

Formules bij wiskunde en natuurkunde

Harrie Eijkelhof, FI/UU

Peter Kop, ICLON/UL

NWD, 5 April 2024

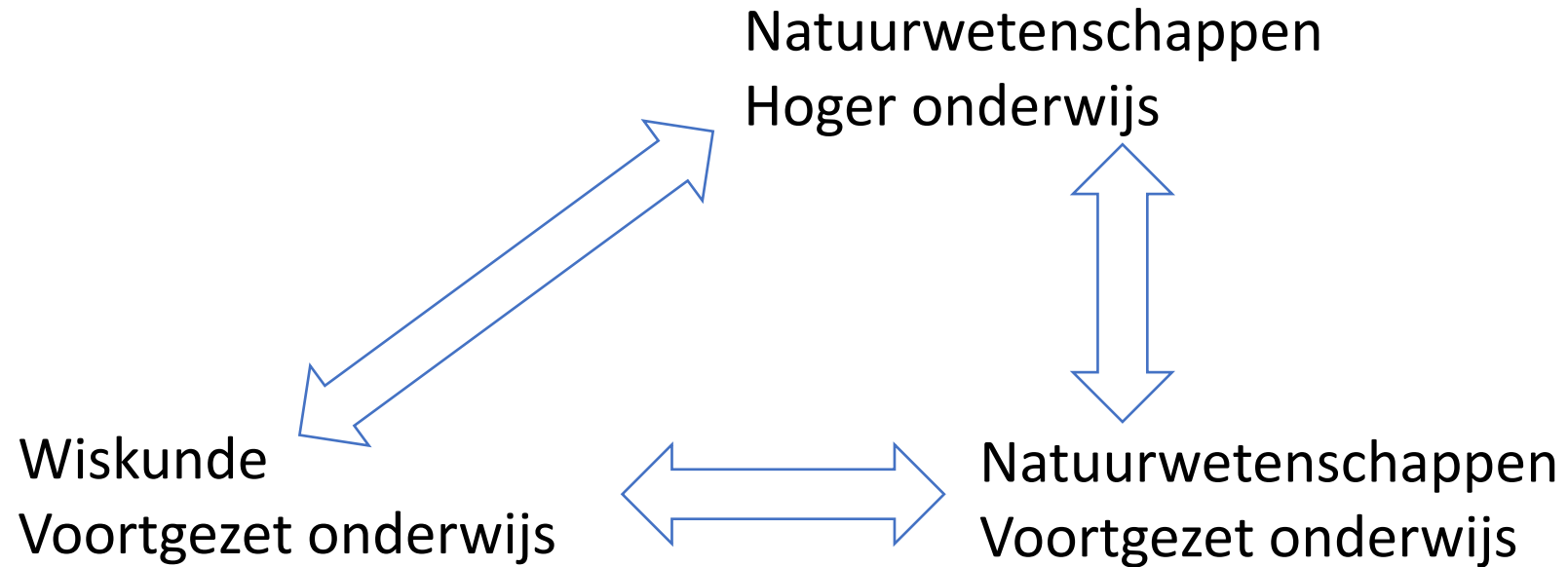
Opzet werkgroep

- Aandacht voor samenhang
- Doel: hoe kunnen we lezen, begrijpen en redeneren met formules bevorderen?
- Verschillen tussen wiskunde en natuurkunde m.b.t. omgang met formules
- Wiskundige en natuurkundige symbol sense
- Bevindingen uit literatuur
- Didactische suggesties
- Aan de slag

Waarom nu aandacht voor samenhang?

- Veldverkenning syllabi BINAS-vakken (2018/19)
- Feedback uit het hoger onderwijs (2019 en 2023)
- Herziening van syllabi binask (2020/21), effectief vanaf 2024
- Herziening examenprogramma's havo/vwo binask, wi, nlt (2022/23)

Horizontale en verticale samenhang



Horizontale samenhang in VO

Als we naar examens en huidige syllabi kijken lijken er niet zoveel inhoudelijke problemen: betreft vooral onderbouwwiskunde

- Sk en bio: weinig aandacht aan formules
- Na ook afgeleiden, sinus-functie, $\ln(x)$, e^x ; veel evenredigheden en formules met meerdere variabelen; beperkt aandacht aan redeneren met formules
- Wi schoolmethoden: veel focus op rekenregels; formules vaak gegeven en los van inhoudelijke context; geen aandacht voor aard van formules, eenheden en eenhedenanalyse; weinig formules met meerdere variabelen en redeneren met formules

In praktijk: veel afstemmingsproblemen in tijd en gebrek transfer

Verticale samenhang VO-HO

N.a.v. recent onderzoek onder dertig docenten die wiskundige vakken geven voor eerstejaars van bèta-opleidingen van drie universiteiten:

- aankomende studenten
 - zien formules vaak louter als rekentuig en niet als beschrijving van relaties tussen variabelen
 - aankomende studenten hebben moeite met interpreteren van formules, zowel in wiskundige context als in natuurwetenschappelijke context
- suggestie: besteed meer aandacht aan doorzien van structuur van formules, globale verloop van grafieken en kenmerken van functies, waardoor de formule meer betekenis kan krijgen.
- het lijkt erop dat eerstejaars biologie, scheikunde, farmacie, aardwetenschappen, sustainability science, moleculair life sciences, enz. tevoren geen goed beeld hebben van de rol die wiskunde speelt in hun gekozen studie (hoeveel wiskunde en welke wiskunde)

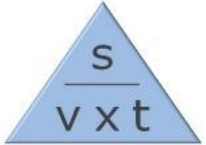
Recent wel veel aandacht voor vakoverstijgend rekenen

- Focus op rekenprocedures
- Diverse procedures gangbaar:
 - vergelijken met simpele getallenvoorbeelden, bijv. $s = v \times t$ met $6 = 3 \times 2$ en $3 = 6/2$

- verhoudingstabel:

Minuten	3	5 🟡
Seconden	180	?

