Piekeren over π

Nationale Wiskunde Dagen 2024

Berend Ringeling
b.j.ringeling@gmail.com

April 11, 2024

Hoeveel decimalen van π weet u er?

Hoeveel decimalen van π weet u er?

...Ik (slechts) tien...

Hoeveel decimalen van π weet u er?

...Ik (slechts) tien...
Het huidige record (14 maart 2024):

Hoeveel decimalen van π weet u er?

...Ik (slechts) tien...

Het huidige record (14 maart 2024):

$105;000;000;000;000 = 1{:}05 \quad 10^{14}$ decimalen.

Geschiedenis van π benaderen: De Oudheid

Geschiedenis van π benaderen: De Oudheid

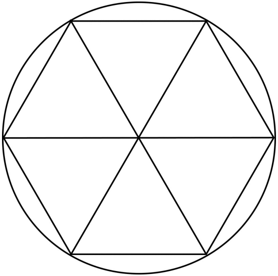
De Babyloniërs (ongeveer 2000 jaar voor Christus) gebruikten de benadering $3\frac{1}{8} = 3.125.$

Geschiedenis van π benaderen: De Oudheid

De Babyloniërs (ongeveer 2000 jaar voor Christus) gebruikten de benadering $3\frac{1}{8} = 3.125.$ De Egyptenaren: $\frac{256}{81} = 3.1604\ldots$

Geschiedenis van π benaderen: De Oudheid

De Babyloniërs (ongeveer 2000 jaar voor Christus) gebruikten de benadering $3\frac{1}{8} = 3.125.$ De Egyptenaren: $\frac{256}{81} = 3.1604\ldots.$ Vervolgens vond Archimedes veel meer decimalen van , door een cirkel te benaderen met reguliere veelhoeken.



Geschiedenis van π benaderen: De nieuwe tijd


THE
SIMPSONS

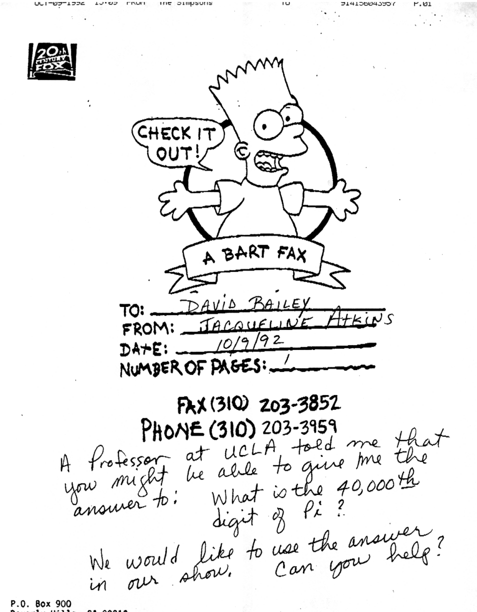
Video

Video

"In fact, I can recite to 40,000 places. The last digit is one"

Marge in Chains { The Simpsons

Simpsons



OCT-09-1992 15:09 FROM The Simpsons TO 914156043957 P.01

CHECK IT OUT!

A BART FAX

TO: DAVID BAILEY

FROM: JACQUELINE ATKINS

DATE: 10/9/92

NUMBER OF PAGES: 1

FAX (310) 203-3852

PHONE (310) 203-3959

A Professor at UCLA told me that you might be able to give me the answer to: What is the 40,000th digit of Pi?

We would like to use the answer in our show. Can you help?

P.O. Box 900

Simpsons

Merk op dat dit twee verschillende vragen zijn!

Simpsons

Merk op dat dit twee verschillende vragen zijn!

- Wat zijn de eerste 40,000 decimalen van ?

Simpsons

Merk op dat dit twee verschillende vragen zijn!

- Wat zijn de eerste 40,000 decimalen van ?
- Wat is de 40,000^{e} decimaal van ?

