

Paaseieren met parameterkrommen

Michel Roelens

UCLL Hogeschool Diepenbeek
Maria-Boodschaplyceum Brussel

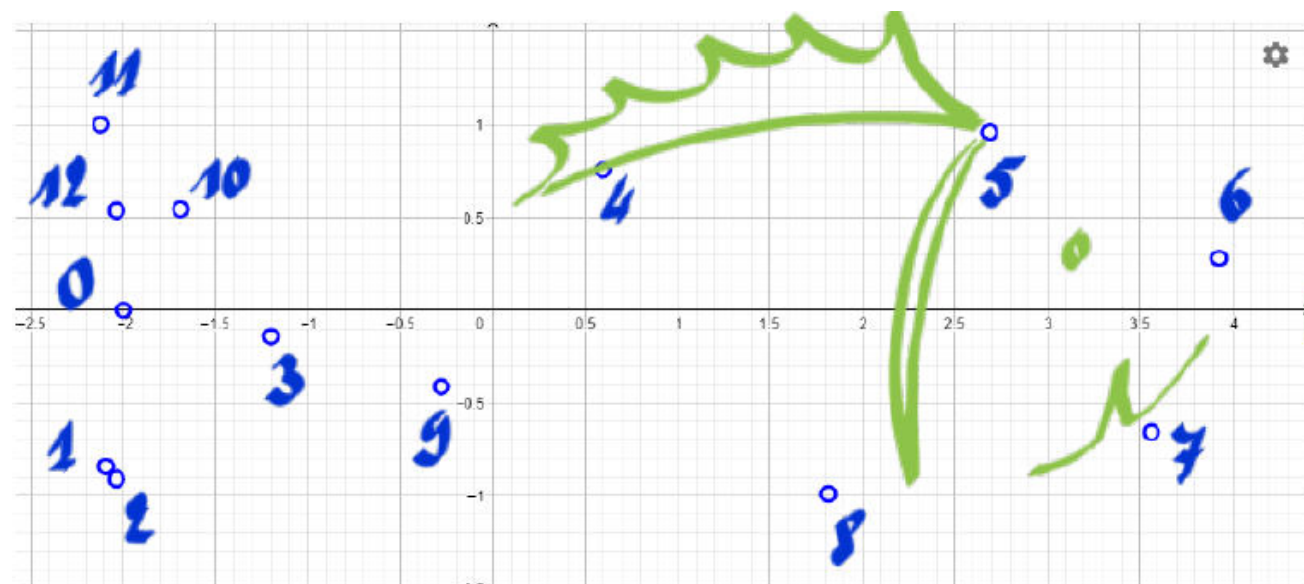
 **UITWISKELING**

Al geabonneerd?



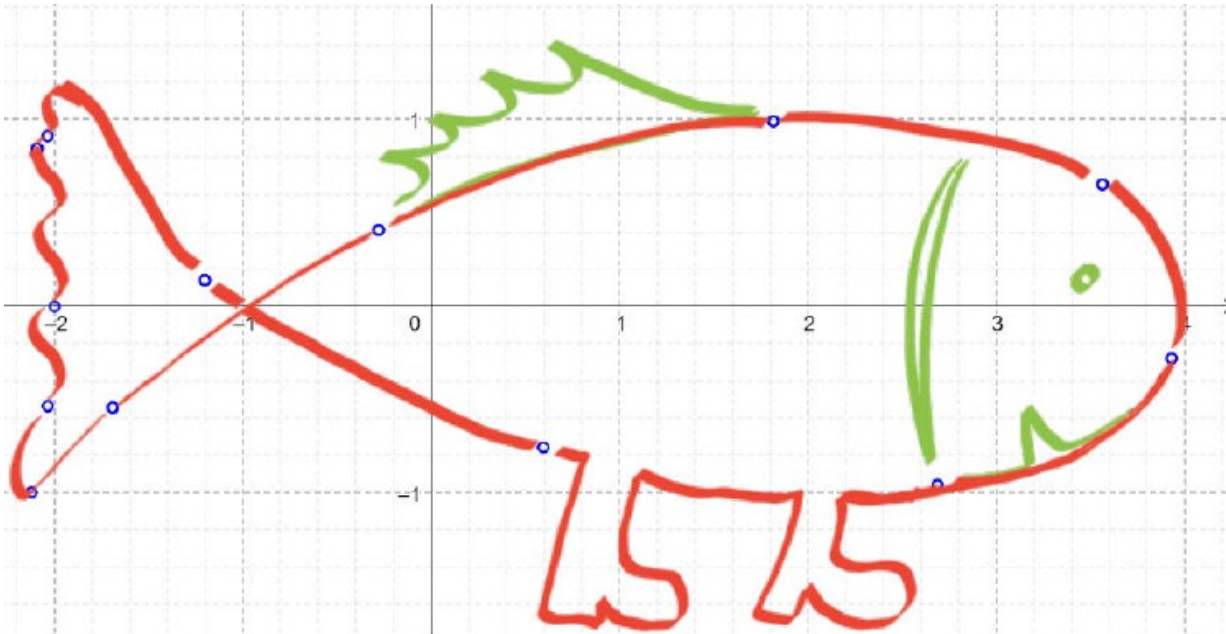
PUNTIEN VERBINDEN

Punten verbinden



Punten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos t - 3 \cos \frac{t}{2} \\ y = -\sin t \end{cases} \quad t = 0, 1, \dots, 13$$



De vis van
LUC VAN DEN BROECK

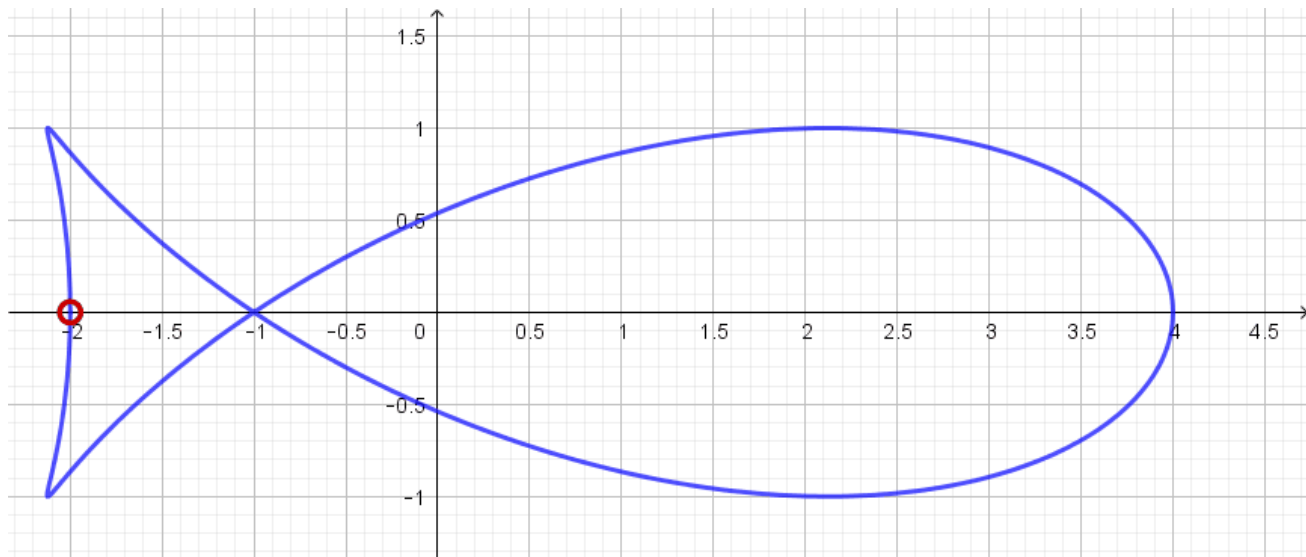
Punten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos t - 3 \cos \frac{t}{2} \\ y = -\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$



Punten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos t - 3 \cos \frac{t}{2} \\ y = -\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$



Parametervoorstelling
van een vlakke kromme

t is de **parameter**

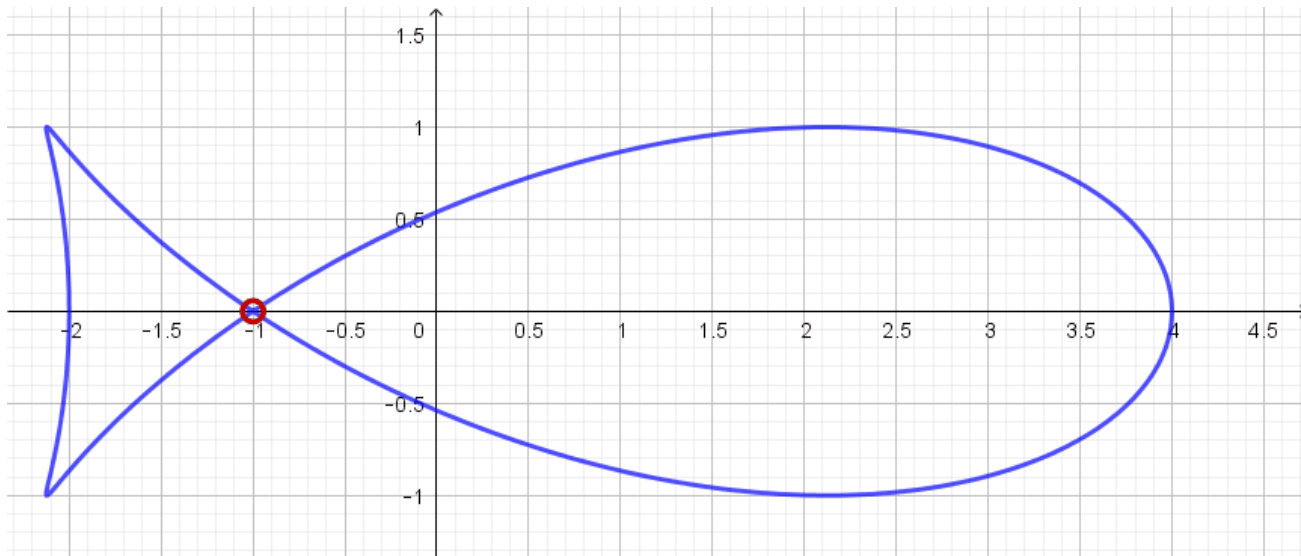
Punkten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos(t + \pi) - 3 \cos \frac{t+\pi}{2} \\ y = -\sin(t + \pi) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$



Punkten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos(t + \pi) - 3 \cos \frac{t + \pi}{2} \\ y = -\sin(t + \pi) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$



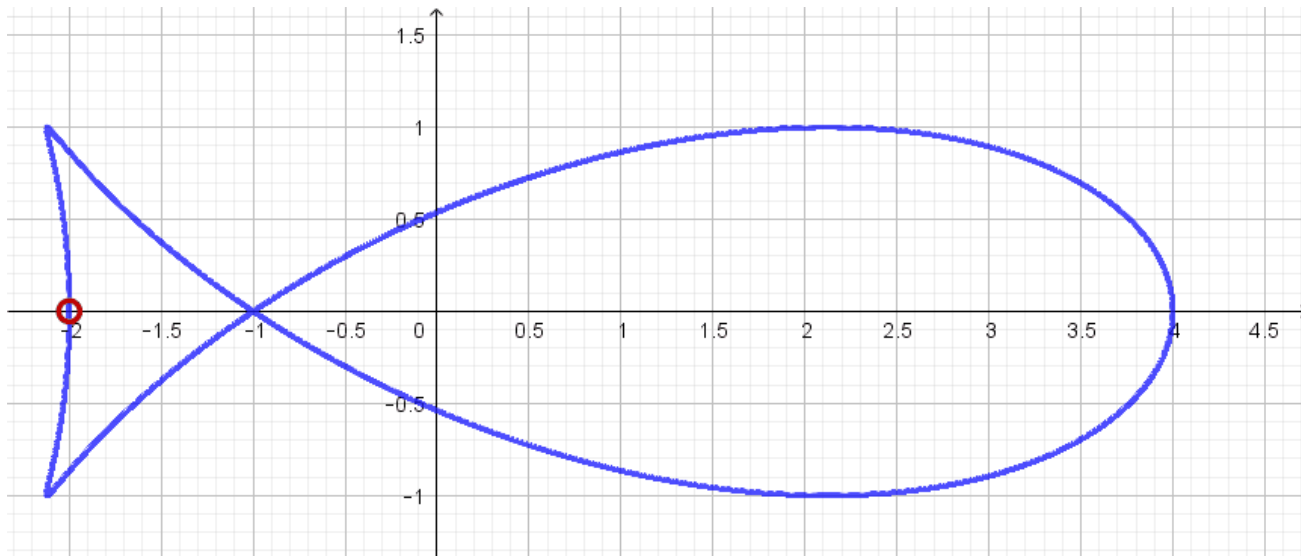
Punten verbinden

$$\begin{cases} x = \cos(\mathbf{10}t) - 3 \cos \frac{\mathbf{10}t}{2} \\ y = -\sin(\mathbf{10}t) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$



Punkten verbinden

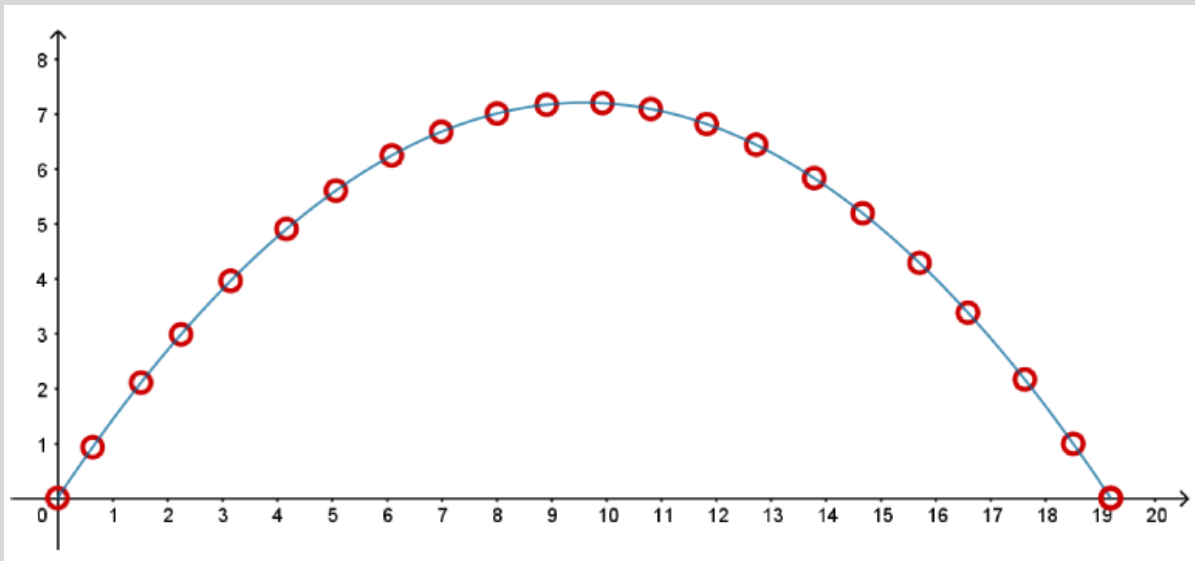
$$\begin{cases} x = \cos(\mathbf{10}t) - 3 \cos \frac{\mathbf{10}t}{2} \\ y = -\sin(\mathbf{10}t) \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$$





