

Notities bij de workshop

Goochelen met wiskunde



Nationale wiskunde dagen
2024-04-05

Pascale Hepp en Stijn Symens

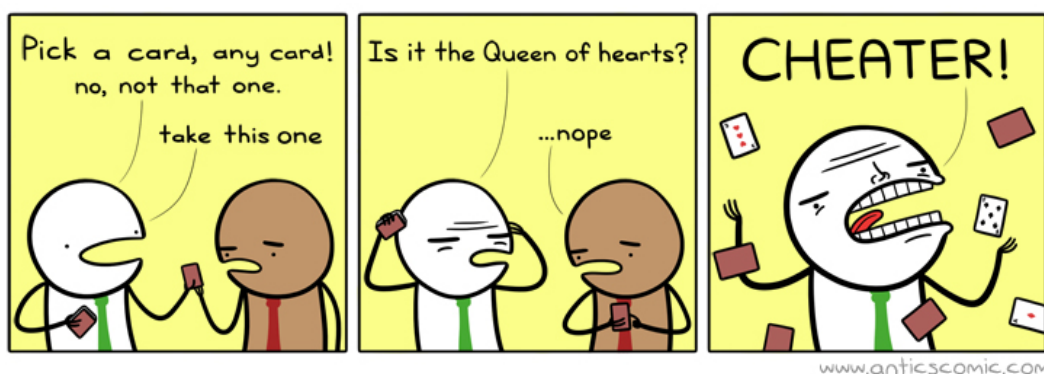
Hoofdstuk 1 Inleiding

De inspiratie voor deze workshop zijn sessies “Goochelen met wiskunde” die een groot succes op de Kinderuniversiteit van de Universiteit Antwerpen waren de voorbije jaren,

Elk jaar weer leren de auteurs enkele goocheltrucs aan een aula vol zes- tot veertienjarigen (en hun ouders). Deze trucs zijn steeds gebaseerd op eenvoudige of minder eenvoudige wiskundige principes. Ze halen hun inspiratie van het internet, uit boeken en vaak ook gewoon uit een avond gezellig brainstormen.

Bij hun trucs gaan de “mathemagicians” steeds hetzelfde te werk: ze kiezen twee kinderen uit de zaal die de truc zullen uitvoeren. Eén van de goochelaars neemt het duo mee naar buiten, en legt hen de truc uit. Ondertussen blijft de andere goochelaar in de zaal, en bereidt hij samen met het publiek de truc voor. Na enkele minuten komt het kinderduo terug binnen, en voeren zij de truc (meestal) vlekkeloos uit. Indien er tijd is, wordt de truc een tweede maal uitgevoerd; en tenslotte uitgelegd.

Tijdens deze workshop presenteren Stijn en Pascale zes van de trucs die ze de voorbije jaren uit hun hoge hoed hebben getoverd. In deze brochure vindt u van elk van deze trucs de benodigdheden, de voorbereiding, de uitvoering en de wiskundige verklaring van de truc. We hopen dat onze manier van lesgeven en de inhoud inspirerend kunnen zijn voor de leerkrachten in deze nascholing. En vergeet vooral het kostuum en de hoge hoed niet: die brengen net dat beetje magie in het klaslokaal...



Hoofdstuk 2 Een kaartentruc

2.1 Wat heb je nodig?

- Een boek speelkaarten.

2.2 Voorbereiding

- Verdeel de speelkaarten in twee stapels:
 - de oneven kaarten: 1,3,5,7,9, Boer, Koning
 - de even kaarten: 2,4,6,8,10, Dame
- Schud beide delen goed.

De truc werkt misschien ook beter met twee (identieke) boeken kaarten, met alle even van de twee boeken kaarten samen en alle oneven van twee boeken kaarten samen.

2.3 De truc

- Vraag je vriend om de twee stapels kaarten goed te schudden.
- Laat hem/haar één kaart van de ene stapel bekijken en deze kaart op de tweede stapel plaatsen.
- Laat hem/haar daarna een andere kaart van de tweede stapel bekijken en deze kaart op de eerste stapel plaatsen.
- Je vriend mag beide stapels nogmaals schudden.
- Je neemt dan beide stapels door en als bij wonder kan jij nu de twee gewisselde kaarten meteen aanduiden.