- formuledriehoek:

$$s = v \times t$$

$$v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v}$$

- Voordeel: bevordering schoolbeleid rekenen, vergroot zelfvertrouwen van leerlingen
- Nadeel: weinig aandacht voor conceptueel begrijpen van formules

Doel en aanpak

- Hoe kunnen we het lezen, begrijpen en redeneren met formules bevorderen?
- Aanpak:
 - Syllabi en examenopgaven geanalyseerd
 - Schoolboeken geraadpleegd
 - Veel buitenlandse artikelen verzameld (niet typisch NL-probleem)
 - Overleg met dertig universitaire docenten die in jaar 1 van de bachelor wiskundig onderwijs geven (Leiden, Twente, Wageningen)
 - Didactische suggesties ontwikkelen

Verschillen tussen wiskunde en natuurkunde en
wat kan daar lastig aan zijn voor leerlingen?

Notaties van grootheden en eenheden

Natuurkunde: letters altijd inhoud specifiek

- A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q, R, T, U, V, W, Z
- a, b, c, d, f, g, h, m, q, r, s, t, u, v, w
- Δ , ρ , γ , π , Λ , η , σ , α , μ , ε , λ , ω , Φ

Grootheden en eenheden veelal gekoppeld aan fysici (30)

Wiskunde: meestal functie $y(x)$ met getallen a, b en c, soms aan inhoud gekoppeld, bijv. h hoogte, T temperatuur, t tijd; maar ook wel in examens gebruik van V voor volume, snelheid, lengteverschil en vloeroppervlak.

Aard formules

- Natuurkunde:
 - aard formule zoals definitie, experimenteel verband, wet, model;
 - veel evenredigheden;
 - formules met meerdere variabelen;
 - belang van dimensies en eenheden;
 - probleemsituatie 'bepaalt' afhankelijke en onafhankelijke variabelen
- Wiskunde:
 - veel focus op rekenen;
 - formules vaak gegeven los van context;
 - geen aandacht voor aard van formules en eenheden;
 - weinig formules met meerdere variabelen

Randvoorwaarden van empirische formules

Natuurkunde:

bij empirische formules gelden vaak randvoorwaarden, bijv. luchtwrijving al dan niet meegenomen in de opgave

Wiskunde:

randvoorwaarden worden vaak weggelaten, bijv. in opgave Basketbal wordt impliciet aangenomen dat de balsnelheid na de worp constant blijft. (vwo wiB, 2023-2);

geen aandacht voor beperkte geldigheid van een empirische formule

Rol van dimensies en eenheden

Natuurkunde: getallen in de vorm van parameters of constanten hebben meestal betrekking op dimensies en dus zijn eenheden van belang (eenheden-analyse)

Wiskunde: dimensies spelen nauwelijks een rol, veel getallen zonder eenheden

Vrije val bij parachutespringen $h = 4000 - 4,9 \cdot t^2$ [havo, wiA 2022-2]

Waterdiepte meten met echolood : $D = h + 750t$ [havo, wiA 2022-3]

Bewegingsvergelijkingen van een bewegend punt: $x(t) = 1 - t^2$, $y(t) = (1 + t)^2$ [vwo, wiB 2018-1]

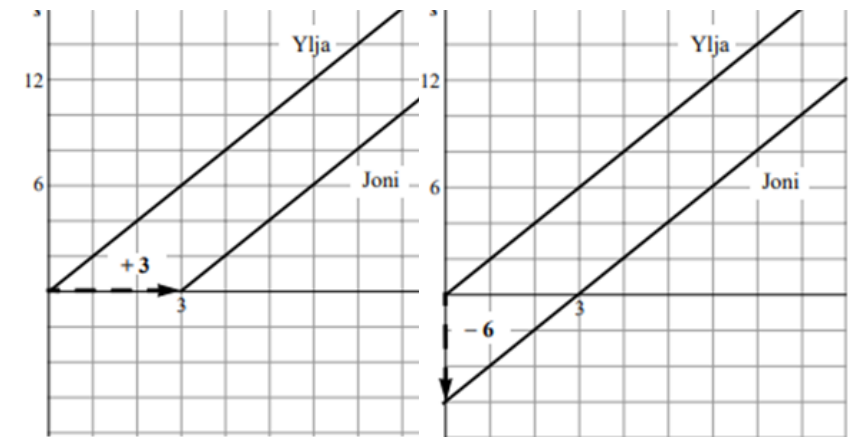
Afgelegde weg: Ylja $s=2 \cdot t$ met s in m en t in sec ; Joni $s=2 \cdot (t-3)$

Voor Joni ook $s=2 \cdot t - 6$?

