Paaseieren met parameterkrommen

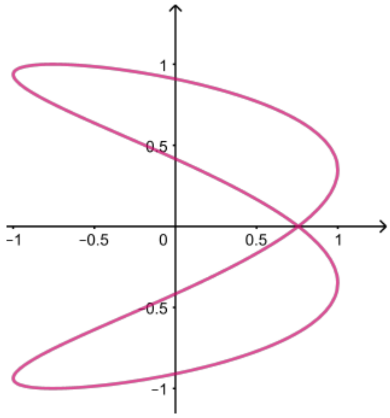
Michel Roelens Nationale Wiskunde Dagen 2024

Huiswerk Enkele Lissajousfiguren

Oplossingen in Uitwiskeling 38/2.

Eerste kromme

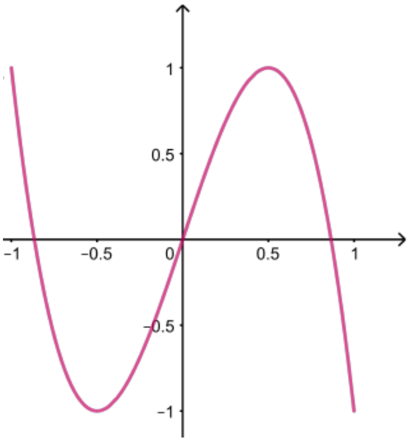
$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin(t+2) \end{cases}$$



Start bij $t = 0$ en volg de kromme met je vinger voor toenemende waarde van t. Voor welke waarde van t ben je helemaal rond?

Voor welke waarden van t zit je in het punt waar de kromme zichzelf snijdt?

Voor welke waarden van t is de raaklijn evenwijdig met de y-as?



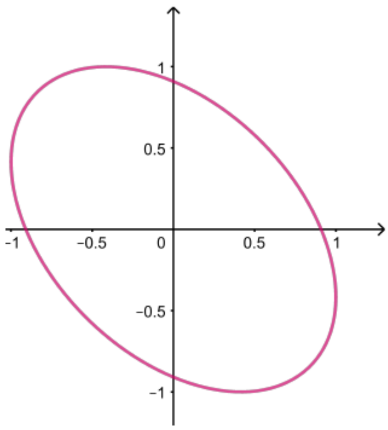
Tweede kromme

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

De kromme lijkt op een stuk van de grafiek van een derdegraadsfunctie. Is het zo?

Derde kromme

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin(t+2) \end{cases}$$



Dit lijkt wel een ellips? Is dit het geval?

Hulp nodig?

- *Neen: lees dan niet verder.*
- *Ja: draai het blad om.*

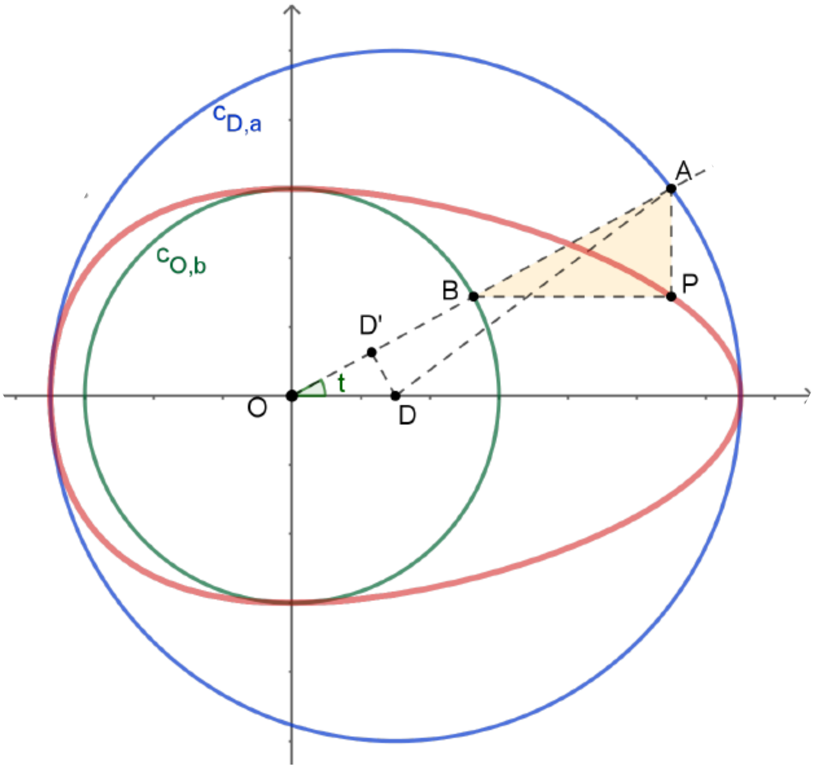
Als je de x-en de y-as over 45° in wijzerzin draait, heb je nieuwe coördinaten

$$(X, Y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right).$$

Parametervoorstelling van het ei van Hügelschäffer

Schrijf parametervergelijkingen voor het ei.