2.4 Hoe werkt de truc?

Aangezien de oneven kaart omringd wordt door even kaarten kan

je die er gemakkelijk uit halen. Hetzelfde geldt voor de even kaart tussen de oneven kaarten.

2.5 De wiskunde achter de truc

In feite is dit dezelfde truc alsof je alle rode kaarten apart zou steken en alle zwarte kaarten apart zou steken, maar dat valt veel meer op dan een scheiding even-oneven. Verder komt er bij deze truc niet zoveel wiskunde aan te pas.

Hoofdstuk 3 Een tel-de-kaartentruc

3.1 Wat heb je nodig?

- Een boek speelkaarten met 52 kaarten.
- Een goochelhoed.

3.2 De truc

- Schud de boek kaarten.
- Maak met je boek kaarten kleinere stapeltjes kaarten op de volgende manier: Draai de bovenste kaart om. Is dit getal 10 of meer, dan gooi je de kaart in de hoed. Is het getal 1 tot 9, dan tel je verder tot je aan 10 komt, en per tel leg je een kaart van de boek op het kleinere stapeltje. Als dat kleine stapeltje compleet is, draai je dat helemaal om.
- Begin dan aan het volgende kleine stapeltje op de zelfde manier. Dit herhaal je tot je boek kaarten op is.
- Een eventuele onvolledige stapel wordt in de hoed geworpen.
- Van de andere stapels mag het publiek er 3 kiezen. De andere stapels komen ook in de hoed.
- De 3 stapels worden naast elkaar gelegd.
- Maak je van de drie stapels één stapel zodat de bovenste 3 kaarten precies de 3 bovenste kaarten van de stapels zijn. Probeer zo onopvallend mogelijk die 3 kaarten bovenaan te leggen.
- Onder het mom van het aantal kaarten van de stapel te willen tellen, begin je de kaarten op de tafel te tellen, zodat de bovenste 3 kaarten zichtbaar worden. Na 3 (of iets meer, voor de show) kaarten stop je.
- Nu besluit je het aantal kaarten in de hoed te bepalen door enkel met je hand over de hoed te voelen. Je weet als bij wonder het perfecte antwoord.

3.3 Hoe werkt de truc?

Het aantal kaarten in de hoed is precies gelijk aan de som van de drie opengelegde kaarten plus 19.

3.4 De wiskunde achter de truc

Deze truc is bijvoorbeeld erg geschikt bij een inleidende les over rekenen met letters. Door onbekenden x , y en z in te voeren krijg je makkelijk laten zien dat deze truc steeds klopt (noem het gerust een *bewijs*).

De drie stapels waarmee je overblijft zijn gemaakt door te starten met kaarten $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en dan “verder” te tellen tot 10.

Dit wil zeggen dat er in de stapels respectievelijk $10 - x$, $10 - y$ en $10 - z$ kaarten aan worden toegevoegd.

Dat brengt het aantal kaarten in de drie stapels respectievelijk gelijk aan $11 - x$, $11 - y$ en $11 - z$, zodat het aantal kaarten van de drie stapels samen gelijk is aan $(11 - x) + (11 - y) + (11 - z) = 33 - x - y - z$.

Vermits een boek kaarten bestaat uit 52 kaarten zullen er in de hoed dan nog $52 - (33 - x - y - z) = x + y + z + 19$ kaarten overblijven.

Hoofdstuk 4 De machtige kaartentruc

4.1 Wat heb je nodig?

Zes machtige kaarten:

4	20	36	52
5	21	37	53
6	22	38	54
7	23	39	55
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

32	40	48	56
33	41	49	57
34	42	50	58
35	43	51	59
36	44	52	60
37	45	53	61
38	46	54	62
39	47	55	63

1	17	33	49
3	19	35	51
5	21	37	53
7	23	39	55
9	25	41	57
11	27	43	59
13	29	45	61
15	31	47	63

8	24	40	56
9	25	41	57
10	26	42	58
11	27	43	59
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

2	18	34	50
3	19	35	51
6	22	38	54
7	23	39	55
10	26	42	58
11	27	43	59
14	30	46	62
15	31	47	63

16	24	48	56
17	25	49	57
18	26	50	58
19	27	51	59
20	28	52	60
21	29	53	61
22	30	54	62
23	31	55	63

4.2 De truc

- De goochelaar vraagt het publiek een getal tussen 1 en 63 in gedachte te houden.
- De goochelaar vraagt dan aan het publiek op welke kaarten dit getal staat.