Simpsons

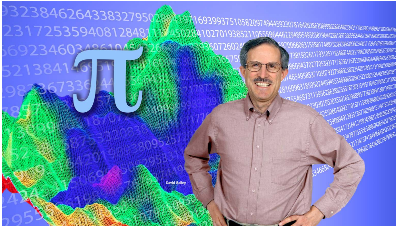


Figure: David Bailey

Simpsons

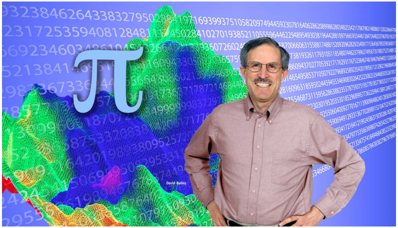


Figure: David Bailey

Hij is de mede uitvinder van de zogenaamde BBP-formule:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \quad \frac{4}{8n+1} \quad \frac{2}{8n+4} \quad \frac{1}{8n+5} \quad \frac{1}{8n+6} \quad .$$

Simpsons

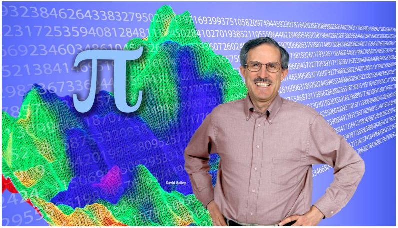


Figure: David Bailey

Hij is de mede uitvinder van de zogenaamde BBP-formule:

$$= \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{16^n} \quad \frac{4}{8n+1} \quad \frac{2}{8n+4} \quad \frac{1}{8n+5} \quad \frac{1}{8n+6} \quad :$$

Had de productie-assistentie van de Simpson gelijk met haar vraag?

Simpsons

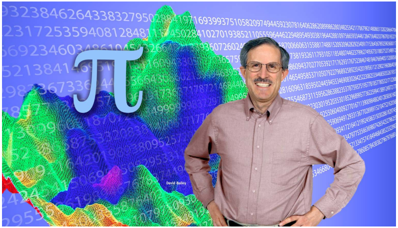


Figure: David Bailey

Hij is de mede uitvinder van de zogenaamde BBP-formule:

$$= \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{16^n} \quad \frac{4}{8n+1} \quad \frac{2}{8n+4} \quad \frac{1}{8n+5} \quad \frac{1}{8n+6} \quad :$$

Had de productie-assistentie van de Simpson gelijk met haar vraag? Niet helemaal, met deze formule kan alleen maar de 40,000^e *binaire* cijfer achter de komma worden berekend.

De formule van Leibniz

De formule van Leibniz is de volgende (reeds ontdekt in 1400 door Madhava van Sangamagrama):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

De formule van Leibniz

De formule van Leibniz is de volgende (reeds ontdekt in 1400 door Madhava van Sangamagrama):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

"Numero DEUS impare gaudet" (God houdt van de oneven getallen) { Leibniz

De formule van Leibniz

De formule van Leibniz

Hoe bewijs je deze formule?

De formule van Leibniz

Hoe bewijs je deze formule?

Door de Taylorreeks van arctan (ook wel $\tan^{\ 1}$) rond 0 op te schrijven!

De formule van Leibniz

Hoe bewijs je deze formule?

Door de Taylorreeks van arctan (ook wel $\tan^{-1}$) rond 0 op te schrijven!

Herinnering: Taylorreeks

Als $f(x)$ een oneindig vaak differentieerbare functie is, dan is de Taylorreeks de machtreeks:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Taylorreeks van arctangens

Laat $f(x) = \arctan(x)$. Dan

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{6x^2 \quad 2}{(1+x^2)^3}$$

enzovoort.

Taylorreeks van arctangens

Laat $f(x) = \arctan(x)$. Dan

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

enzovoort. Wat blijkt:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Taylorreeks van arctangens

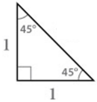
Laat $f(x) = \arctan(x)$. Dan

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}
$$

enzovoort. Wat blijkt:

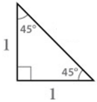
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

De formule van Leibniz



Bedenk nu dat $\arctan 1 = \frac{}{4}$ (want $\tan \frac{}{4} = 1$).