DE SNELHEIDSVECTOR

De snelheidsvector

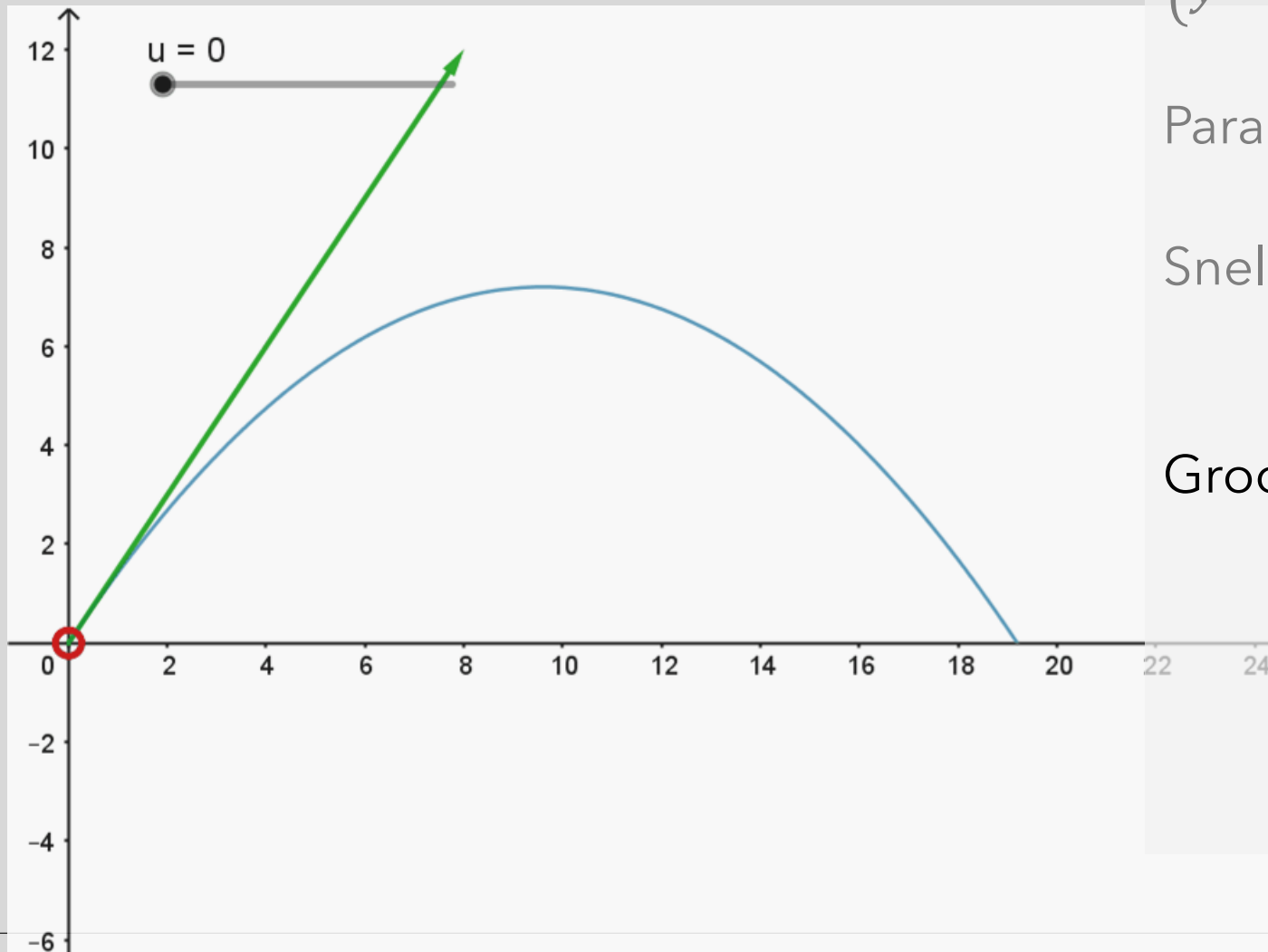


$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases} \quad (t \text{ in s; } x, y \text{ in m})$$

$$\text{Parabool } y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{64}x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Snelheid } \vec{v}(t) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (8, 12 - 10t) \end{aligned}$$

De snelheidsvector



$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases} \quad (t \text{ en s.; } x, y \text{ en m})$$

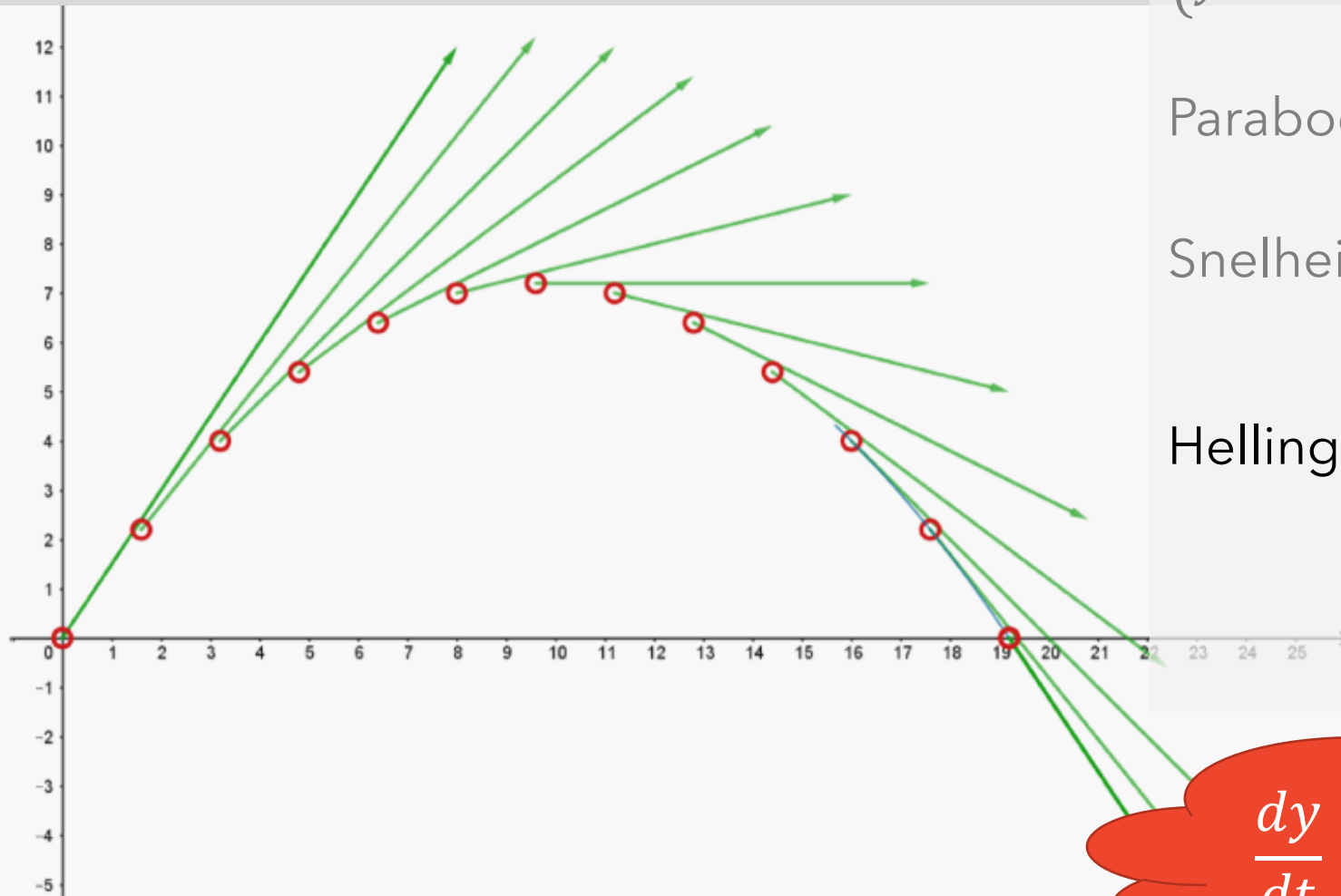
$$\text{Parabool } y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Snelheid } \vec{v}(t) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (8, 12 - 10t) \end{aligned}$$

Grootte van de snelheid

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{8^2 + (12 - 10t)^2} \\ &= 2\sqrt{52 - 60t + 25t^2} \end{aligned}$$

De snelheidsvector



$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases} \quad (t \text{ in s.; } x, y \text{ in m})$$

$$\text{Parabool } y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Snelheid } \vec{v}(t) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (8, 12 - 10t) \end{aligned}$$

Helling van de raaklijn:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6 - 5t}{4}$$

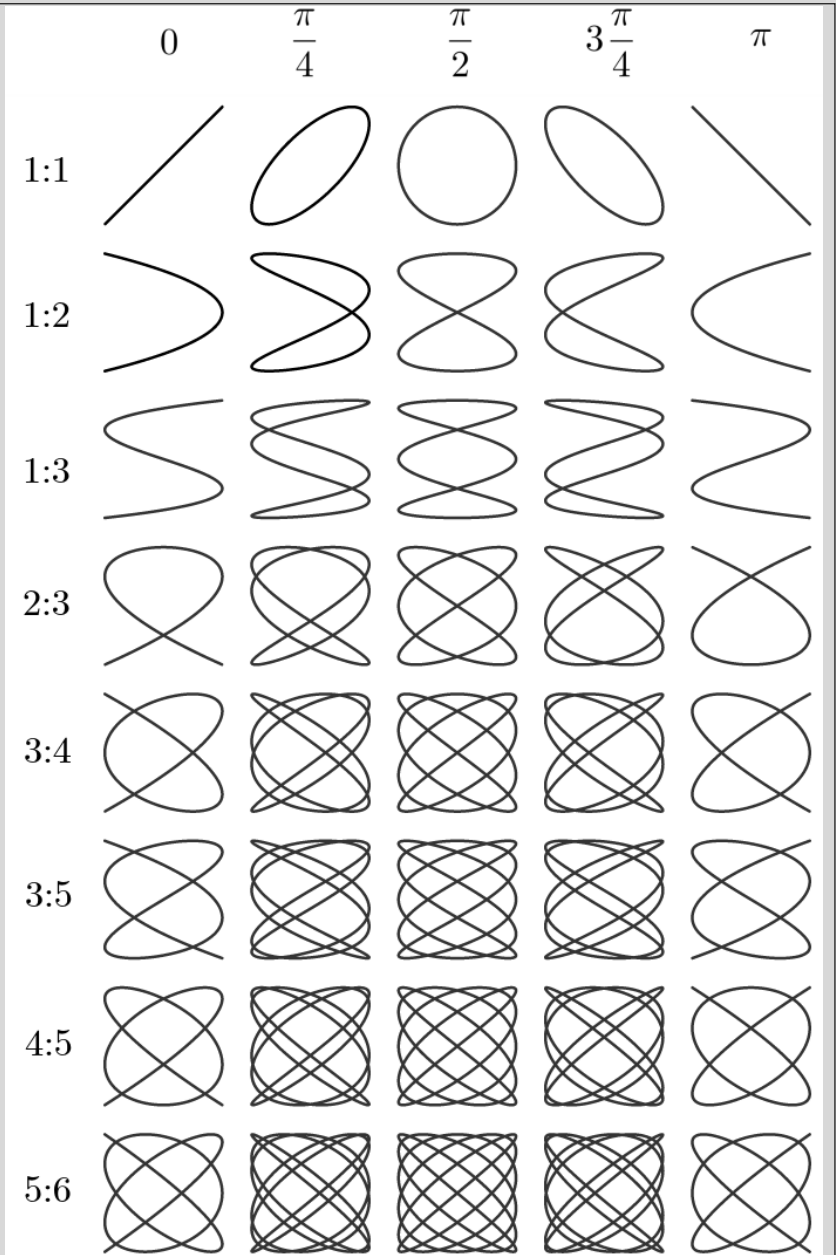
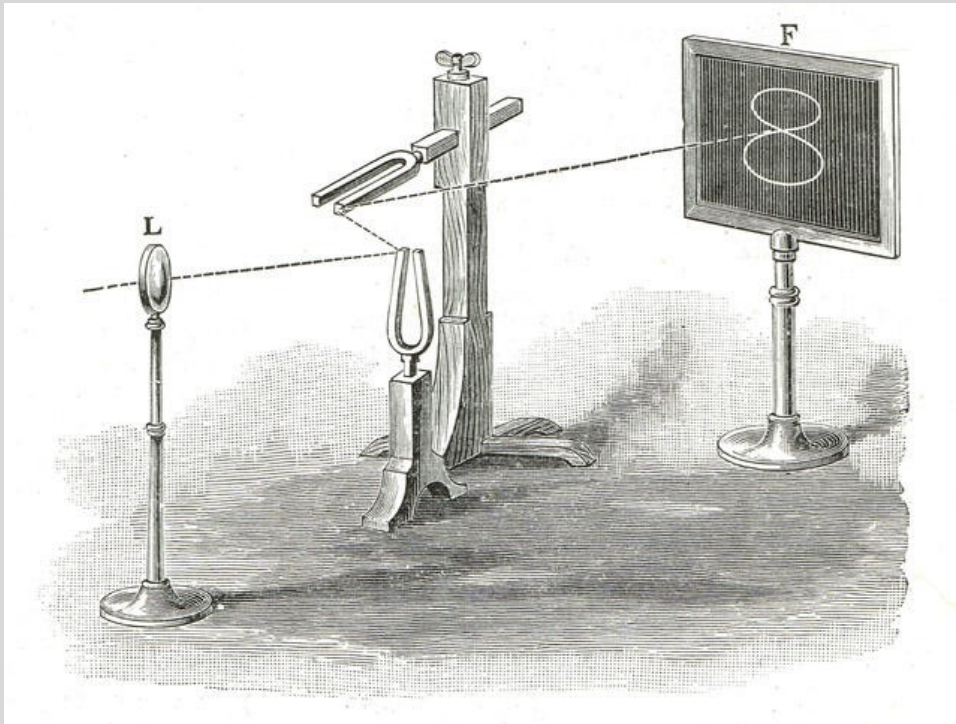
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{kettingregel}$$



LISSAJOUSFIGUREN

Lissajousfiguren

JULES ANTOINE LISSAJOUS, natuurkundige, 19de eeuw:
combinatie van twee harmonische trillingen