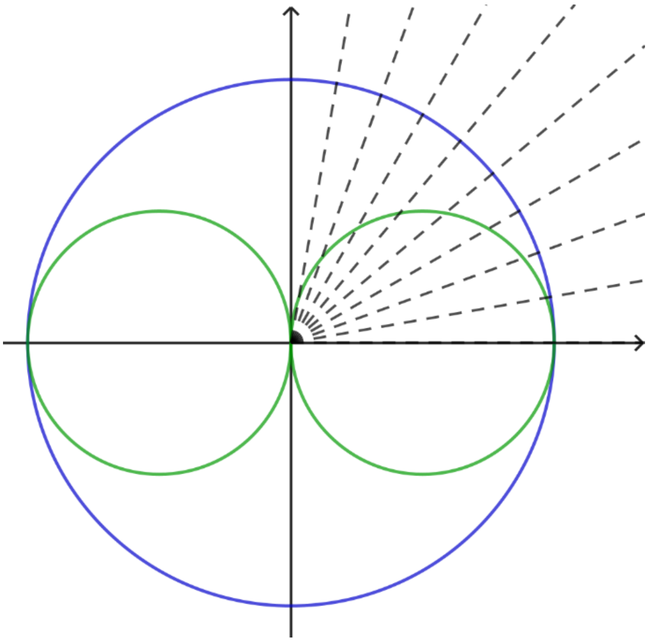
> *Een tip?*
> *Voor x is het "$x = |OA| \cos t$" zoals bij de ellips, maar nu varieert $|OA|$ in functie van t. Splits $|OA|$ in $|OD'| + |D'A|$. Gebruik rechthoekige driehoeken (*sin, cos *of* tan*, en Pythagoras...).*



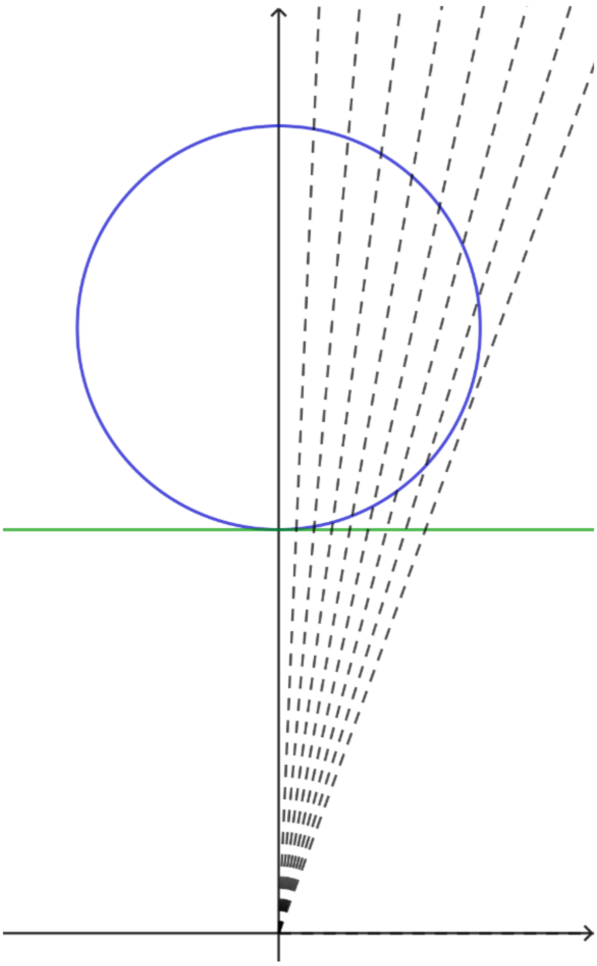
Enkele andere Newton-getransformeerden

Maak gebruik van de symmetrie.