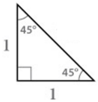
De formule van Leibniz



Bedenk nu dat $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (want $\tan \frac{\pi}{4} = 1$). De conclusie is:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

De formule van Leibniz



Bedenk nu dat $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (want $\tan \frac{\pi}{4} = 1$). De conclusie is:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Hoe goed is deze formule in de praktijk?

Hoe goed is deze formule in de praktijk?

Hoe goed is deze formule in de praktijk?

Erg slecht...

Hoe goed is deze formule in de praktijk?

Erg slecht... We hebben al 1000 termen nodig om de eerste twee decimalen goed te krijgen.

Maar het kan veel beter!

Oefening.

Maar het kan veel beter!

Oefening. Bewijs de volgende formule:

Maar het kan veel beter!

Oefening. Bewijs de volgende formule:

$$\frac{}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} \qquad \arctan\frac{1}{239}.$$

Maar het kan veel beter!

Oefening. Bewijs de volgende formule:

$$\frac{}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} \quad \arctan \frac{1}{239}.$$

Hint: het kan op twee manieren.

Maar het kan veel beter!

Oefening. Bewijs de volgende formule:

$$\frac{\ }{4} = 4\arctan\frac{1}{5} \qquad \arctan\frac{1}{239}.$$

Hint: het kan op twee manieren.

Manier 1: Gebruik de verdubbelingsformule voor de tangens:

$$\tan(\quad + \quad) = \frac{\tan(\quad) + \tan(\quad)}{1 \qquad \tan(\quad)\tan(\quad)}$$

Maar het kan veel beter!

Oefening. Bewijs de volgende formule:

$$\frac{}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} \quad \arctan\frac{1}{239}.$$

Hint: het kan op twee manieren.

Manier 1: Gebruik de verdubbelingsformule voor de tangens:

$$\tan(\quad + \quad) = \frac{\tan(\quad) + \tan(\quad)}{1 \quad \tan(\quad)\tan(\quad)}$$

Manier 2: Gebruik complexe getallen: Expandeer het complexe getal $(5 + \mathrm{i})^4(239 \quad \mathrm{i})$.

De oplossing (Manier 1)

Manier 1.

De oplossing (Manier 1)

Manier 1. Laat $\ = \arctan \frac{1}{5}$, dus $\tan(\ ) = \frac{1}{5}$. Met de verdubbelingsformules geldt

$$\tan(2\ ) = \frac{2\quad \frac{1}{5}}{1\qquad \frac{1}{5}\quad {}^{2}} = \frac{5}{12}.$$

De oplossing (Manier 1)

Manier 1. Laat $\quad = \arctan \frac{1}{5}$, dus $\tan(\quad) = \frac{1}{5}$. Met de verdubbelingsformules geldt

$$\tan(2\quad) = \frac{2\quad \frac{1}{5}}{1\qquad \frac{1}{5}\quad^{2}} = \frac{5}{12}:$$

Opnieuw:

$$\tan(4\quad) = \frac{2\quad \frac{5}{12}}{1\qquad \frac{5}{12}\quad^{2}} = \frac{120}{119}:$$

De oplossing (Manier 1)

Manier 1. Laat $\quad = \arctan\frac{1}{5}$, dus $\tan(\quad) = \frac{1}{5}$. Met de verdubbelingsformules geldt

$$\tan(2\quad) = \frac{2\quad\frac{1}{5}}{1\qquad\frac{1}{5}^{\;2}} = \frac{5}{12}:$$

Opnieuw:

$$\tan(4\quad) = \frac{2\quad\frac{5}{12}}{1\qquad\frac{5}{12}^{\;2}} = \frac{120}{119}:$$

Blijkbaar is 4 net iets groter dan =4.