- Als bij wonder kan de goochelaar meteen zeggen over welk getal het gaat.

4.3 Hoe werkt de truc?

Het enige wat de goochelaar moet kunnen is een beetje hoofdrekenen. Hij moet immers de 6 getallen in de linkerbovenhoek van de kaarten optellen en de uitkomst is het getal dat het publiek in gedachte hield.

4.4 De wiskunde achter de truc

De kaarten zijn zo opgesteld dat de truc werkt. Telkens nadat er van een kaart geweten is of het getal er al dan niet opstaat, halveer je het aantal mogelijke getallen. In het begin zijn dat er 64 (als je 0 meetelt), na één kaart 32, na twee kaarten 16, na drie kaarten 8, na vier kaarten 4, na vijf kaarten 2 en uiteindelijk 1.

Waarom kan je dit steeds bepalen door de getallen van de rechterbovenhoek op te tellen?

De oplossing hiervan je vinden door de binaire schrijfwijze te belichten van de getallen op deze kaarten. De getallen van 1 tot 63 schrijf je binair als $(000001)_2$ tot $(111111)_2$. Een willekeurig binair getal kunnen we dan in het tientallig stelsel schrijven als

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 32x_5$$

KAART 3:

1	17	33	49
3	19	35	51
5	21	37	53
7	23	39	55
9	25	41	57
11	27	43	59
13	29	45	61
15	31	47	63

Bekijk de derde kaart eens in detail: Op deze kaart staan alle oneven getallen. Als we de oneven getallen in binaire schrijfwijze noteren zijn die precies de getallen van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_3x_2x_11)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_3x_2x_10)_2.$$

KAART 5:

2	18	34	50
3	19	35	51
6	22	38	54
7	23	39	55
10	26	42	58
11	27	43	59
14	30	46	62
15	31	47	63

Kijk nu naar kaart vijf. Deze kaart bevat alle getallen tussen 0 en 63 die rest 2 of rest 3 hebben bij deling door 4.

Binair zijn dit precies de getallen

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_3x_21x_0)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_3x_20x_0)_2.$$

KAART 1:

4	20	36	52
5	21	37	53
6	22	38	54
7	23	39	55
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

Kijk nu naar kaart één. Deze kaart bevat alle getallen tussen 0 en 63 die rest 4, rest 5, rest 6 of rest 7 hebben bij deling door 8.

Binair zijn dit precies de getallen

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_31x_1x_0)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_4x_30x_1x_0)_2.$$

KAART 4:

8	24	40	56
9	25	41	57
10	26	42	58
11	27	43	59
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

Kijk nu naar kaart vier. Deze kaart bevat alle getallen tussen 0 en 63 die rest 8 tot en met 15 hebben bij deling door 16.

Binair zijn dit precies de getallen

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_41x_2x_1x_0)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_5x_40x_2x_1x_0)_2.$$

KAART 2:

16	24	48	56
17	25	49	57
18	26	50	58
19	27	51	59
20	28	52	60
21	29	53	61
22	30	54	62
23	31	55	63

Kijk nu naar kaart twee. Deze kaart bevat alle getallen tussen 0 en 63 die rest 16 tot en met 31 hebben bij deling door 32.

Binair zijn dit precies de getallen

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_51x_3x_2x_1x_0)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (x_50x_3x_2x_1x_0)_2.$$

KAART 6:

32	40	48	56
33	41	49	57
34	42	50	58
35	43	51	59
36	44	52	60
37	45	53	61
38	46	54	62
39	47	55	63

Kijk nu naar kaart twee. Deze kaart bevat alle getallen tussen 0 en 63 die rest 32 tot en met 63 hebben bij deling door 64.

Binair zijn dit precies de getallen

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (1x_4x_3x_2x_1x_0)_2$$

De getallen die niet op de derde kaart staan zijn van de vorm

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = (0x_4x_3x_2x_1x_0)_2.$$

Als je nu verder ook ontdekt dat de getallen in de linkerbovenhoek de verschillende machten zijn van 2, dan kunnen we die getallen schrijven als

$$1 = (000001)_2, \quad 2 = (000010)_2, \quad 4 = (000100)_2,$$

$$8 = (001000)_2, \quad 16 = (010000)_2, \quad 32 = (100000)_2.$$

Nu we dit weten kunnen we aantonen dat de truc klopt.