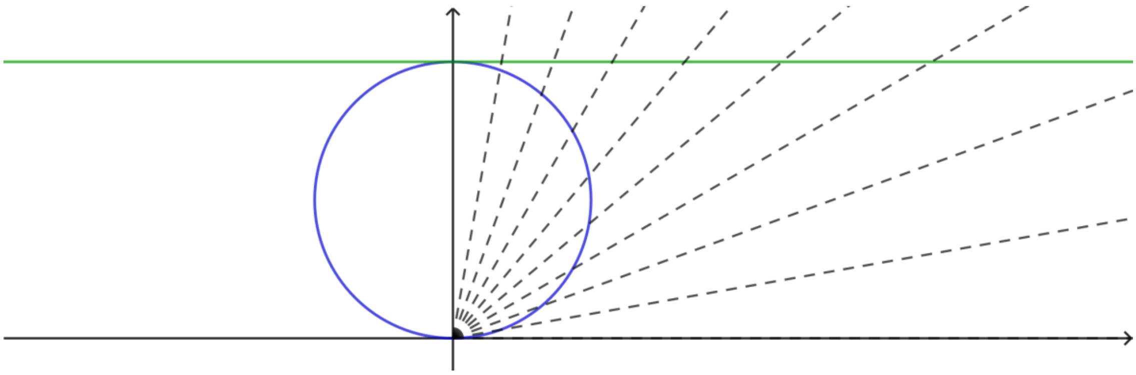
Teken de Newton-getransformeerde van (1) de cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal a, en (2) de unie van de cirkels met middelpunten $\left(\pm\frac{a}{2},0\right)$ en straal $\frac{a}{2}$.



Teken de Newton-getransformeerde van (1) de rechte $y=a$ en (2) de cirkel met middelpunt $\left(0,\frac{3a}{2}\right)$ en straal $\frac{a}{2}$. Gebruik telkens beide snijpunten met de cirkel.

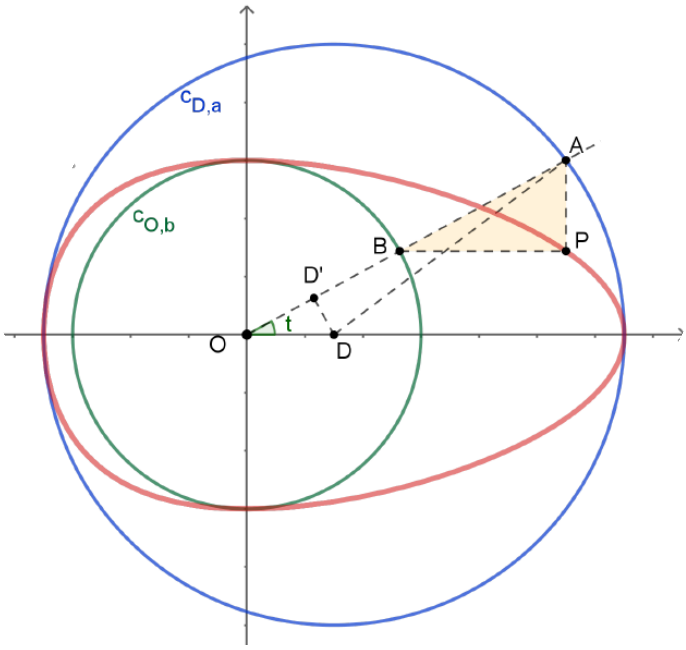


Teken de Newton-getransformeerde van (1) de rechte $y=2a$ en (2) de cirkel met middelpunt $(0,a)$ en straal a.



Enkel voor wie de berekeningen wil zien

Het ei van Hügelschäffer: van parametervoorstelling naar cartesiaanse vergelijking



$$\begin{cases} x = \left(d\cos t + \sqrt{a^2 - d^2\sin^2 t}\right)\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - d\cos^2 t = \sqrt{a^2 - d^2\sin^2 t}\cdot\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} (x - d\cos^2 t)^2 = (a^2 - d^2\sin^2 t)\ \cos^2 t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - d(1-\sin^2 t)^2 = (a^2 - d^2\sin^2 t)\ (1 - \sin^2 t) \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\overset{**}{\Rightarrow} \left(x - d\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right)^2 = \left(a^2 - \frac{d^2y^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

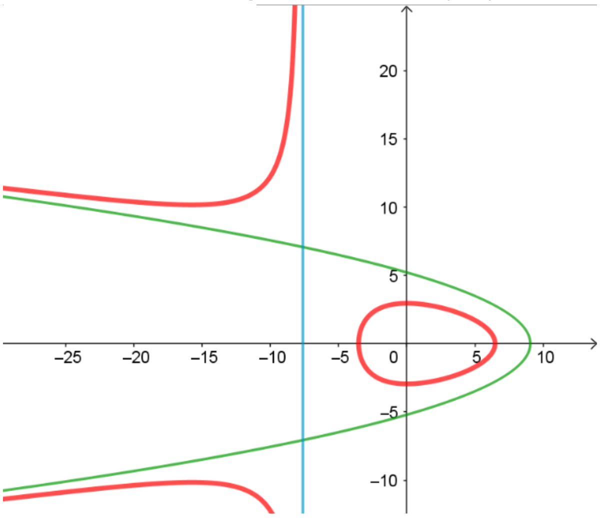
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(-2dx + d^2 - \frac{d^2y^2}{b^2} - a^2 + \frac{d^2y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + (b^2 - y^2)(-2dx + d^2 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2(-x^2 + 2dx - d^2 + a^2)}{2dx - d^2 + a^2}$$