FUNCTION GENERATORS



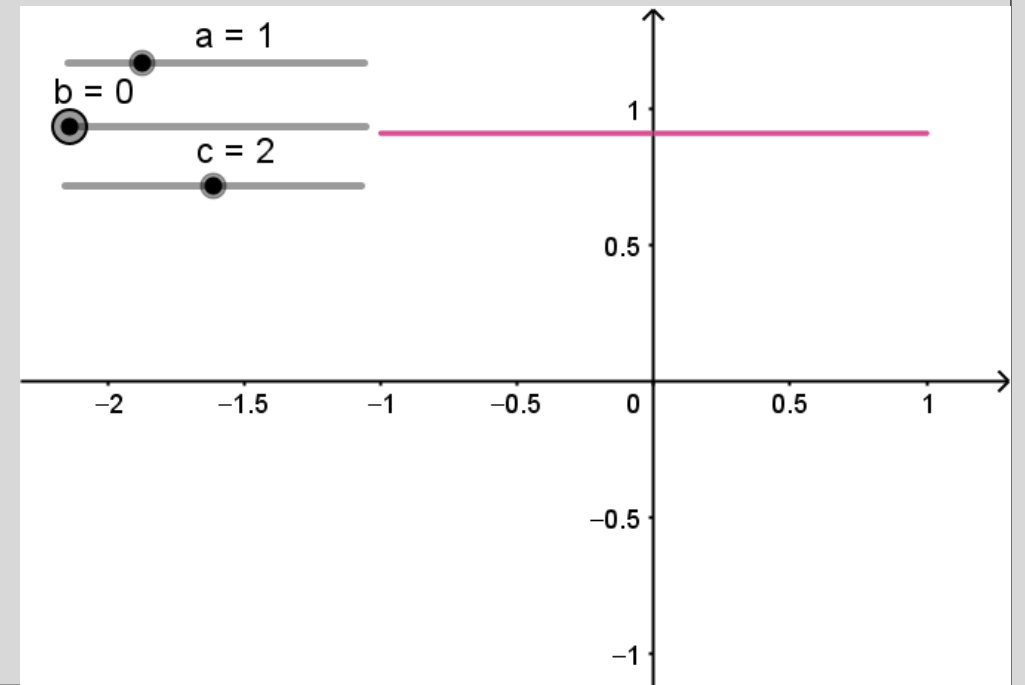
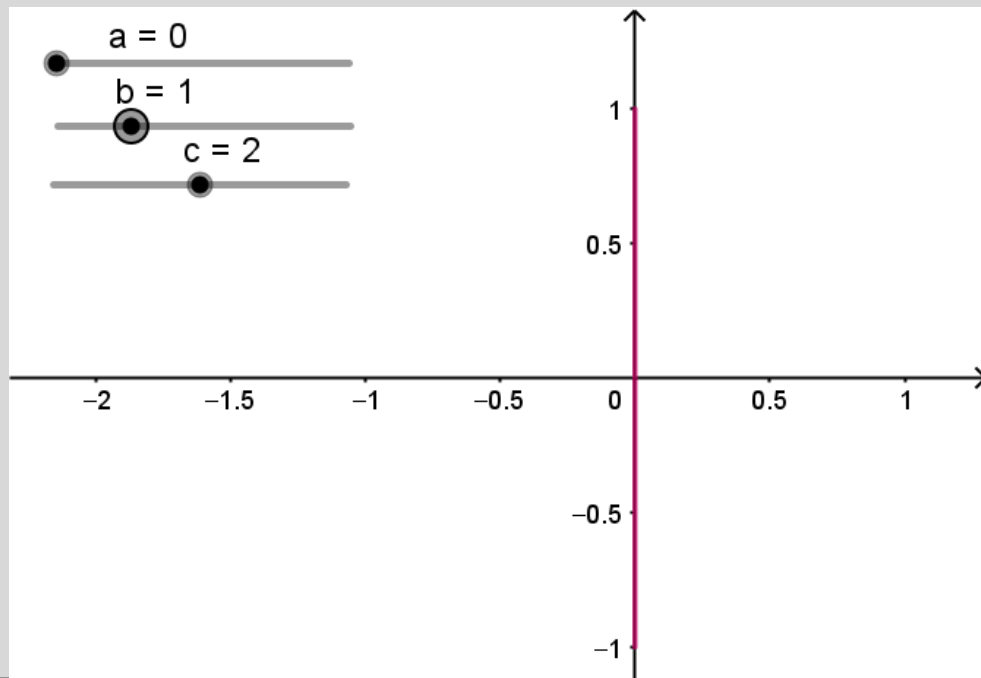
DIGITAL OSCILLOSCOPE



Lissajousfiguren

Voor GeoGebra: één figuur.

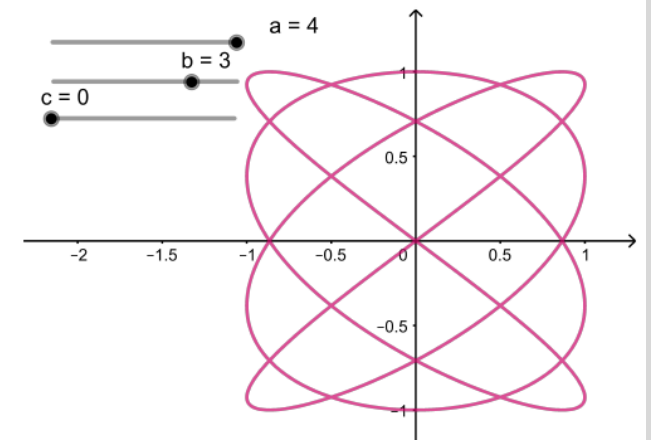
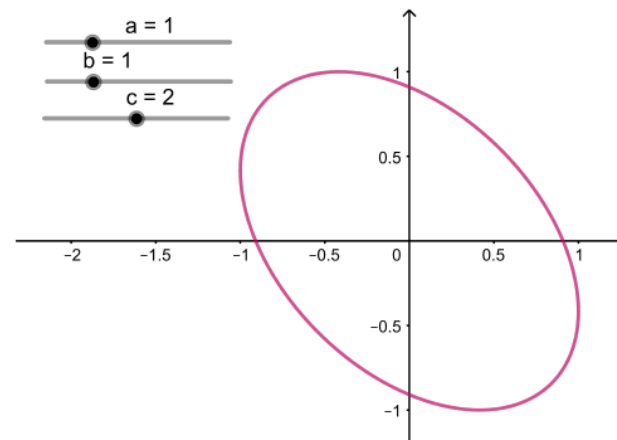
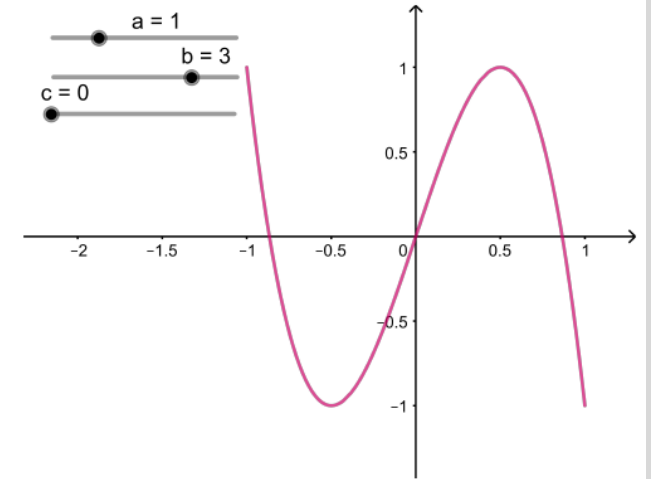
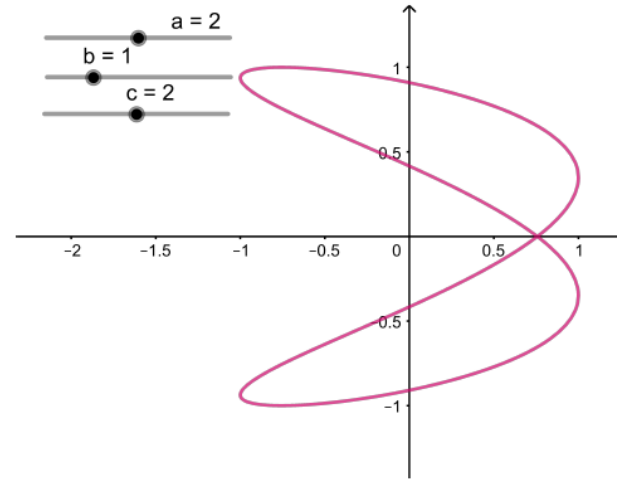
$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin(bt + c) \end{cases}$$



Lissajousfiguren

$$\begin{cases} x = \sin at \\ y = \sin(bt + c) \end{cases}$$

Mooie opgaven in Uitwiskeling.
(Zie hand-out p. 1.)





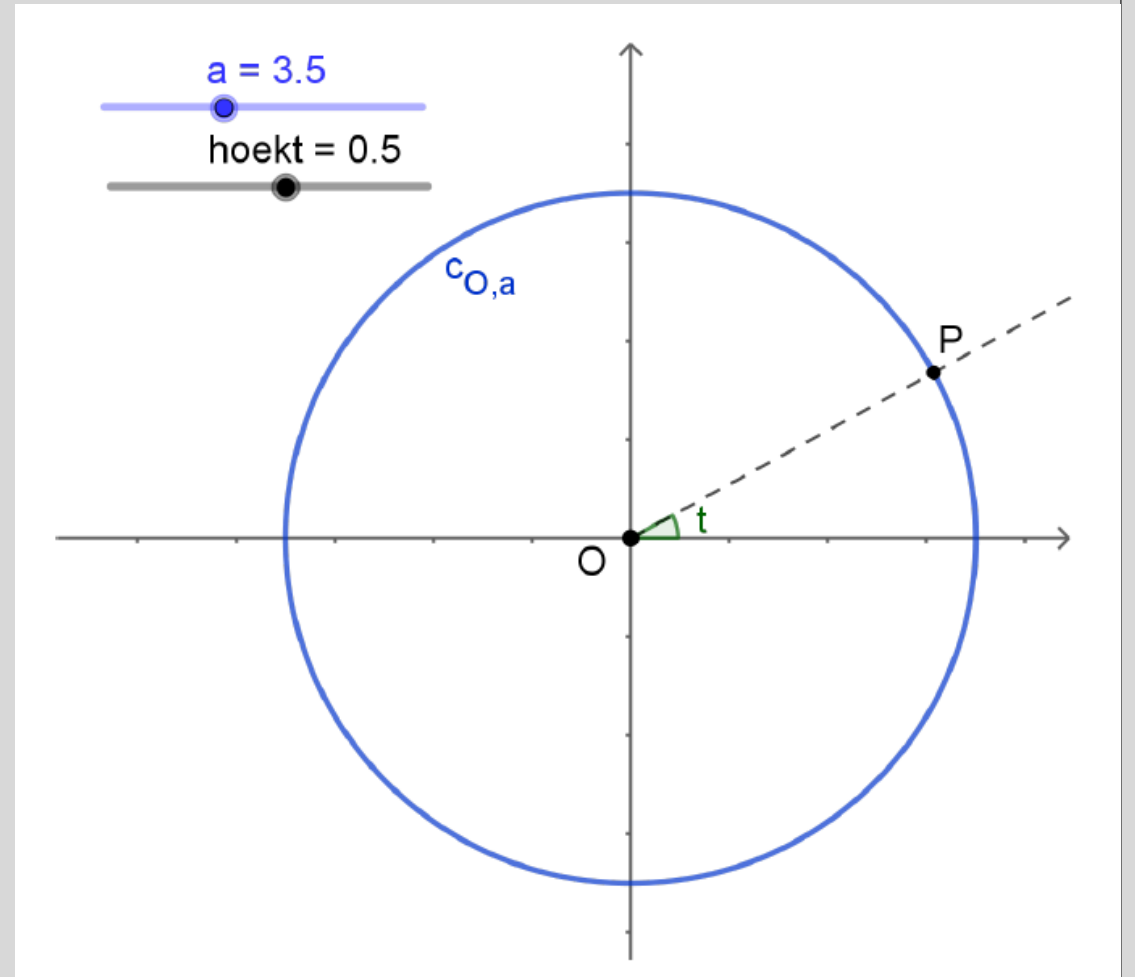
PASEN IS NET GEPASSEERD.

Pasen is net gepasseerd

We starten met een cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal a .

Neem als parameter de middelpuntshoek t .

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

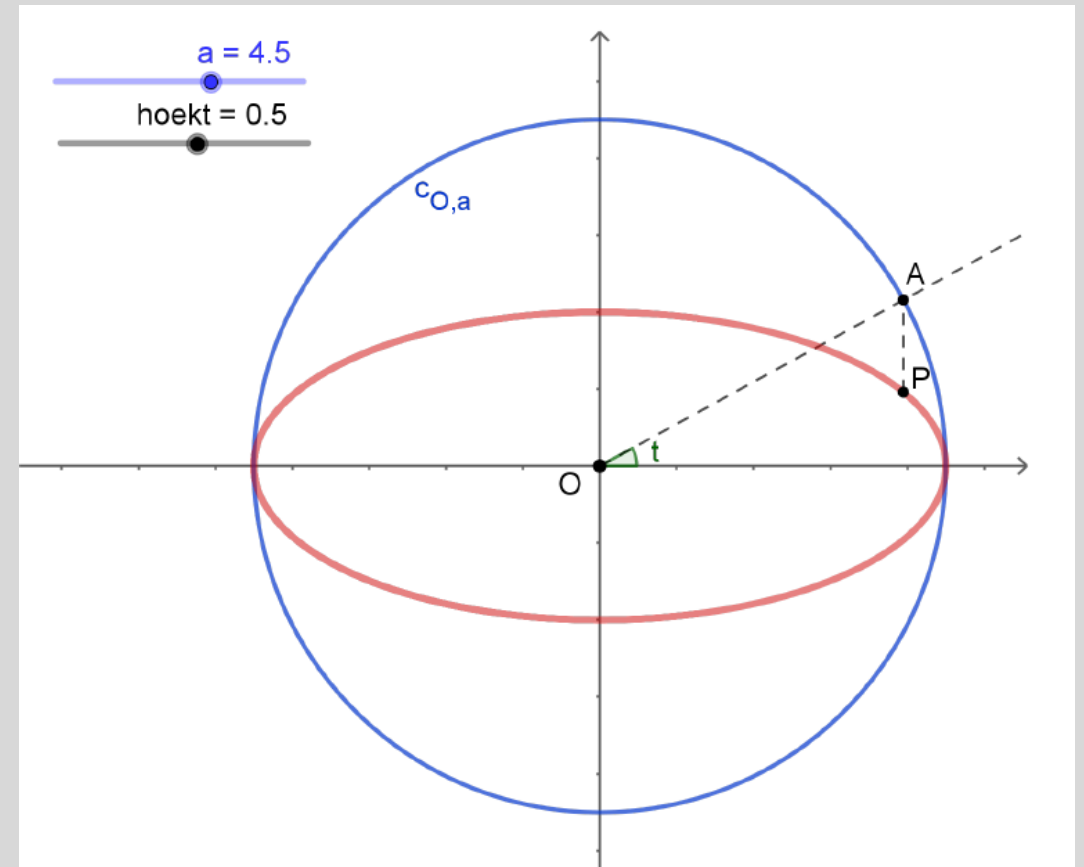


Pasen is net gepasseerd

We pletten die tot een ellips door de y -coördinaten te vermenigvuldigen met een factor $\frac{b}{a}$. Dit geeft:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