Voorbeeld $47 = (101111)_2$ komt op alle kaarten voor, behalve op kaart 2. Binair kunnen 47 schrijven als de optelling van de kaarten

$$(101111)_2 = (000001)_2 + (000010)_2 + (000100)_2 + (001000)_2 + (100000)_2.$$

Dit zijn precies de getallen op de linkerbovenhoek van de kaarten waarop 47 voorkomt.

In het algemeen wordt dit, voor een willekeurig getal dat binair geschreven wordt als

$$(x_5x_4x_3x_2x_1x_0)_2 = x_0(000001)_2 + x_1(000010)_2 + x_2(000100)_2 + x_3(001000)_2 + x_4(010000)_2 + x_5(100000)_2.$$

Uit het voorgaande weet je nu dat de truc klopt.

Veralgemening

Zonder al te veel problemen zou het nu in staat moeten zijn om soortgelijke kaarten te maken voor getallen van 0 tot 127 (met 7 kaarten), of van 0 tot 255 (met 8 kaarten).

Hoofdstuk 5 De tovervierkantentruc

5.1 Wat heb je nodig?

- Een aantal tovervierkanten. Hier zijn voorbeelden van 4×4 en 5×5 tovervierkanten.

8	10	5	6
4	6	1	2
5	7	2	3
6	8	3	4

9	7	3	5
6	4	0	2
10	8	4	6
7	5	1	3

6	9	5	4
3	6	2	1
4	7	3	2
7	10	6	5

6	8	5	3	4
10	12	9	7	8
3	5	2	0	1
7	9	6	4	5
8	10	7	5	6

6	4	8	3	2
10	8	12	7	6
7	5	9	4	3
9	7	11	6	5
5	3	7	2	1

- Papier strips, die precies één kolom (of rij) van de vierkanten bedekken.
- Een blinddoek.

5.2 De truc

- De goochelaar krijgt een aantal tovervierkanten elk enkele seconden te zien en doet alsof hij ze snel memoriseert.
- Dan krijgt hij een blinddoek op en kiest het publiek hardop één van de vierkanten.

- Het publiek kiest dan een getal dat op dat vierkant staat en bedekt de rij en de kolom van dit getal.
- Van de overblijvende getallen kiest het publiek opnieuw een getal en bedekt de rij en kolom van dat getal.
- Dit wordt herhaald totdat er nog 1 getal overblijft.
- Als bij wonder kan de goochelaar dit overblijvende getal met een zeggen.

5.3 Hoe werkt de truc?

De tovervierkanten zijn zo gemaakt dat, wat de keuze van de getallen ook is, de som van de hardop gekozen getallen en het overblijvende getal steeds constant is. Het enige wat je dus moet weten is hoeveel die magische som bedraagt, zodat je het laatste getal kan bepalen.

5.4 De wiskunde achter de truc

De magische som kan je bepalen door alle elementen van de diagonaal op te tellen.

De vraag blijft: *Hoe kan je makkelijk zulke vierkanten opstellen?*

Eerst en vooral kunnen we opmerken dat de elementen van twee rijen van zo'n vierkant een vast verschil hebben en hetzelfde geldt voor de kolommen. Kijken we even naar het eerste vierkant en noem de rijen R_1, \dots, R_4 en de kolommen K_1, \dots, K_4 . Dan krijgen we

- $R_2 = R_1 - 4$, $R_3 = R_1 - 3$ en $R_4 = R_1 - 2$.
- $K_2 = K_1 + 2$, $K_3 = K_1 - 3$ en $K_4 = K_1 - 2$.

Met deze verbanden gegeven en met bijvoorbeeld 8 gegeven in de linkerbovenhoek van het vierkant, is het hele vierkant bepaald.

Meer nog, we zouden kunnen starten met 4 getallen i_1, i_2, i_3, i_4 voor de rijen en j_1, j_2, j_3, j_4 voor de kolommen en dan op elke plaats (k -de rij, l -de kolom) in het vierkant plaatsen we dan $i_k + j_l$. Voor het eerste vierkant kan dit dan bijvoorbeeld op één van de volgende manieren bepaald worden.

		j_l			
		3	5	0	1
5	8	10	5	6	
1	4	6	1	2	
2	5	7	2	3	
3	6	8	3	4	

		j_l			
		4	6	1	2
4	8	10	5	6	
0	4	6	1	2	
1	5	7	2	3	
2	6	8	3	4	

Je ziet nu ook duidelijk dat deze vierkanten voldoen aan de regel dat wanneer je de elementen met de strips weg doet, en die elementen optelt, je dan steeds dezelfde som krijgt, namelijk $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + j_1 + j_2 + j_3 + j_4$. Elke rij en elke kolom heb je immers 1 maal gebruikt bij het optellen.