* Door te kwadrateren kunnen er oplossingen bij komen. Voor een dubbele pijl zou je moeten eisen dat $(x - d\cos^2 t)$ en $\cos t$ hetzelfde teken hebben, anders gezegd dat $(x - d\cos^2 t)\cos t \geq 0$.
** Door het wegwerken van $\sin t$ kunnen er oplossingen bij komen. Voor een dubbele pijl zou je moeten eisen dat $|y| \leq b$, anders kan $\frac{y}{b}$ geen sinus zijn.

Cartesiaanse vergelijking van het ei van Hügelschäffer: asymptoten



$$y^2 = \frac{b^2(-x^2 + 2dx - d^2 + a^2)}{2dx - d^2 + a^2}$$

Rechte asymptoot

$y^2 \to +\infty$ wanneer de noemer $2dx - d^2 + a^2 \to 0$. Er is dus een verticale asymptoot, namelijk de rechte

$$x = \frac{d^2 - a^2}{2d}.$$

Parabolische asymptoot

Voor $|x| \to +\infty$ gedraagt y^2 zich zoals het quotiënt bij de euclidische deling van de teller door de noemer. De teller is van de tweede graad en de noemer van de eerst graad. Het quotiënt is dus van graad 1. We bepalen dit quotiënt met het rekenschema van Horner. Eerst zetten we de factor $\frac{b^2}{2d}$ apart en we nemen die niet mee in het schema van Horner:

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{2d} \cdot \frac{-x^2 + 2dx - d^2 + a^2}{x - \frac{d^2 - a^2}{2d}}$$

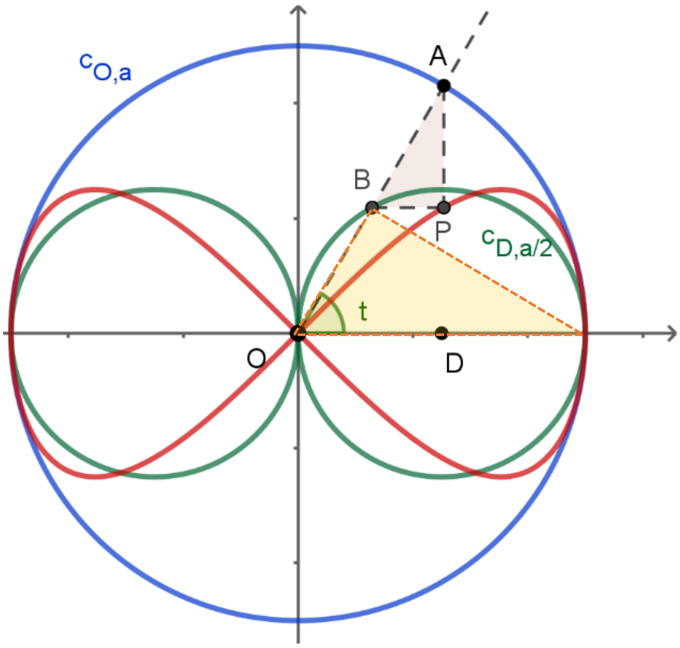
$$\begin{array}{c|cc|c}
 & -1 & 2d & -d^2 + a^2 \\
\frac{d^2 - a^2}{2d} & & \frac{a^2 - d^2}{2d} & \dots \\
\hline
 & -1 & \frac{a^2 + d^2}{2d} & \text{rest}
\end{array}$$

We hoeven de rest niet te berekenen.
Parabolische asymptoot voor $x \to -\infty$:

$$y^2 = \frac{b^2}{2d}\left(-x + \frac{a^2 + d^2}{2d}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2d}{b^2} y^2 + \frac{a^2 + d^2}{2d}$$

Parametervoorstellingen en cartesiaanse vergelijkingen van de enkele andere Newton-getransformeerden



De lemniscaat van Gerono

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = |OB|\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\cos t\sin t \end{cases}$$ (driehoek met rechte hoek in B)

t elimineren:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y^2 = a^2\cos^2 t\,(1-\cos^2 t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

De versiera van Agnesi

$$\begin{cases} x = 2a\cot t \\ y = |OB|\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a\cot t \\ y = 2a\sin t\sin t \end{cases}$$ (driehoek met rechte hoek in B)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a\cot t \\ y = 2a\sin^2 t \end{cases}$$

t elimineren met de identiteit $\cot^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4a^2} + 1 = \frac{2a}{y}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$