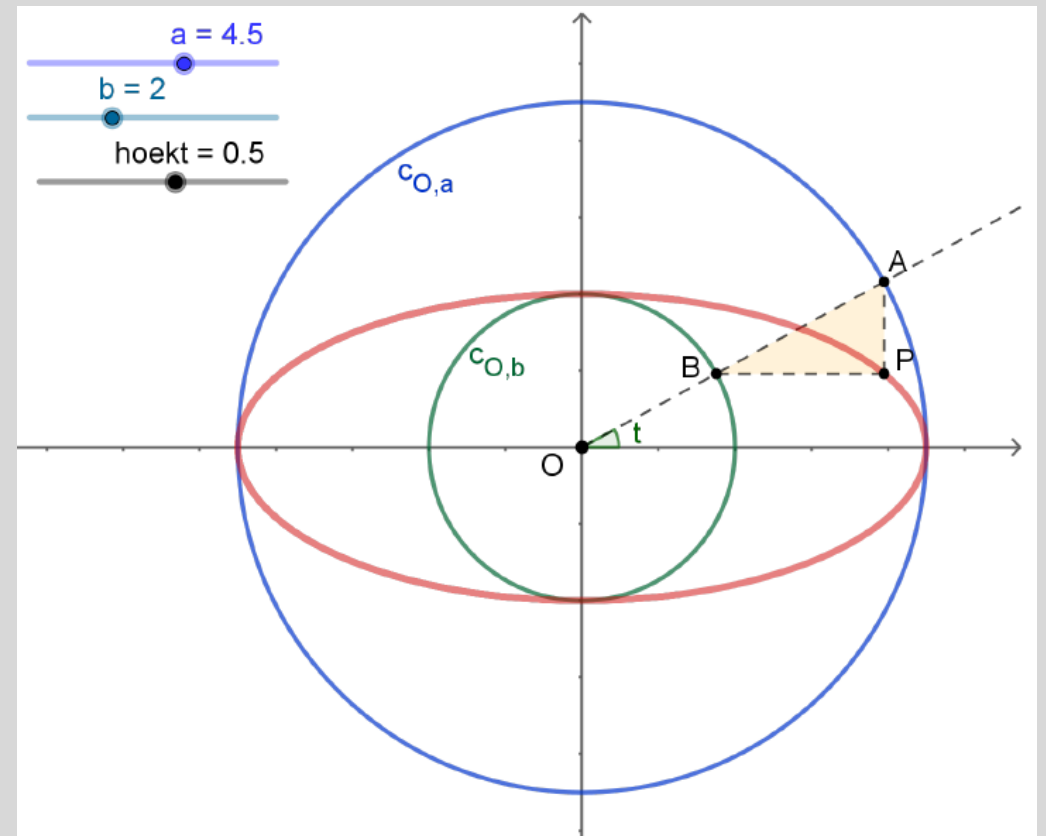
De parameter t is nu niet meer de hoek tussen de x -as en OP .



Pasen is net gepasseerd

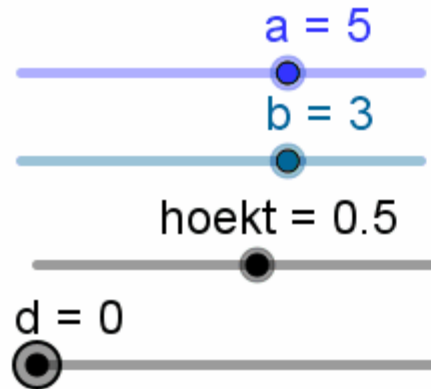
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

Een andere manier om dezelfde ellips te krijgen: concentrische cirkels met stralen a en b en dan het oranje rechthoekig driehoekje.

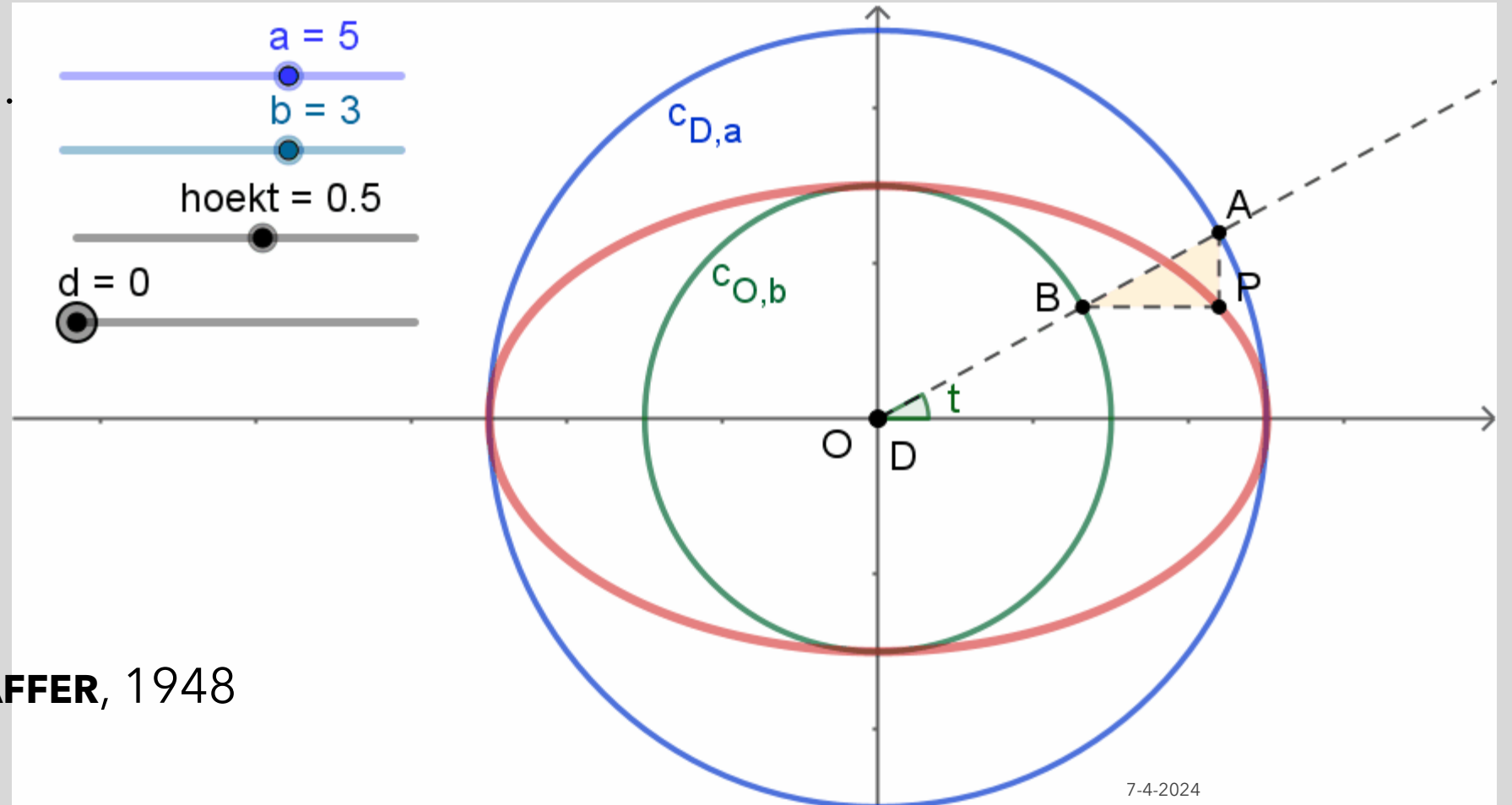


Pasen is net gepasseerd

Van ellips naar ei.



Excentreren.



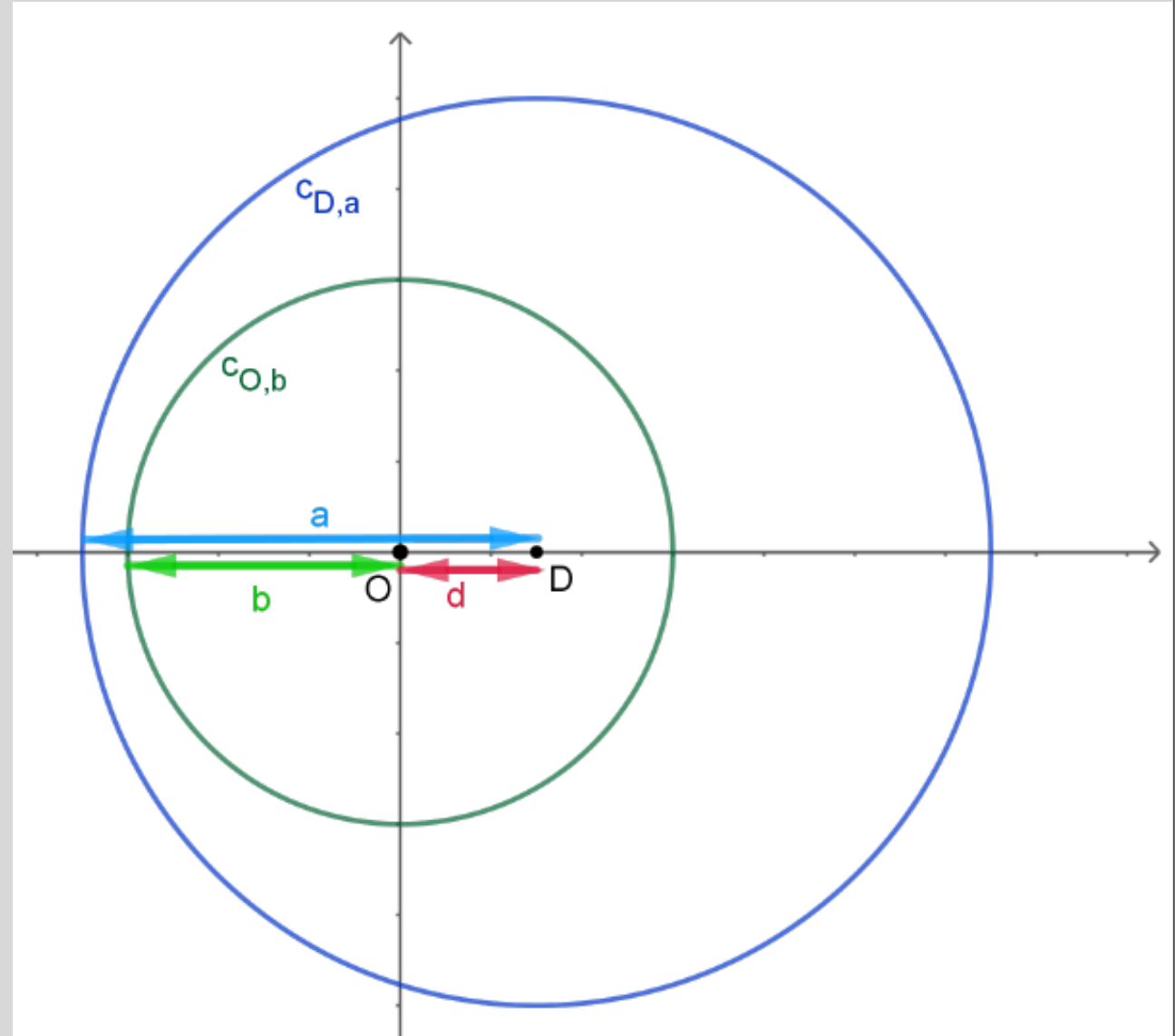
FRITZ HÜGELSCHÄFFER, 1948

Pasen is net gepasseerd

We excentreren de grote cirkel met straal a en nieuw middelpunt $D(d, 0)$.

Maximale waarde van d zodat de kleine cirkel binnen de grote blijft?

$$d < a - b$$



Pasen is net gepasseerd

Aan het werk! Hand-out p. 2.

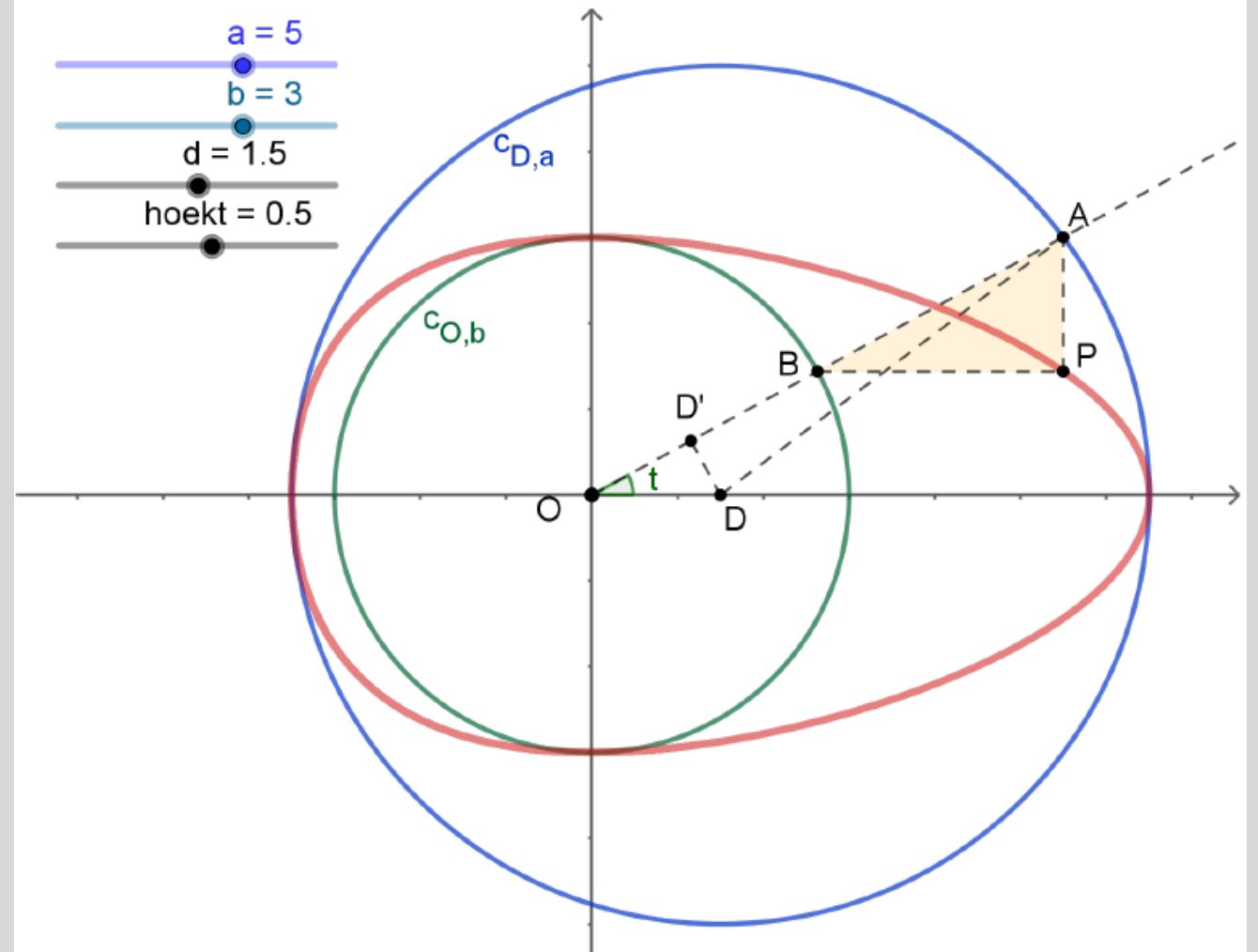
Schrijf parametervergelijkingen voor de eikromme.