Verschillende structuur

eerste is een afstand = snelheid · tijd verband

tweede is een afstand = afstand – afstand verband



Formules vanuit wiskundig en natuurkundig perspectief

Redish & Kuo (2015)

voorbeeld: $v_t = v_0 + at$

vanuit wiskundig oogpunt

- lineair verband
- v_t bereken je via a keer t plus v_0
- t is onafhankelijke variabele en v_t de afhankelijke variabele
- v_0 is snijpunt met y -as en a de helling (beide constant)
- grafiek rechte lijn

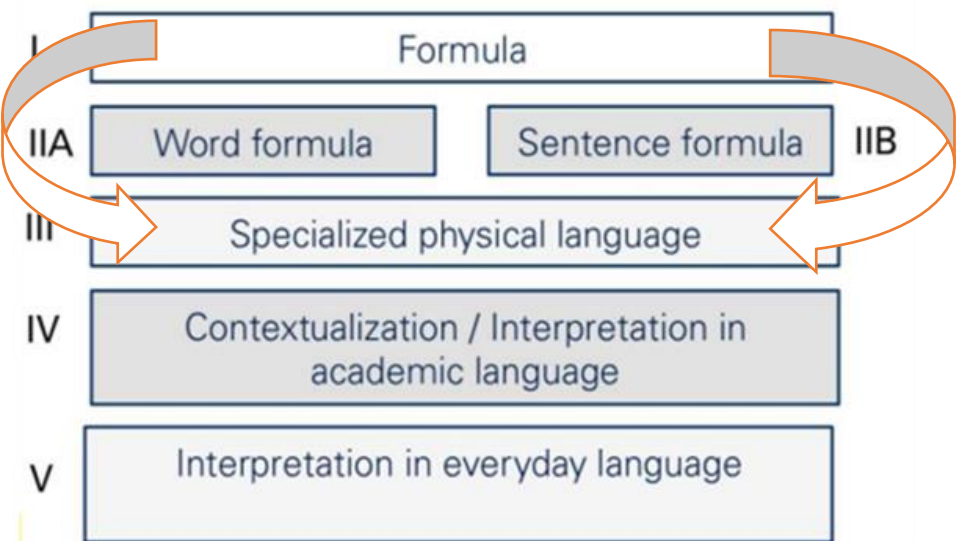
vanuit natuurkundig oogpunt

- een beweging met constante versnelling; dus snelheid neemt gelijkmatig toe
- versnelling + dan snelheid groter, versnelling - dan v kleiner
- basis + verandering (basis v_0 en versnelling geeft de verandering per sec)
- eenheden in formule interpreteren en controleren

Beide perspectieven van belang: een soort wiskundige en natuurkundige symbol sense

Wiskundige symbol sense en natuurkundige symbol sense

Interpreteren van formules: “je begrijpt pas een formule als je het in eigen woorden kunt vertellen” (Geyer/Kuske-Janssen, 2019)



I Formule $I = \frac{U}{R}$	
IIA Woord formule: <i>Stroomsterkte</i> $= \frac{\textit{spanning}}{\textit{weerstand}}$	IIB Herkennen structuur: Vorm: $y = a \cdot x$ and $y = \frac{a}{x}$
III Specifieke nw taal: Stroomsterkte is spanning gedeeld door weerstand	IIIB Covariatie functies; globale grafiek
IV Contextualisatie (informatie toevoegen): Bij elektriciteit: stroomsterkte is afhankelijk van spanning en weerstand, is recht evenredig met spanning en omgekeerd evenredig met weerstand	
V Concept image: als $U \uparrow$ dan $I \uparrow$; als $R \uparrow$ dan $I \downarrow$; globale grafieken van $I(U)$ en $I(R)$, R 2x dan I 0,5x, enz.; metafoor ‘weerstand groter dan stromen moeilijker’	

Centrale vraag voor deze workshop:

Hoe kunnen we de wiskundige en natuurkundige symbol sense bij leerlingen bevorderen?

Eerst kijken naar wiskundige symbol sense bij formules

Algebraïsche vaardigheid

basisvaardigheid

- procedureel werken
- lokaal kijken
- algebraïsch rekenen

symbol sense

- strategisch werken
- globaal kijken
- algebraïsch redeneren

Nulpunten van $y = x(14 - 2x)(8 - 2x)$

$$\begin{aligned} D &= 121 - 4 \cdot 28 = 9 \\ 21 - 112 &= 9 \\ x &= \frac{-11 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= 7 \quad \sqrt{4} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y &= x(4x^2 - 28x - 16x + 112) \\ &= 4x(4x^2 - 44x + 112) \\ &= 4x^3 - 44x^2 + 112x \\ 0 &= x^2 - 11x + 28 \end{aligned}$$