Voor het 4×4 vierkant krijg je dan ook $5 + 1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 0 + 1 = 20$ als som.

Het eerste 5×5 vierkant kan je bekomen als volgt:

		j_l				
		3	5	2	0	1
3	6	8	5	3	4	
7	10	12	9	7	8	
i_k 0	3	5	2	0	1	
4	7	9	6	4	5	
5	8	10	7	5	6	

Met als magische som 30.

Deze magische som komt uiteraard ook overeen met de som van de elementen op de diagonaal.

Hoofdstuk 6 De dominotruc

6.1 Wat heb je nodig?

- Een set dominosteentjes (als je dit niet hebt kan het ook op papier).

6.2 De truc

- Vraag je vriend om een dominosteentje te kiezen.
- Laat hem/haar het eerste getal maal 5 doen, daarna 7 bij optellen en dan maal 2 doen. Als laatste moet hij/zij het tweede getal erbij optellen.
- Vraag hem/haar wat zijn uitkomst is.
- Je denk even kort na en je kan plots de twee getallen van het dominosteentje opnoemen.

6.3 Hoe werkt de truc?

Van het getal dat je krijgt moet je 14 aftrekken. De uitkomst die je krijgt bestaat uit twee cijfers. Die cijfers zijn precies de twee getallen van de dominosteent die we zoeken! (Bijvoorbeeld als 59 de uitkomst is die je krijgt, heb je $59 - 14 = 45$; de dominosteent bestaat dan uit 4 en 5.)

6.4 De wiskunde achter de truc

Noem x het eerste getal en y het tweede getal. Dat wordt de bewerking

$$(5x + 7)2 + y = 10x + y + 14.$$

Vermits $10x + y$ overeenkomt met een getal bestaande uit twee cijfers met x het cijfer van de tientallen en y het cijfer van de eenheden, krijgen we inderdaad een werkende truc indien we 14 van het eindtotaal aftrekken.

Hoofdstuk 7 De 9 kaartentruc

7.1 Wat heb je nodig?

- Een boek kaarten (52 kaarten)

7.2 Voorbereiding

- Neem 9 kaarten met de nummers 1 tot en met 9 en leg die bedekt naast elkaar (in volgorde, nummer 1 uiterst links)

7.3 De truc

- Het publiek moet dan een aantal (min 1, max 9) kaarten van links naar rechts verschuiven. Om te laten zien hoe dit moet verschuif je alvast 2 kaarten als voorbeeld (1 voor 1, je plaatst de meest linkse naast de meest rechtse en dan nog eens).
- Nu is het de beurt aan je publiek. Jij mag dit echter niet zien en dus verwijder je je even of laat je je blinddoeken.
- Als het publiek klaar is, toon je als goochelaar hoeveel kaarten verplaatst zijn door één van de kaarten om te draaien.
- Herhaal deze truc zo vaak je wil.

7.4 Hoe werkt de truc?

- De eerste keer zal het aantal verplaatste kaarten overeenkomen met het cijfer op de kaart op plaats "3" (van rechts geteld). Onthoud dit aantal.

- Doe je truc dan nog eens, dan neem je de kaart op plaats "3+dit aantal". (Als de plaats groter wordt dan 9, dan trek je er 9 af), tel steeds van rechts. - Dit kan je blijven herhalen: de plaats van de volgende kaart die je moet nemen is steeds de plaats van de vorige kaart + het aantal dat op die kaart stond (steeds rechts beginnen tellen, als het meer dan 9 is, trek dan 9 af).

7.5 De wiskunde achter de truc

Deze truc is interessant om in de klas te gebruiken als je wil praten over *modulorekenen*. De plek waar de vorige ronde de kaart met de 9 stond, zal de volgende keer precies de kaart bevatten die met de waarde aangeeft hoeveel kaarten er verplaatst zijn.