Dus: de coördinaten x en y van P uitdrukken in de parameter t en de constanten a , b en d .

a = straal grote cirkel

b = straal kleine cirkel

d = afstand tussen de middelpunten D en O .



Pasen is net gepasseerd

Laten we nakijken

$$\begin{cases} x = |OA| \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$|OA| = |OD'| + |D'A|$$

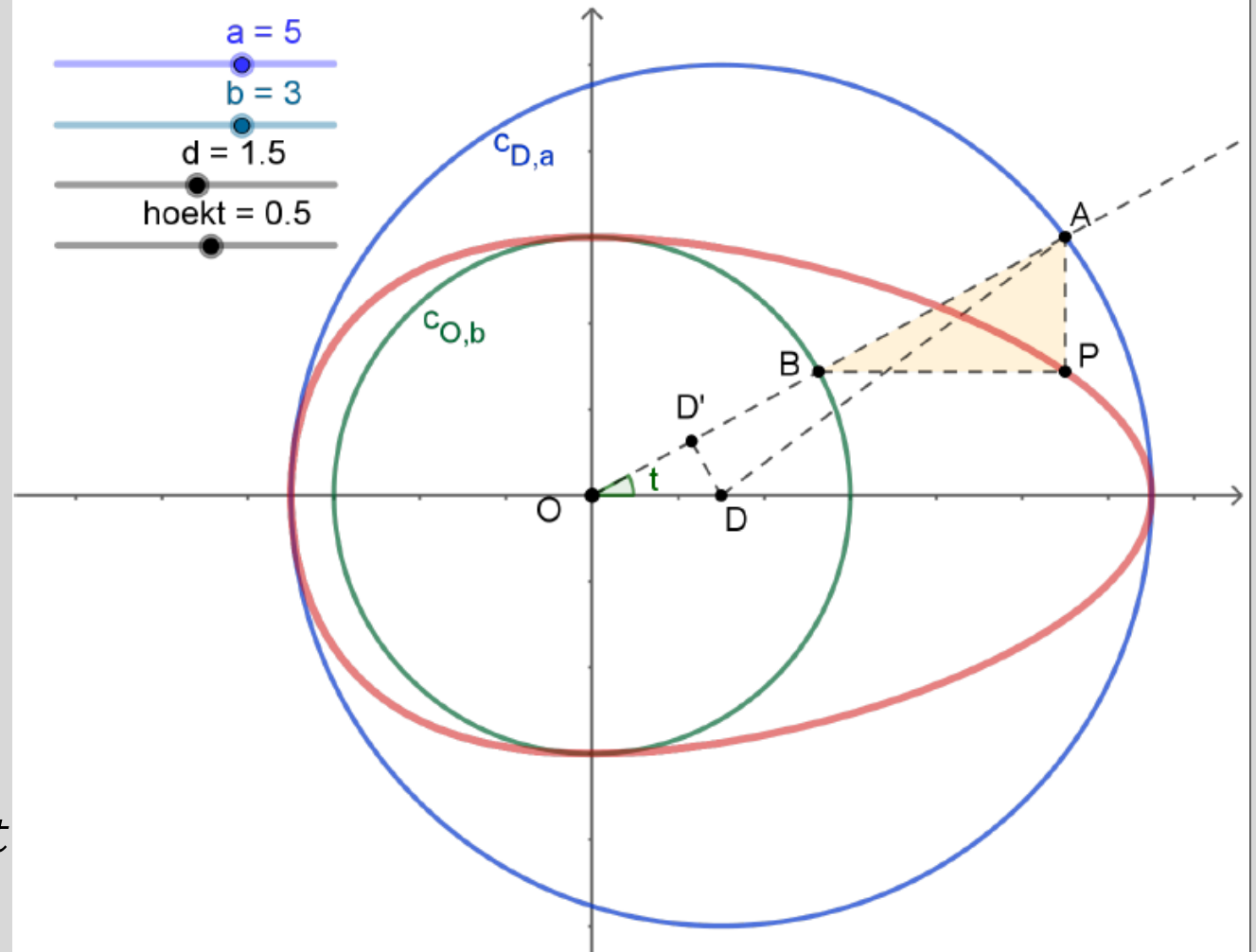
$$= d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}$$

$\Delta ODD'$

$\Delta ADD'$

Dus:

$$\begin{cases} x = \left(d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t} \right) \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$



Pasen is net gepasseerd

$$\begin{cases} x = (d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}) \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

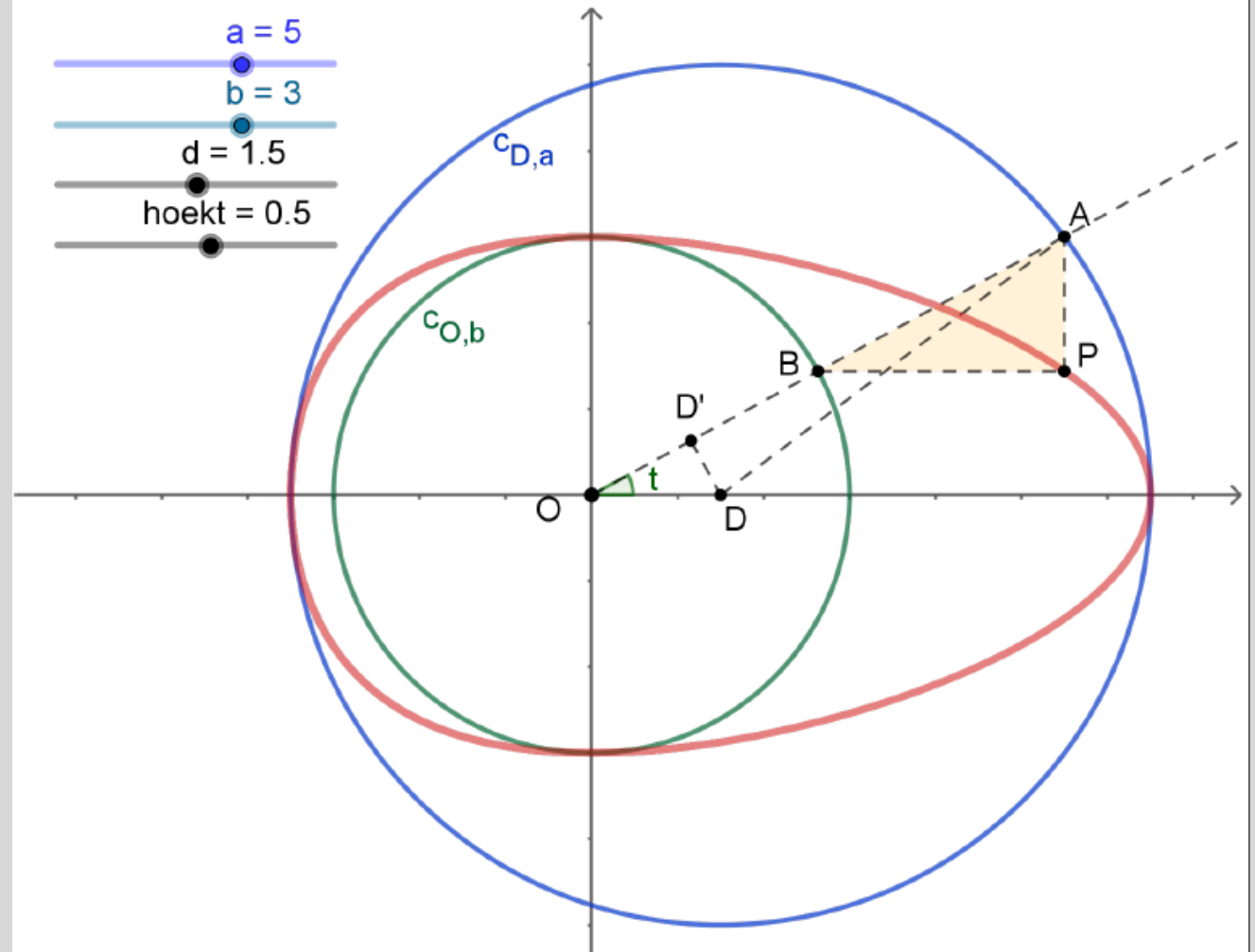
Aan het werk!

Meet je ei.

a = straal grote cirkel

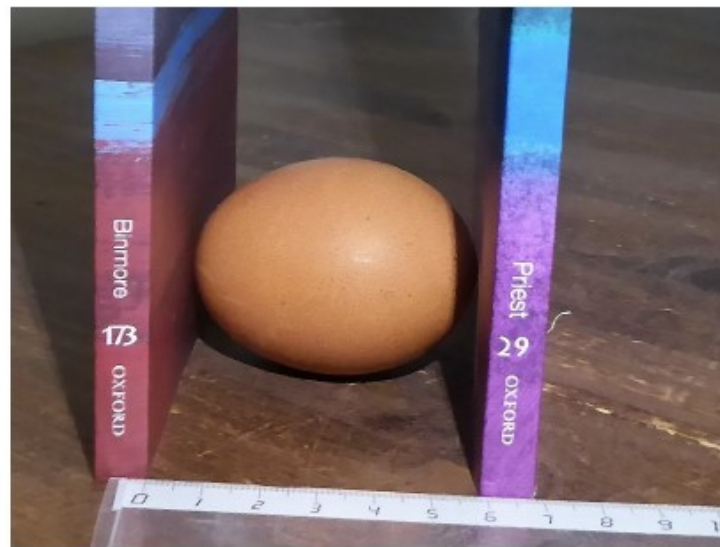
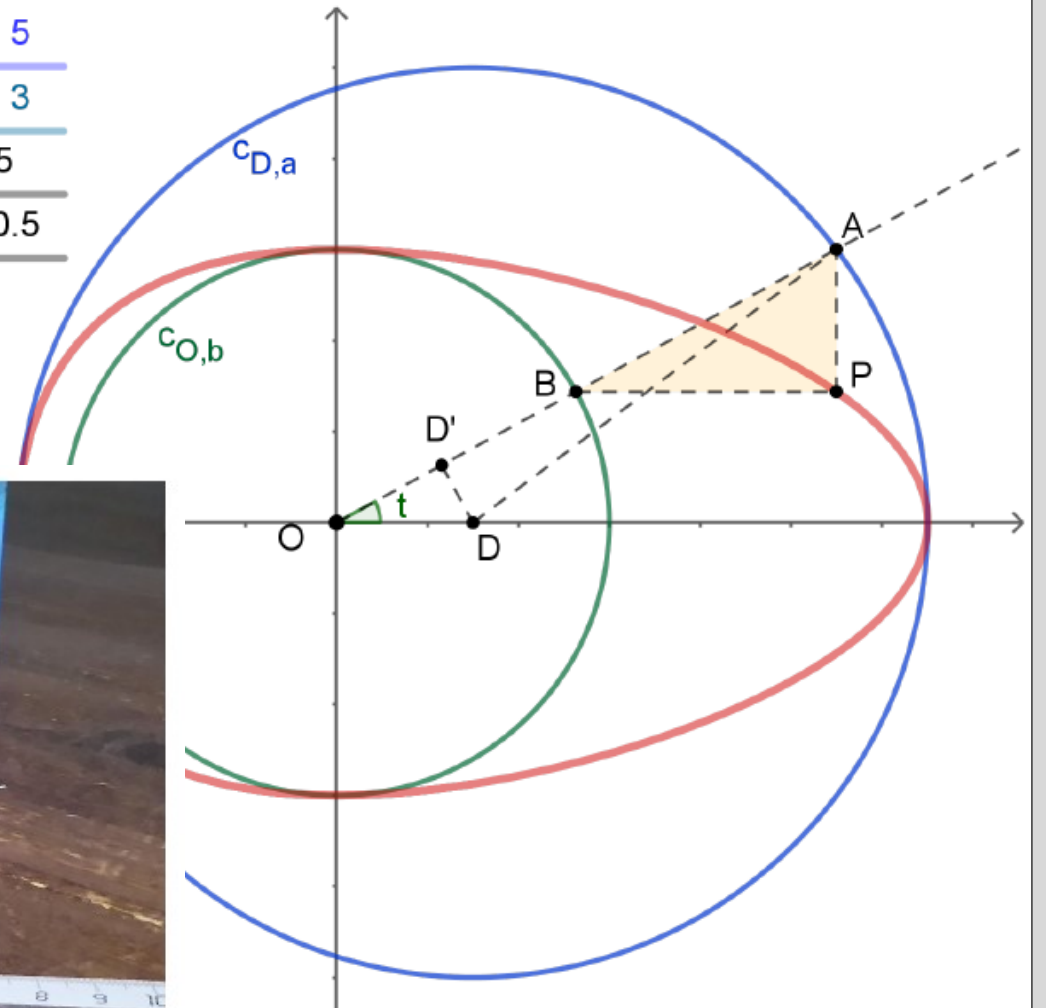
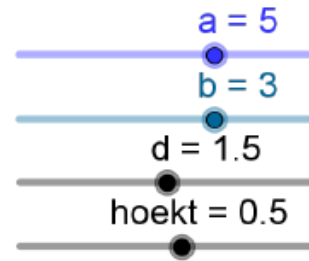
b = straal kleine cirkel

d = afstand tussen de
middelpunten D en O .