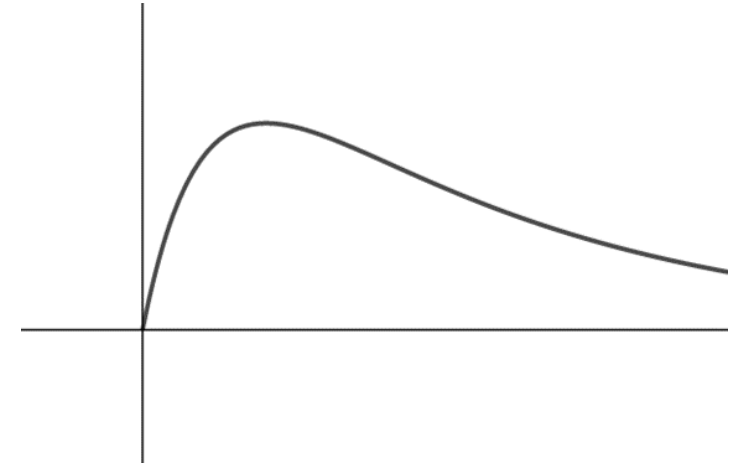
Redeneren met formules en grafieken (wisA klas 5)

Evt. bij wisB zonder context

Gegeven is een grafiek waarin de concentratie van een medicijn in het bloed weergegeven is.

Kenmerken van deze grafiek zijn:

- Bij $t = 0$ moet $C = 0$
- C moet overal positief zijn voor t groter dan 0
- Op den duur moet C naderen naar 0



Beredeneer of de volgende functies deze kenmerken vertonen:

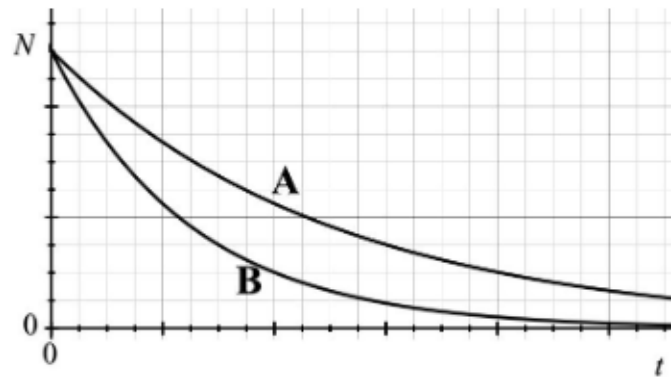
a. $C = 0,20(2^{-0,6t} - 2^{-3t})$

b. $C = 0,20 \cdot 0,55^t - 0,20 \cdot 0,05^t$

c. $C = \frac{0,2t}{t^2+10}$

Redeneren met formules in wiskunde les

Voor radioactief materiaal geldt dat het aantal atomen vermindert volgens de formule $N(t) = N(0) \cdot e^{\frac{-t}{a}}$ waarbij $N(0)$ het aantal atomen op tijdstip 0, a een parameter die een maat geeft hoe snel die vermindering gaat, en t de tijd in jaren. Op tijdstip $t=0$ starten twee verschillende elementen A en B met hetzelfde aantal atomen. De grafiek geeft het verval van beide elementen in de tijd.



Welke element (A of B) heeft een grotere waarde van a .

Redeneren met formules in wiskunde les

In Einstein's relativiteitstheorie wordt de formule $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

gebruikt voor het berekenen van de impuls. Hierbij is p de impuls in Ns (of kg m/s), m de massa in kg, v de snelheid in m/s, en c de lichtsnelheid in m/s.

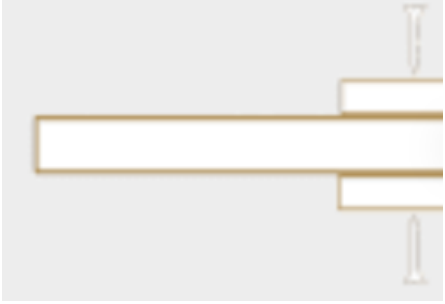
Deze formule $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ kan vereenvoudigd worden als v veel

kleiner is dan c , zoals in het gewone leven het geval is.

- Geef deze vereenvoudiging.
- Beredeneer wat er volgens de gegeven formule met de impuls gebeurt als de snelheid v in de buurt van de lichtsnelheid c komt.

Redeneren met formules in wiskunde les

Bij een experiment wordt een plank wordt aan een kant vastgezet. Als nu kracht uitgeoefend wordt op de andere kant dan buigt de plank door.



Voor kleine uitwijkingen u (in m) geldt voor de doorbuiging de formule:

$$u = \frac{4}{E \cdot b} \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^3 \cdot F$$

Waarbij E de elasticiteitsmodulus, b de breedte van de plank in m, l de lengte van het vrije deel in m, d de dikte van de plank in m, F de kracht in N.

a. Bepaal de eenheid van E .

Stel dat l 2x zo groot wordt en dat de uitwijking gelijk moet blijven (andere onafhankelijke variabelen constant).

b. Hoe moet de dikte d dan veranderen?

c. Maak een schets van het verband tussen u en d .

Redeneren met formules in wiskunde les

In de tabel hieronder kun je zien hoe lang het ongebooren kind gemiddeld is op verschillende momenten tijdens de zwangerschap.

Zwangerschapsduur in weken	Lengte in cm
0	0,02
4	0,4
8	2
12	8
14	18
18	25
22	30
26	35
30	40
34	45
38	50

Z is de zwangerschapsduur in weken,
L de lengte in cm

Welk type formule past bij deze tabel?
Geef toelichting.