De oplossing (Manier 1)

Manier 1. Laat $\quad = \arctan \frac{1}{5}$, dus $\tan(\quad) = \frac{1}{5}$. Met de verdubbelingsformules geldt

$$\tan(2\quad) = \frac{2\quad\frac{1}{5}}{1\qquad\frac{1}{5}\quad^{2}} = \frac{5}{12}.$$

Opnieuw:

$$\tan(4\quad) = \frac{2\quad\frac{5}{12}}{1\qquad\frac{5}{12}\quad^{2}} = \frac{120}{119}.$$

Blijkbaar is 4 $\quad$ net iets groter dan $\quad$=4. Dus

$$\tan(4\qquad\frac{}{4}) = \frac{\frac{120}{119}\quad 1}{1+\frac{120}{119}\quad 1} = \frac{1}{239}.$$

De oplossing (Manier 1)

Manier 1. Laat $\;= \arctan \frac{1}{5}$, dus $\tan(\;) = \frac{1}{5}$. Met de verdubbelingsformules geldt

$$\tan(2\;) = \frac{2 \quad \frac{1}{5}}{1 \quad\; \frac{1}{5}^{\;2}} = \frac{5}{12}:$$

Opnieuw:

$$\tan(4\;) = \frac{2 \quad \frac{5}{12}}{1 \quad\; \frac{5}{12}^{\;2}} = \frac{120}{119}:$$

Blijkbaar is 4 net iets groter dan =4. Dus

$$\tan(4 \qquad \overline{4}) = \frac{\frac{120}{119} \quad 1}{1 + \frac{120}{119} \quad 1} = \frac{1}{239}:$$

Er volgt dat

$$4 \arctan \frac{1}{5} = 4 \quad = \overline{4} + \arctan \frac{1}{239}:$$

De oplossing (Manier 2)

Door te rekenen:

$$(5+i)^4(239 - i) = 114244\,(1+i).$$

De oplossing (Manier 2)

Door te rekenen:

$$(5 + \mathrm{i})^4(239 \quad \mathrm{i}) = 114244 \quad (1 + \mathrm{i}).$$

Bedenk nu dat hoeken van complexe getallen additief werken: $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ modulo 2 .

De oplossing (Manier 2)

Door te rekenen:

$$(5+\mathrm{i})^4(239 \quad \mathrm{i}) = 114244 \quad (1+\mathrm{i}).$$

Bedenk nu dat hoeken van complexe getallen additief werken: $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ modulo 2 . De formule

$$4 \arctan \frac{1}{5} \qquad \arctan \frac{1}{239} = \frac{\ }{4}$$

volgt nu.

De formule van Machin

Deze formule

$$\frac{}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} \qquad \arctan \frac{1}{239}$$

staat bekend als de formule van Machin (1706) .

De formule van Machin

Deze formule

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

staat bekend als de formule van Machin (1706) .

Door dit in te vullen in de taylorreeks voor de arctangens vinden we

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{239^{2n+1}}\right)$$

De formule van Machin

More Examples are given where Occasion requires, th. are here, for Brevity's sake, omitted.

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\overline{\frac{16}{5}-\frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3}-\frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\,\overline{\frac{16}{5^5}-\frac{4}{239^5}} -, \&c. =$$

3.14159, &c. $= \pi$. This *Series* (among others for the same purpose, and drawn from the same Principle) I receiv'd from the Excellent Analyst, and my much Esteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64.38. may be Examin'd with all desireable Ease and Dispatch.

Whence in the *Circle*, any one of these three, a, c, d, being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = \overline{a \div \frac{1}{4}\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $c = d \times \pi = \overline{a \times 4\pi}|^{\frac{1}{2}}$, $a = \frac{1}{4}\pi \times d^2 = c^2 \div 4\pi$

And

Figure: W. Jones: a New Introduction to the Mathematics (1706)

Hoe goed is deze nieuwe formule?

Hoe goed is deze nieuwe formule?

Waarom werkt deze formule zo goed?

Hoe goed is deze nieuwe formule?

Waarom werkt deze formule zo goed?