Pasen is net gepasseerd

$$\begin{cases} x = (d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}) \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$



Parameter elimineren

$$\begin{cases} x = (d \cos t + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 t}) \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

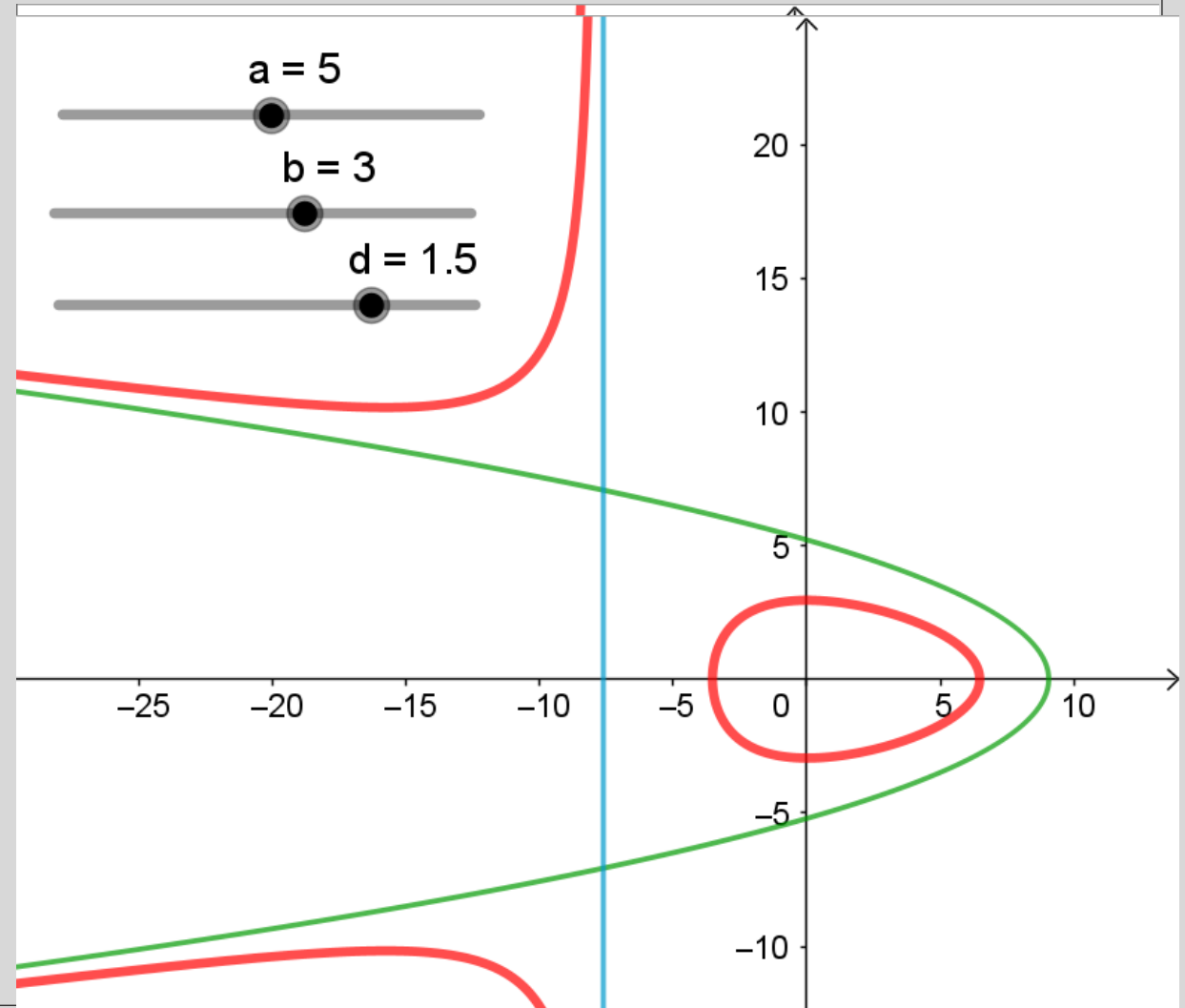
Als we de parameter t elimineren:

$$y^2 = \frac{b^2(-x^2 + 2dx - d^2 + a^2)}{2dx - d^2 + a^2}$$

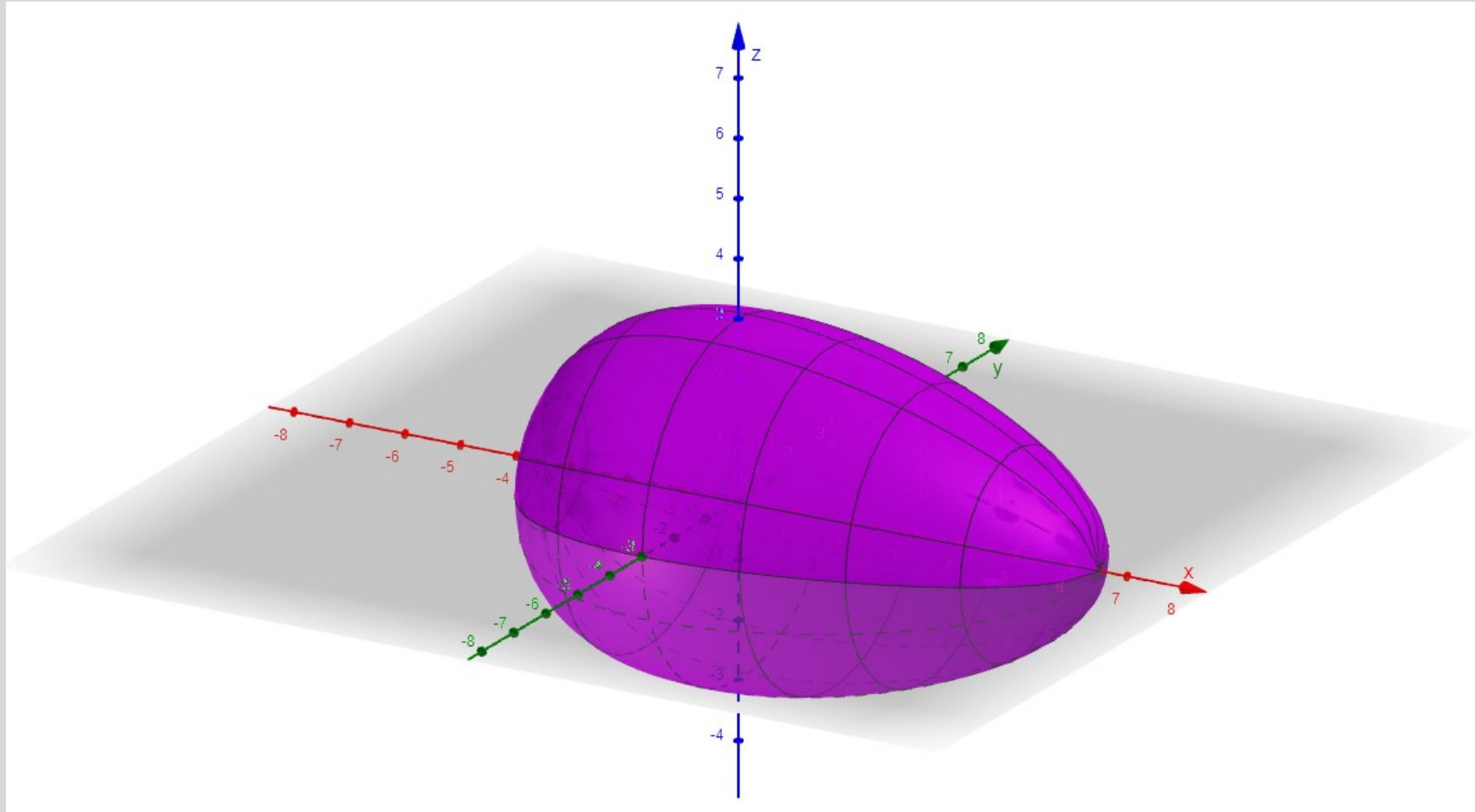
Rechte asymptoot

Parabolische asymptoot

Berekeningen zie hand-out p. 4-5.



3D-ei: de eikromme wentelen om de x -as



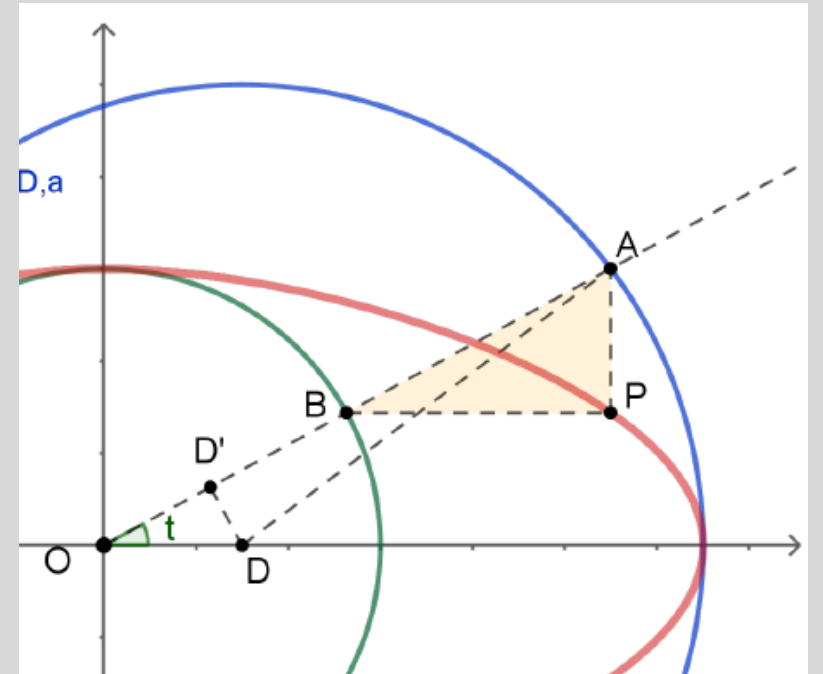
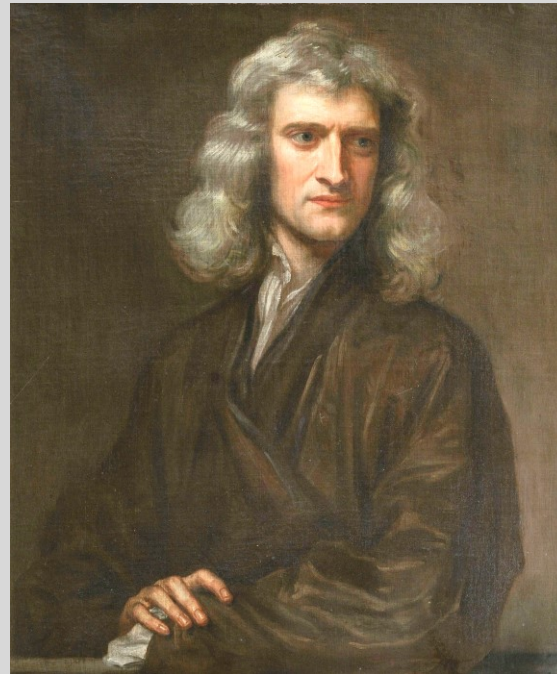


DE NEWTON- TRANSFORMATIE

Newton-getransformeerde

Het ei van Hügelschäffer is de *Newton-getransformeerde* van de twee cirkels.

ISAAC NEWTON (17^{de} eeuw)



Newton-getransformeerde

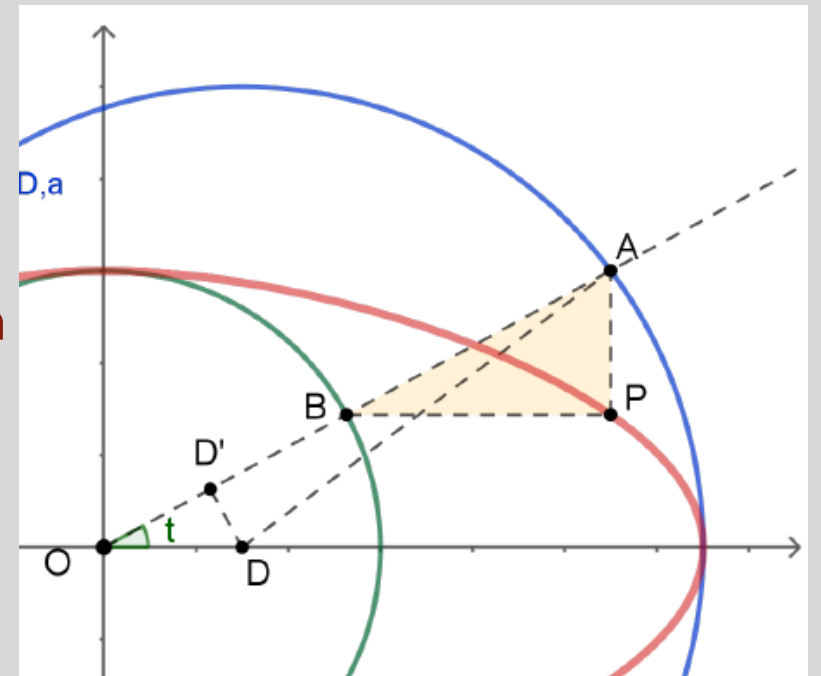
Algemeen

Gegeven twee krommen c en d in een assenstelsel (O, x, y) .

Een variabele halfrechte met beginpunt O snijdt c in A en d in B .

Teken een rechthoekige driehoek ABP met AP evenwijdig met de y -as en BP evenwijdig met de x -as.

De Newton-getransformeerde van (1) c en (2) d is de meetkundige plaats van P .

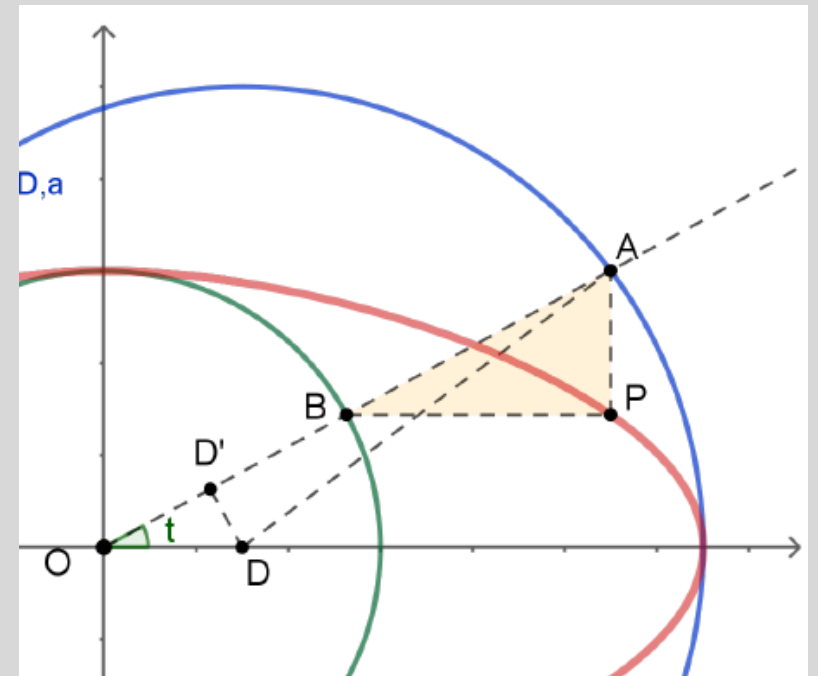


Newton-getransformeerde

Aan het werk!