- a. $L = a \cdot g^Z$ met $0 < g < 1$
- b. $L = a \cdot g^Z$ met $g > 1$
- c. $L = a \cdot Z^b$ met $0 < b < 1$
- d. $L = a \cdot Z^b$ met $b > 1$
- e. $L = a + b \cdot Z$ met $b < 0$
- f. $L = a + b \cdot Z$ met $b > 0$
- g. $L = \frac{a}{1+b \cdot g^Z}$ met $0 < g < 1$
- h. $L = \frac{a}{1+b \cdot g^Z}$ met $g > 1$

Ervaring met dit soort wiskundige symbol sense-vragen?

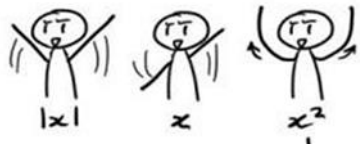
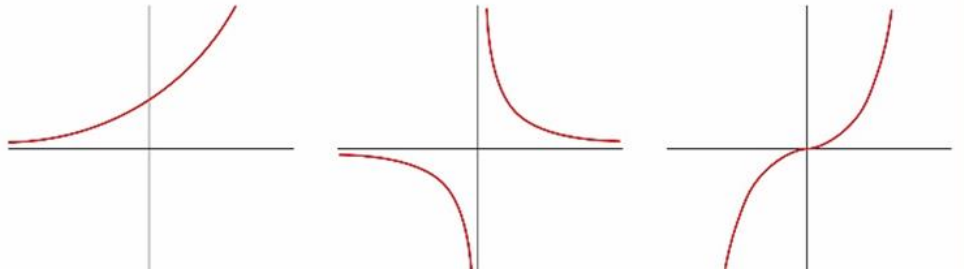
- Hoe zouden uw leerlingen dit doen?
- Is dit belangrijk?
- Hoe kunnen leerlingen dit leren?
- Ervaringen met vwo6 wisB leerlingen

Ontwikkelen van wiskundige symbol sense door formules schetsen via herkennen en redeneren

(Kop et al., 2020)

Herkennen van basisfuncties met globale grafiek

$$y=2^x; y=x^2; y=\sqrt{x}; y=x^3; y=x^4; y=\frac{1}{x}; y=\ln(x); y=\sin(x); y=e^x$$



Funcie-families met transformaties

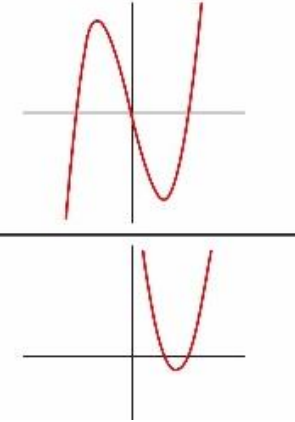
Hoe hetzelfde, hoe verschillend?

- a) $y=-3^x$ en $y=3^{-x}$
- b) $y=3 \cdot \ln(x)$ en $y=\ln(x)$
- c) $y=-(x+4)^4+2$ en $y=-(x+4)^4$

Herkennen nulpunten, min/max

$$y=2x(x-2)(x+4) \quad y=2x^3+4x^2-16x$$

$$y=(x-4)^2-1 \quad y=(x-5)(x-3)$$



Kwalitatief redeneren over o.a. oneindig gedrag, stijgen/dalen

$$y=19-13 \cdot 0,78^x$$
$$D=15,6 \log(v)+4,1$$
$$P=100(1-3^{-0,5t})$$
$$D=6,9\sqrt{T-12}$$
$$TK=0,05q^2-80q$$

Functioneel denken bij formules met meerdere variabelen

$$F(R) = \frac{50m}{R}; F(m) = \frac{50m}{R}; V(t) = V_0(1 - 3^{-b \cdot t});$$

$$E(Q) = c - d \cdot \ln(Q)$$

Uit internationale literatuur:

Suggesties wat in wiskundelessen? En wat in natuurwetenschappen lessen?

Redish (2021) en Sokolowski (2020)

In *wiskundelessen*:

- Structuur formules doorzien
- Redeneren met formules over covariatie (en deze interpreteren in nw context)
- Orde van grootte, benaderen, schatten
- Eenheden analyse

In *natuurkunde lessen* gebruik van wiskundige formules en fysische verklaringen voor verbanden en beperkingen van formules

Formule bevragen vanuit natuurkundig perspectief met gebruik van wiskundig perspectief

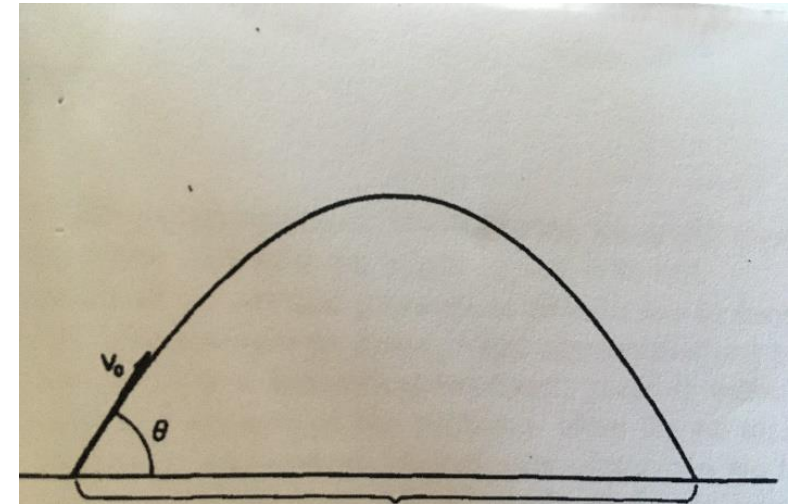
Welke vragen komen op? (Romer, 1993)

Als een kogel door een kanon afgeschoten wordt, kun je in een versimpeld model de baan van de kogel beschrijven met de onderstaande formule.