Antwoord: De fout van

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(\quad 1)^n}{2n+1} \qquad \frac{4}{5^{2n+1}} \qquad \frac{1}{239^{2n+1}}$$

met   is ongeveer $\frac{1}{5^{2N}}$.

Hoe goed is deze nieuwe formule?

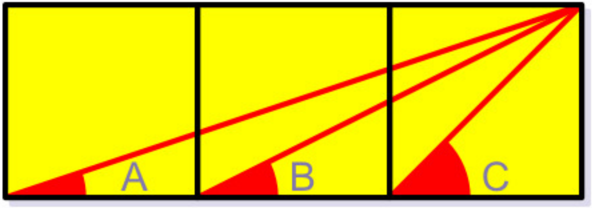
Waarom werkt deze formule zo goed?

Antwoord: De fout van

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(\quad 1)^n}{2n+1} \quad \frac{4}{5^{2n+1}} \qquad \frac{1}{239^{2n+1}}$$

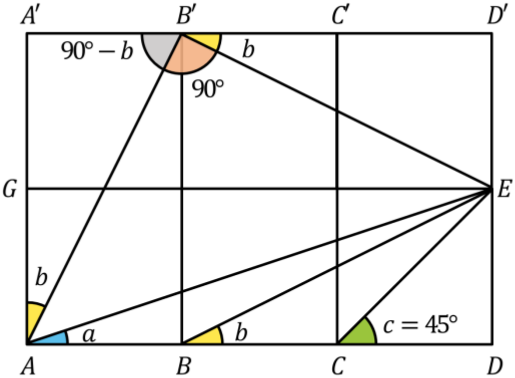
met   is ongeveer $\frac{1}{5^{2N}}$. Dus in de praktijk krijgen we er één of twee decimalen bij per stap.

Meer zulke formules

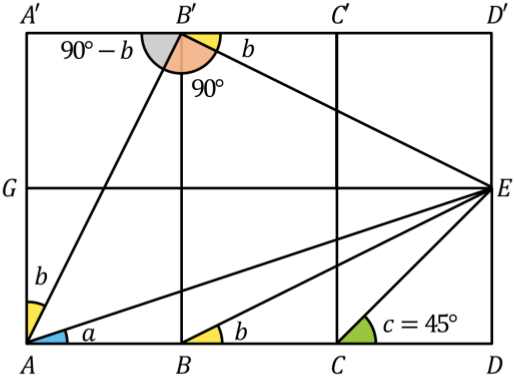


Oefening: Bewijs dat $\backslash A + \backslash B = \backslash C = \frac{}{4}$.

Oplossing



Oplossing



Of gebruik weer de optelformule van de tangens:

$$\tan(\backslash C) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}} = 1$$

Meer zulke formules

$$\frac{}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \quad (\textit{Euler}; 1736)$$

Meer zulke formules

$$\frac{}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \quad (\mathit{Euler};\, 1736)$$

Of complexer (Takano, 1982):

$$\frac{}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} \quad 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

Meer zulke formules

$$\frac{\ }{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \quad (\mathit{Euler}; 1736)$$

Of complexer (Takano, 1982):

$$\frac{\ }{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} \quad 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}$$

Deze laatste formule is gebruikt in het 2002 record om de eerste 1,241,100,000,000 decimalen van   te berekenen (Y. Kanada).

De nieuwste tijd: Ramanujan

Figure: Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

De nieuwste tijd: Ramanujan

Figure: Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Hij vond de formule:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\,396^{4n}}$$

De nieuwste tijd: Ramanujan

Figure: Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Hij vond de formule:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

Oefening: Benader π eens door alleen de term $n = 0$ te gebruiken.

De nieuwste tijd: Ramanujan

Figure: Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Hij vond de formule:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

Oefening: Benader π eens door alleen de term $n = 0$ te gebruiken.

$$\frac{9801}{1103\sqrt{8}} = 3.14159273001\ldots$$

Kunnen we nu de Simpsons evenaren?

Dank voor jullie aandacht!

Alle SAGE-bestanden komen op mijn website:
`https://sites.google.com/view/berendringeling/`.