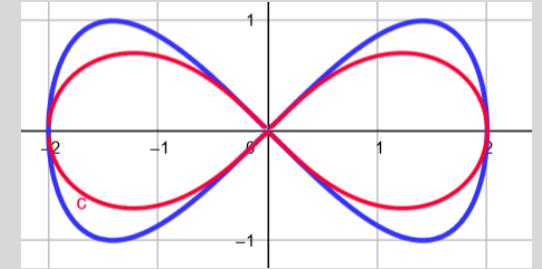
Teken enkele andere Newton-getransformeerden.

Gebruik de symmetrie...



Newton-getransformeerde

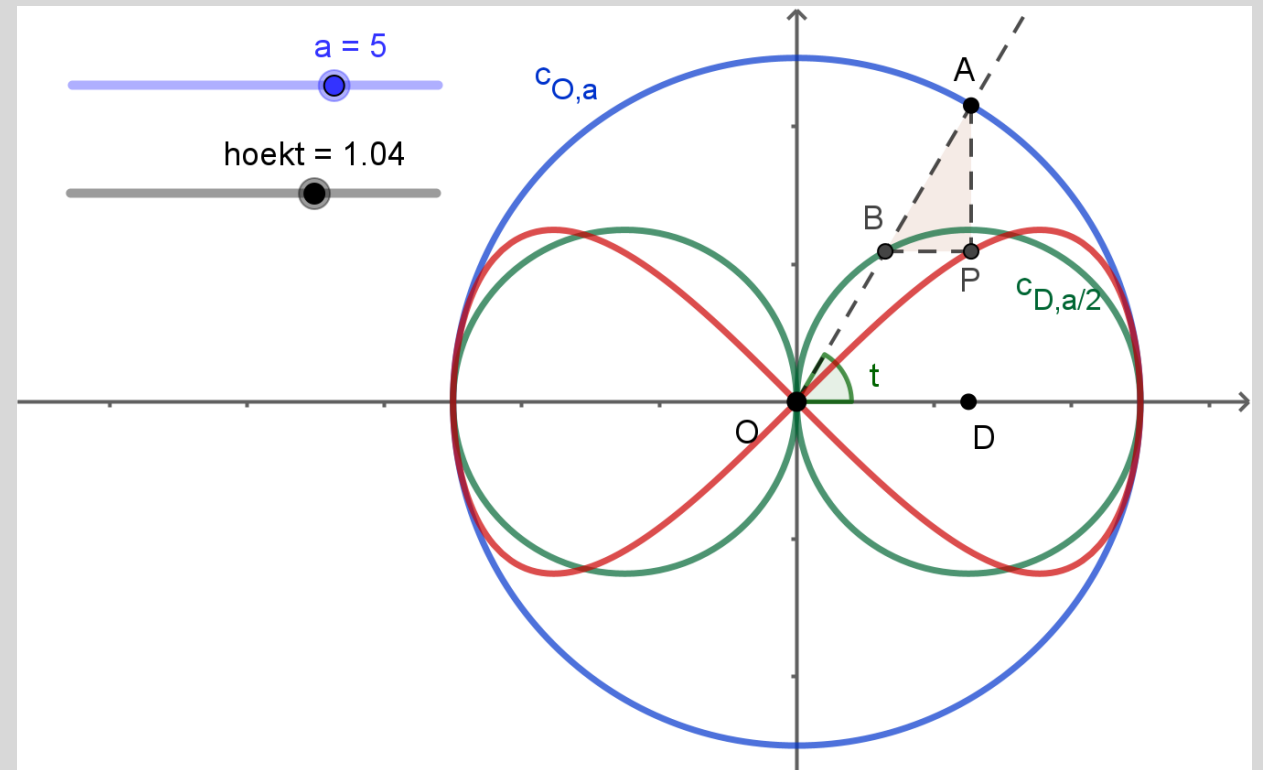
Gerono
Bernoulli



(1) de (grote) cirkel met middelpunt O en straal a

(2) de (kleine) cirkel met middelpunt D en straal $\frac{a}{2}$

De lemniscaat van **CAMILLE-CHRISTOPHE GERONO** (19de eeuw)

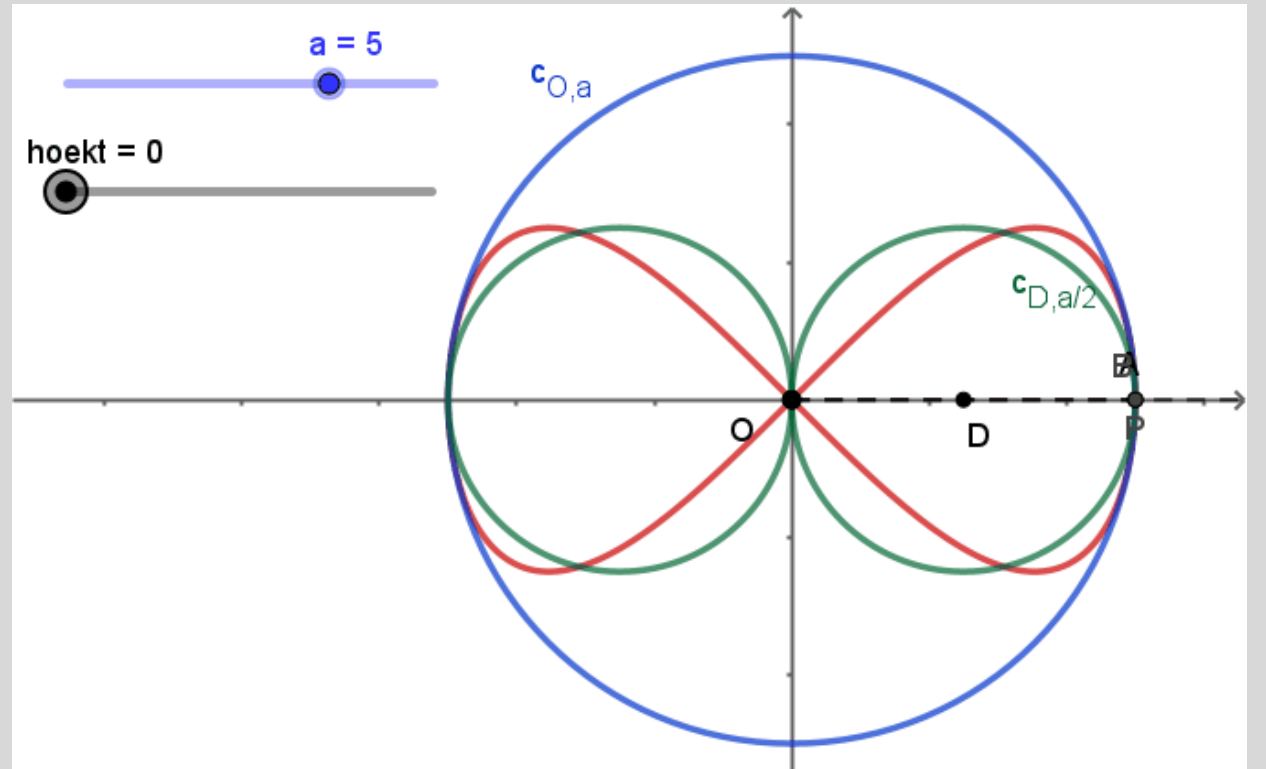


Newton-getransformeerde

(1) de (grote) cirkel met middelpunt O en straal a

(2) de (kleine) cirkel met middelpunt D en straal $\frac{a}{2}$

De lemniscaat van **CAMILLE-CHRISTOPHE GERONO** (19de eeuw)



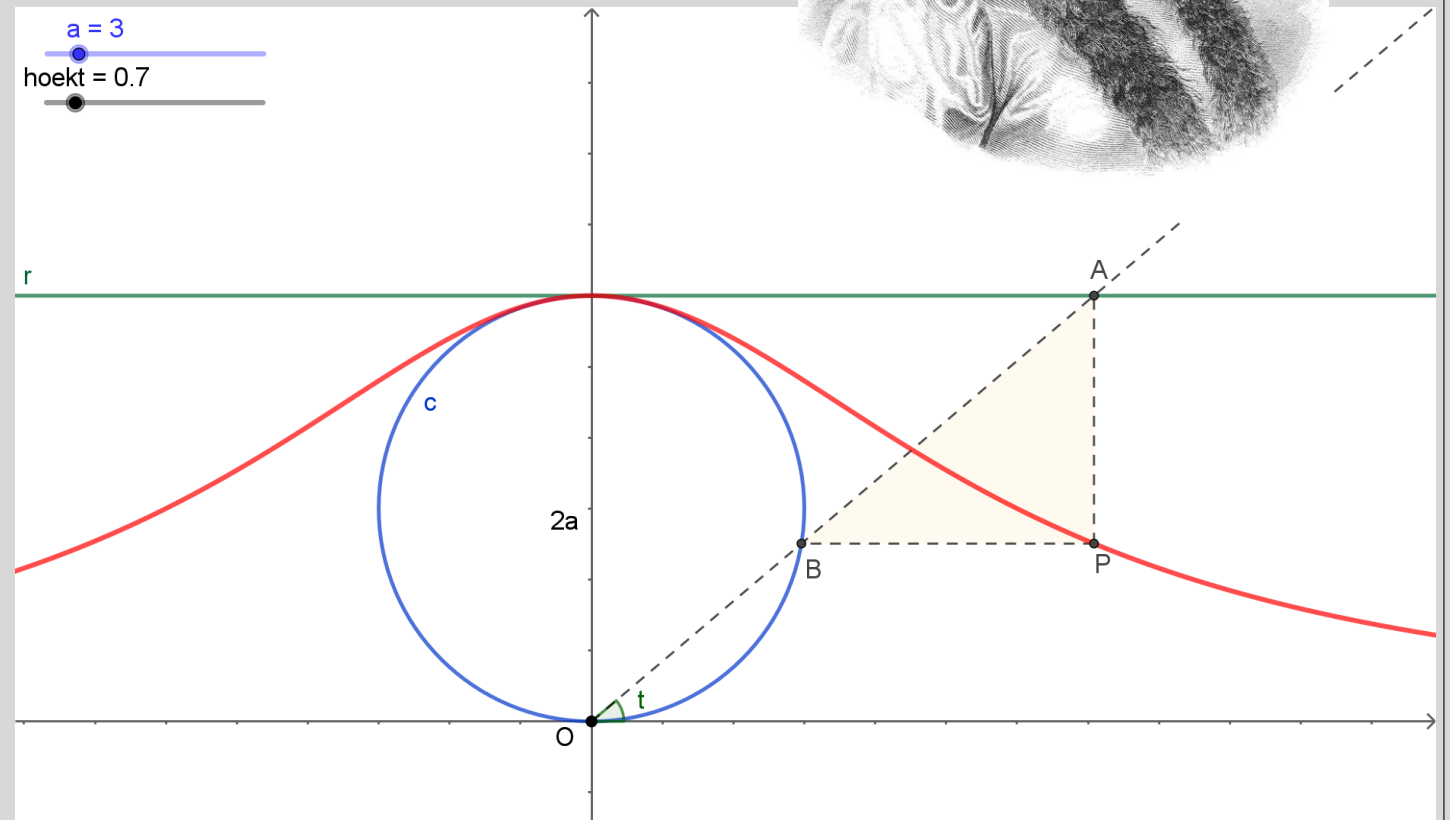
Newton-getransformeerde



De heks (versiera) van

MARIA GAETANA AGNESI

(18^{de} eeuw)



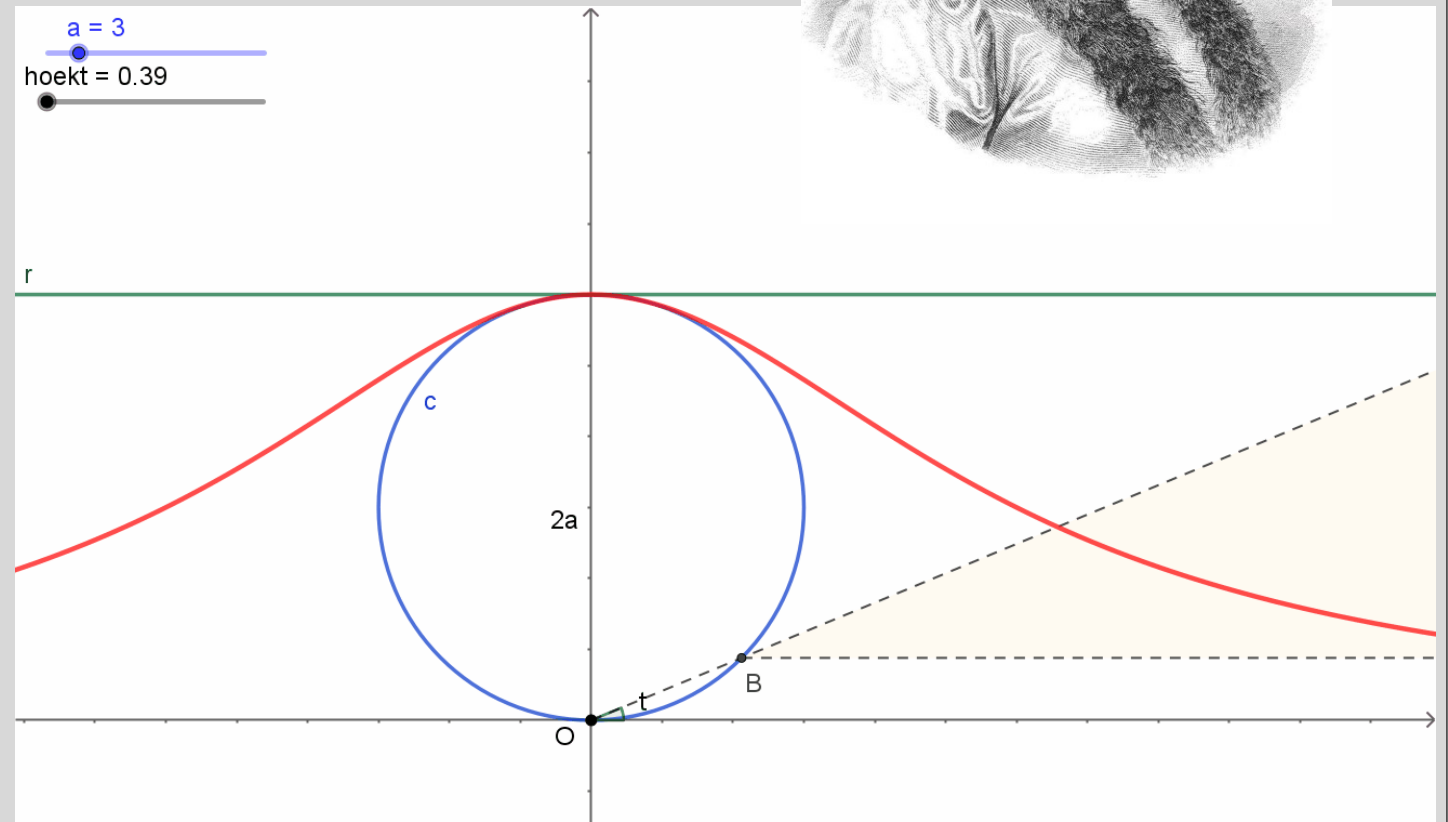
Newton-getransformeerde



De heks (versiera) van

MARIA GAETANA AGNESI

(18^{de} eeuw)