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\Theta) \cos(\Theta)}{g}$$

Hierin is:

- R het horizontale bereik van de kogel in m,
- Θ de hoek waaronder de kogel afgeschoten wordt in radialen,
- v_0 de beginsnelheid van de kogel in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en
- g de zwaartekrachtsversnelling in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Figuur 1: Beschrijving van de baan van een kogel. Daarbij is v_0 de beginsnelheid van de kogel, θ de afvuurhoek en R het horizontale bereik. Overgenomen uit Romer (Romer, 1993).

Hulp voor bevragen van formule vanuit natuurkundig perspectief met gebruik van wiskundig perspectief:

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g}$$

Romer (1993) 'Reading the equations and confronting the phenomena'

- a. Wat is betekenis van de gebruikte symbolen, welke grootheden vertegenwoordigen ze?
- b. Wat is de aard van de formule? Is de formule een definitie, is de formule gebaseerd op waarneming of model op basis van andere formules?
- c. Wat gebeurt er met de afhankelijke variabele als een van de onafhankelijke variabelen groter of kleiner wordt en wat gebeurt er in grensgevallen?
- d. Welke grootheden zou je in deze formule verwachten? Welke benaderingen en/of idealisering worden gemaakt? Wanneer is deze vergelijking te gebruiken?
- e. Kloppen de eenheden in de formule?

Opgaven vanuit wiskundig perspectief en natuurkundig perspectief

Suggesties

Geluidssnelheid in zeewater benaderd met de formule van Wilson:

$$v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z-35) + D/60,$$

met v geluidssnelheid in m/s; T watertemperatuur in °C; Z het zoutgehalte van zeewater in ‰; D waterdiepte in m.

a. Waar staat 1449,2 voor in de formule? En wat is de eenheid van 60? (na en wi)

De geluidssnelheid in zeewater is afhankelijk van een aantal factoren.

b. Beschrijf de invloed van elk van deze factoren op de geluidssnelheid m.b.v. globale grafieken? (na-wi)

c. Verklaar vanuit natuurwetenschappen deze afhankelijkheden (na)

d. Wat zijn randvoorwaarden bij deze formule? (na)

De formule van Wilson kan ook geschreven worden in de vorm

$$v = -0,0546(T-...) ^2 + \dots + 1,391(Z-35) + 1/60 \cdot D$$

e. Doe dat en zeg wat je in deze vorm beter kunt aflezen? (wi)

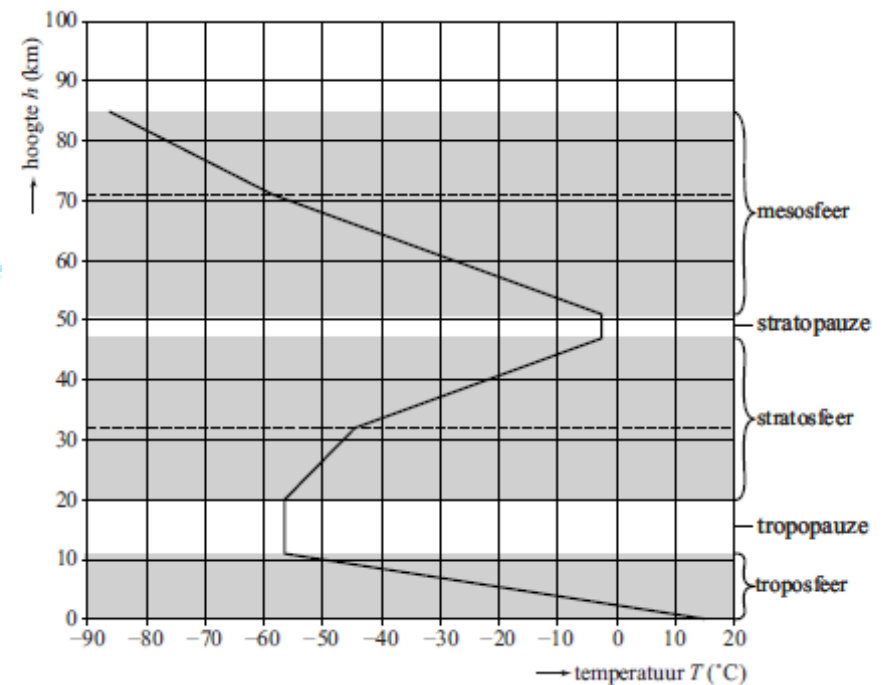
f. Waarom kun je je onderwater minder oriënteren op de richting waar het geluid vandaan komt? (na)

Suggesties

Atmosfeer (havo wiA, 2017-2)

De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt. Voor de temperatuur in het bovenste deel geldt de formule $T = 2,8 \cdot h - 134,1$. Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $h = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

3p 18 Laat deze herleiding zien en rond a en b af op twee decimalen.



