voor met even exponent in factorisatie van a^2 maar met oneven exponent in factorisatie van $2b^2$
- in tegenspraak met unieke priemfactorisatie

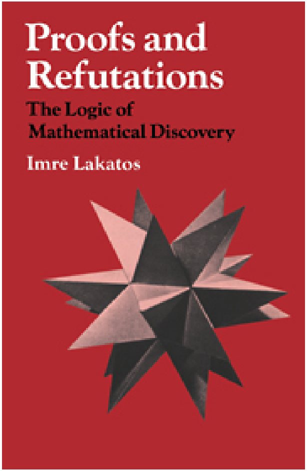
Irrationaliteit $\sqrt{2}$

- bewijstechniek II kan zonder verder rekenwerk gebruikt worden om te bewijzen dat $\sqrt{a}$ irrationeel is voor elke $a \neq \square$
- bewijstechniek I kan niet zonder verder (vervelend) rekenwerk veralgemeend worden
- generalisatie is mogelijk omdat bewijs II gebruik maakt van karakteriserende essentiële eigenschap
- bewijs II gaat naar de essentie

Bewijzen en concept formatie

Karim Zahidi
(UGent,
UAntwerpen)

Bewijzen en concept formatie



Imre Lakatos

- Imre Lakatos: Hongaars filosoof (1922-1974)
- 1956 emigratie uit Hongarije naar Londen (LSE)
- volgeling van Karl Popper
- Poppers falsificationisme toepassen op wiskunde
- dialectische filosofie van de wiskunde

Proofs and refutations

- studie over het vermoeden van Descartes-Euler over polyhedra
- $V = \#$ hoekpunten, $E = \#$ ribben en $F = \#$ zijvlakken

Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $\chi = V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	**2**
Hexahedron or cube		8	12	6	**2**
Octahedron		6	12	8	**2**
Dodecahedron		20	30	12	**2**
Icosahedron		12	30	20	**2**

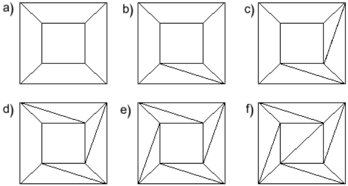
- Vermoeden van Descartes-Euler: voor polyhedra geldt:

$$V - E + F = 2$$

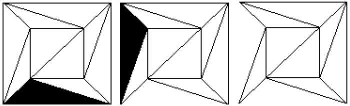
Karim Zahidi (UGent, UAntwerpen)

Cauchy's bewijs

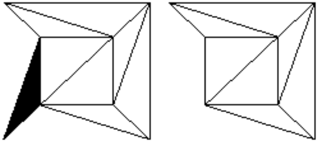
Stap 1: $V - E + F = 1$



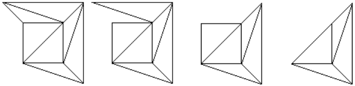
Stap 2: $V - E + F = 1$



Stap 3: $V - E + F = 1$



Stap 4: $V - E + F = 1$



Tegenvoorbeeld

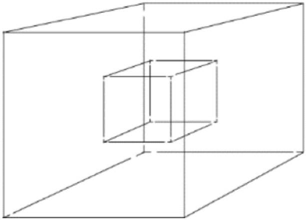


Fig. 5[xii]

Figure: $F = 12$, $E = 24$, $V = 16$, dus $V - E + F = 4$ (credits: `https://wisaarkhu.co.za/`)

Feilbaarheid van wiskundige bewijzen

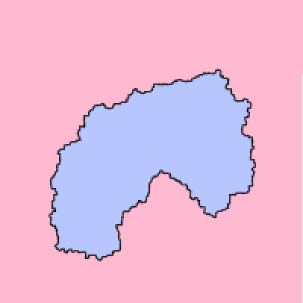
- fout bewijs?
- wat bewijst het bewijs?
- ja, maar...
- historisch variatie van notie "bewijs"
- kritiek op bewijs als van wezenlijk belang bij de groei van wiskundige kennis
- concept-formatie

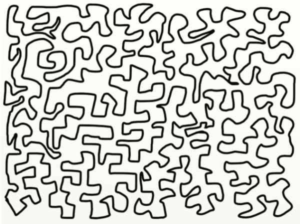
Bewijzen als bruggen tussen verschillende domeinen

Continu vs. discreet

Stelling van Jordan (continu)

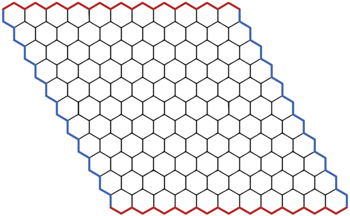
Een gesloten enkelvoudige vlakke kromme verdeelt het vlak in twee samenhangende componenten (Camille Jordan 1887, Oswald Veblen 1905).

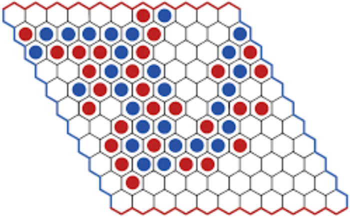




Continu vs. discreet

Hex (discreet)





Hex-stelling: elk spelletje Hex heeft een winnaar (Piet Hein, John Nash)
Stelling: Hex-stelling is equivalent met stelling van Jordan (David Gale 1978)

Coda

A good proof is one that makes us wiser. (Yuri Manin)