Newton-getransformeerde

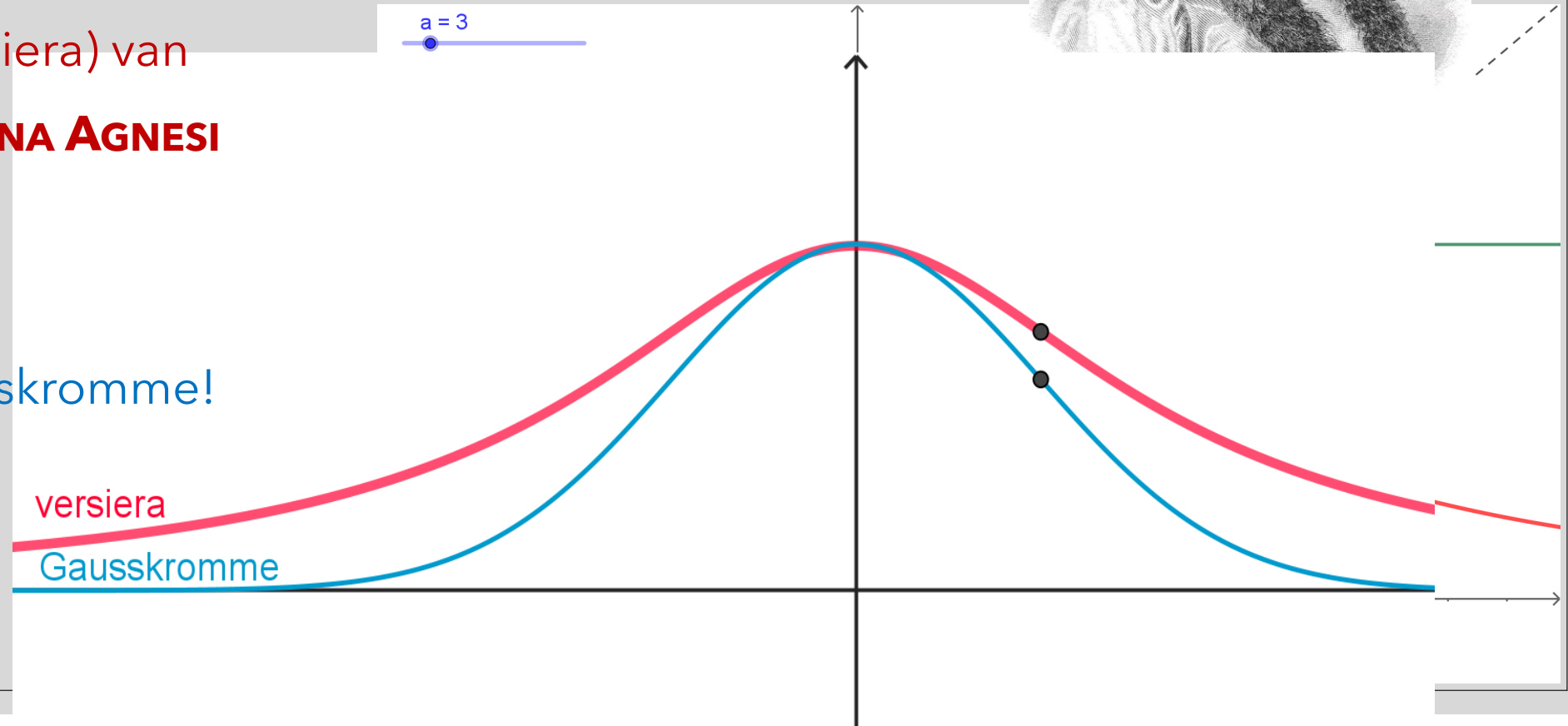


De heks (versiera) van

MARIA GAETANA AGNESI

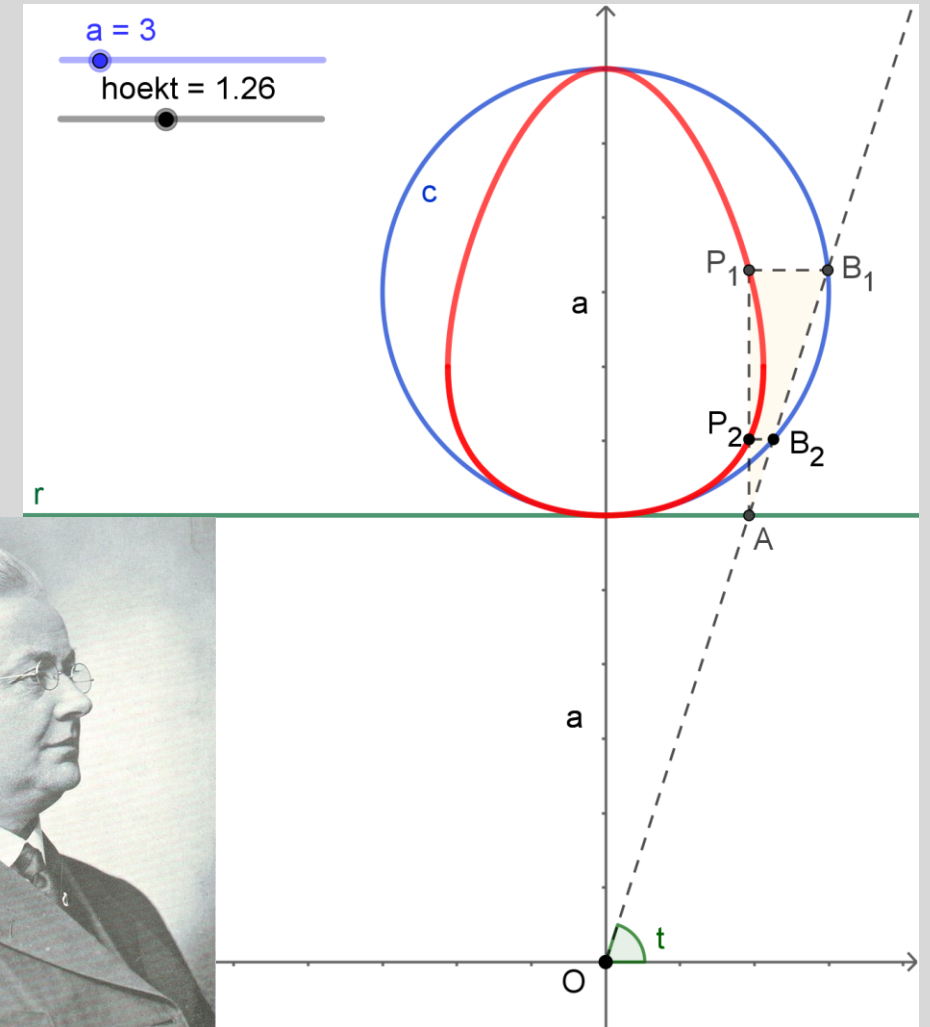
(18^{de} eeuw)

Niet de Gausskromme!



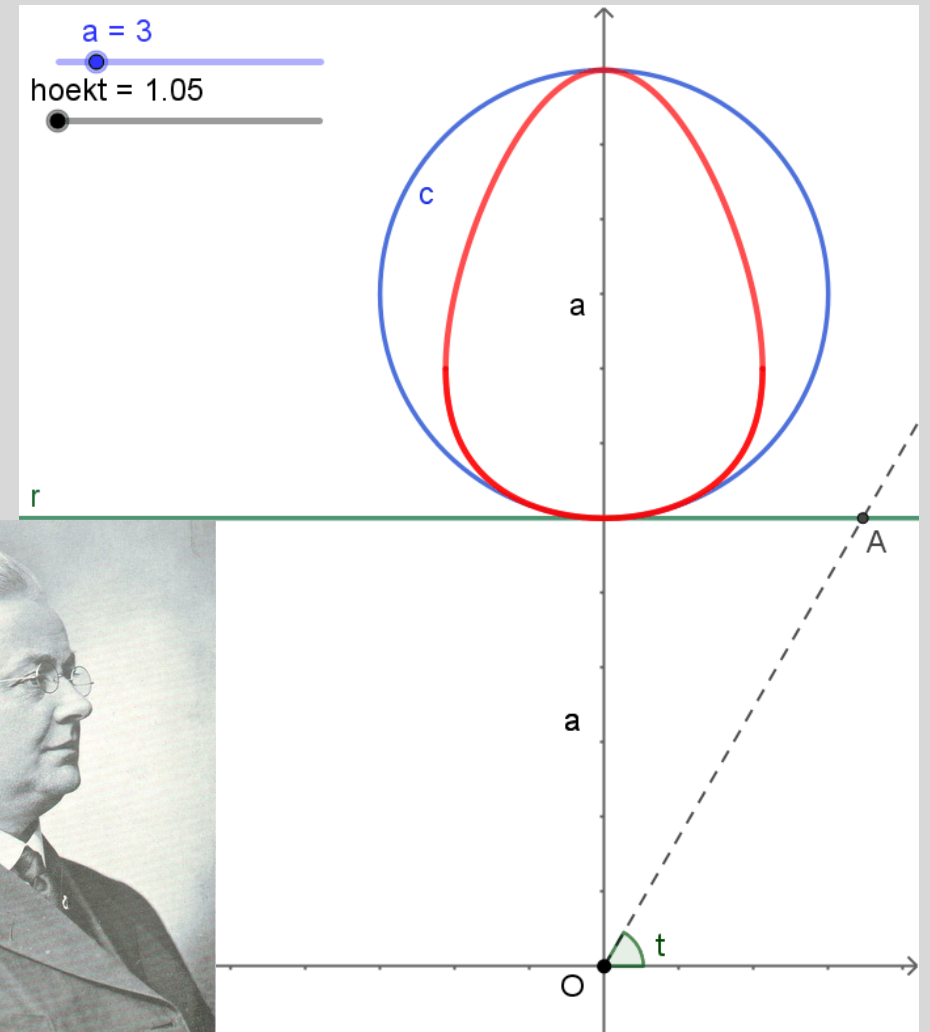
Newton-getransformeerde

Het ei van **WILLIAM ANTHONY GRANVILLE**
(20^{ste} eeuw)



Newton-getransformeerde

Het ei van **WILLIAM ANTHONY GRANVILLE**
(20^{ste} eeuw)

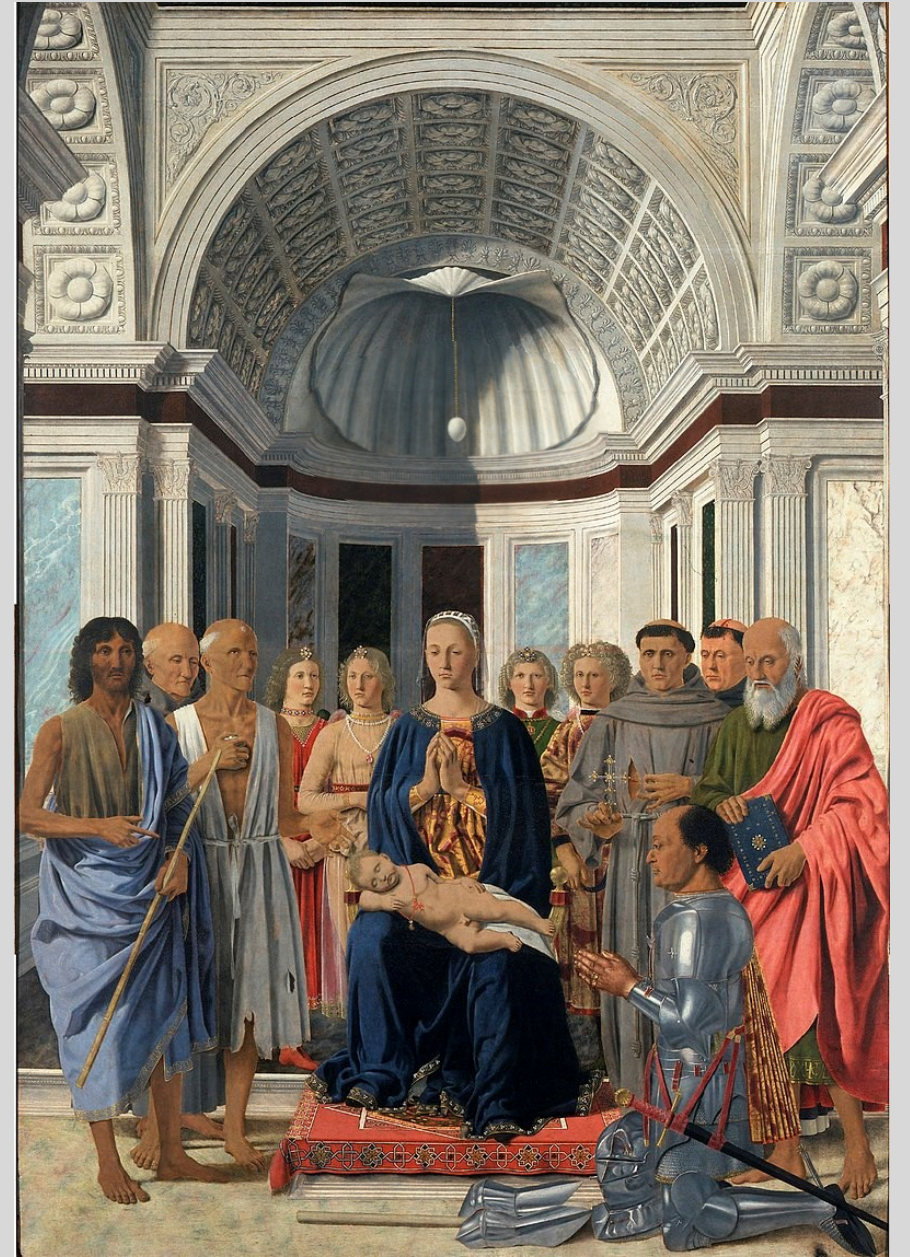


Het ei in de kunst



SALVADOR DALÌ (20^{ste} eeuw)

PIERO DELLA FRANCESCA (15^{de} eeuw)





DANK JE WEL!