De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt. Voor de temperatuur in het bovenste deel geldt de formule $T = 2,8 \cdot h - 134,1$, met de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ en de hoogte h in km .

(1) Wat zijn de grootheden en eenheden die passen bij de getallen 2,8 en 134,1?

Je kunt deze formule herleiden tot $h = a \cdot T + b$ (als onafhankelijke en afhankelijke variabele wisselen)

(2) Laat deze herleiding zien en geef aan wat de grootte en eenheden zijn van a en b ?

Suggesties (biologie)

Wet van Fick (gebaseerd op vwo-examen biologie 2006 & 2013). CF wordt ook wel taaislijmziekte genoemd, omdat het slijm dat onder andere in de luchtwegen wordt afgescheiden abnormaal taai is. Daardoor wordt het moeilijker afgevoerd uit de longen en blijft er meer slijm achter in de longblaasjes en vermindert de uitwisseling van gassen. Dat leidt tot een voortdurend gevoel van benauwdheid.

In de opgave wordt gesteld dat de factoren die van invloed zijn op de snelheid van de gaswisseling zijn de diffusieconstante (D), het diffusie-oppervlak (F), het concentratieverschil ($c_1 - c_2$) en de afstand of diffusieweg (A), zoals beschreven in de Wet van Fick:

$V = D \cdot F \cdot \frac{c_1 - c_2}{A}$, waarbij V de diffusiesnelheid is.

(1) Beredeneer aan de hand van de formule hoe via ieder van deze factoren (diffusiecoëfficiënt, diffusie-oppervlak, concentratieverschil en diffusieafstand) de diffusiesnelheid aangepast kan worden. (wi les)

(2) Geef via ieder van deze factoren een verklaring voor de benauwdheid van een CF-patiënt. (bio les)

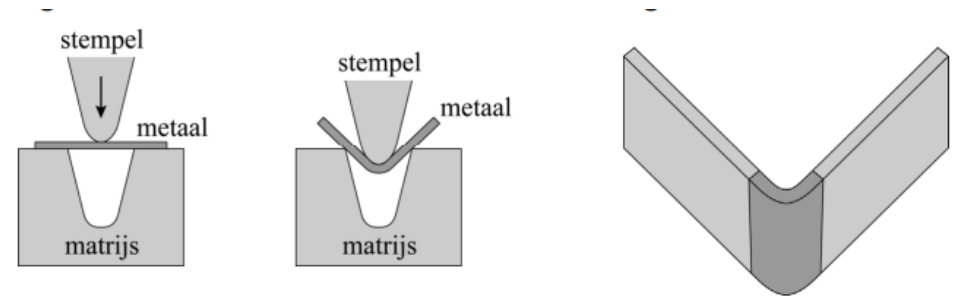
Merk op: Het gebruik van de letters V , A en F is verwarrend. Bij natuurkunde worden V voor volume gebruikt, A voor oppervlak en F voor kracht en zouden de eenheden vermeld worden.

Gesprek in kleine groepen

Ontwerp bij een formule/context vragen vanuit wiskundig en vanuit natuurkundig perspectief

Kies een van de formules/contexten (of kies zelf een eigen favoriete formule/context)

1. Derde wet van Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} \cdot r^3$



2. De kracht die uitgeoefend moet worden op een metalen plaat om deze te buigen, hangt af van het soort metaal, de dikte van het metaal en de breedte van de opening van de matrijs. De formule om deze kracht uit te rekenen luidt:

$$F = R \cdot d^2 (1 + 4d/V)/V$$

Hierbij is: F de benodigde kracht (in kN/m); R een constante die afhangt van het soort metaal; d de dikte van het metaal (in mm); V de breedte van de opening van de matrijs (in mm).

3. Uit natuurkunde examen vwo 2023

De transmissie T is de verhouding tussen de intensiteit van de bundel nadat hij een afstand x door het gas heeft afgelegd en de intensiteit van de bundel bij de bron. Volgens het botsende-deeltjesmodel geldt voor T :

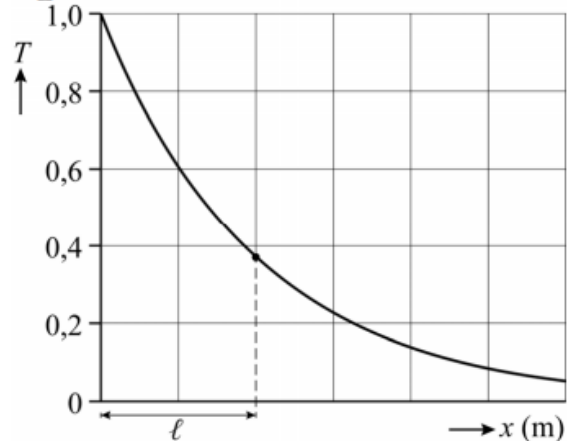
$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{x}{\ell}} \quad (1)$$

Hierin is:

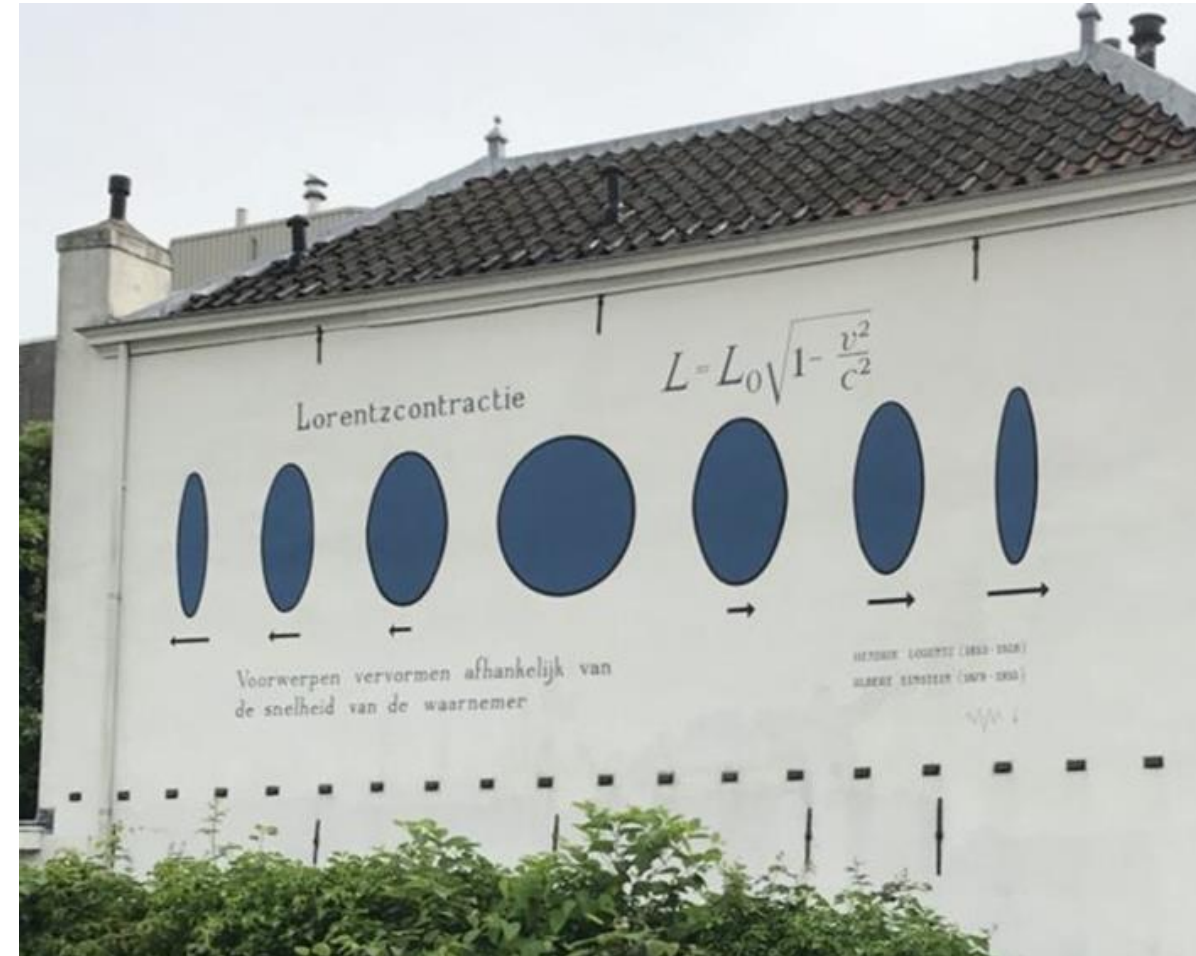
- x de afstand die door de bundel in het gas is afgelegd in m
- ℓ de gemiddelde vrije weglengte, dat wil zeggen de gemiddelde afstand die een elektron aflegt voordat het botst, in m
- I de intensiteit van de bundel na een afstand x in $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$
- I_0 de intensiteit van de bundel bij de bron in $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$

In figuur 2 is T als functie van x weergegeven. In de figuur staat ook ℓ aangegeven.

figuur 2



4. Lorentzcontractie



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Waarbij L_0 lengte bij stilstand, v de snelheid t.o.v. waarnemer, c de lichtsnelheid en L de schijnbare lengte voor waarnemer

Bespreking

- a. Ervaringen met formuleren van wiskundige en natuurkundige vragen bij een formule. Wat is moeilijk? Wat is haalbaar?

- b. Hoe kijkt u daar tegen aan?

Wiskunde en natuurkunde zijn verschillende vakken met verschillende perspectieven op formules

Van belang is dat wiskunde docenten weten wat er bij natuurkunde gebeurt zonder natuurkunde docent te worden

Vraag:

Welke bijdrage kunnen wiskunde docenten leveren om samenhang met natuurwetenschappen te bevorderen? En hoe?

Welke bijdrage kunnen wij daarbij leveren?

Vragen?

Bedankt voor uw aandacht en ideeën

Wilt u verder meedenken?

koppmgm@iclon.leidenuniv.nl

of H.M.C.Eijkelhof@uu.nl