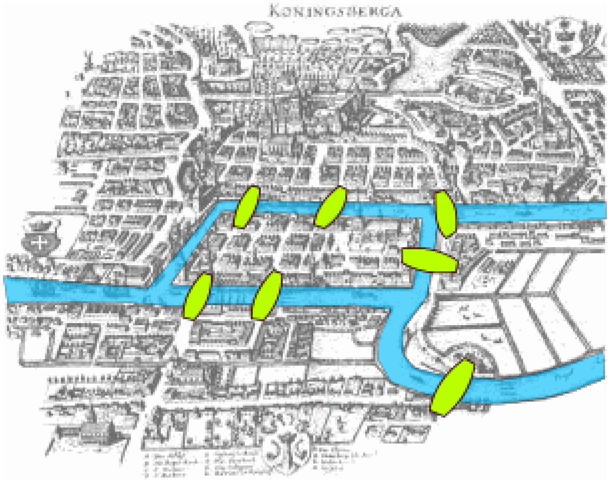
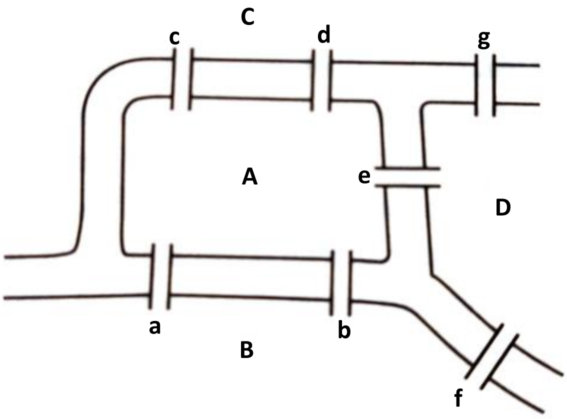
DE LESBRIEF – EULER’S METHODE

Leonhard Euler (1707-1783) is een van de meest vooraanstaande wiskundigen uit de geschiedenis. De eerste lessen in wiskunde kreeg hij van zijn vader, een dominee uit Basel. Na zijn opleiding op het gymnasium van Basel studeerde hij theologie en wiskunde. Op twintigjarige leeftijd werd hij benoemd tot hoogleraar natuurkunde aan de door tsaar Peter de Grote gestichte academie van Sint-Petersburg. In 1731 werd hij daar hoogleraar wiskunde.

Euler was bijzonder productief: hij publiceerde in totaal 886 boeken en geschriften. De functienotatie $f(x)$ werd door hem ingevoerd, evenals de symbolen voor de getallen π en e. Hij heeft een bijdrage geleverd aan bijna alle verschillende soorten wiskunde, waaronder de getaltheorie, differentiaalrekening en complexe getallen. Euler wordt daarnaast gezien als de grondlegger van de grafentheorie, en daarover gaat deze les.

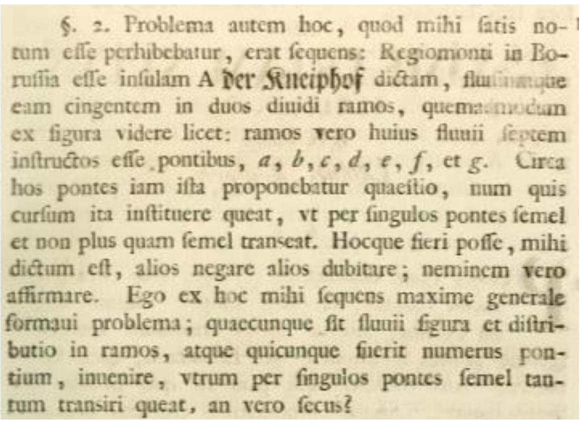
Een bekend probleem uit de tijd waarin Euler leefde is het bruggenprobleem van Koningsbergen. De stad Koningsbergen (het tegenwoordige Kaliningrad) ligt in Rusland aan de rivier de Pregel. Over de Pregel zijn zeven bruggen aangelegd om de verschillende delen van de stad met elkaar te verbinden. Een kaart van Koningsbergen uit de achttiende eeuw en een schematische weergave staan in de figuur hieronder.



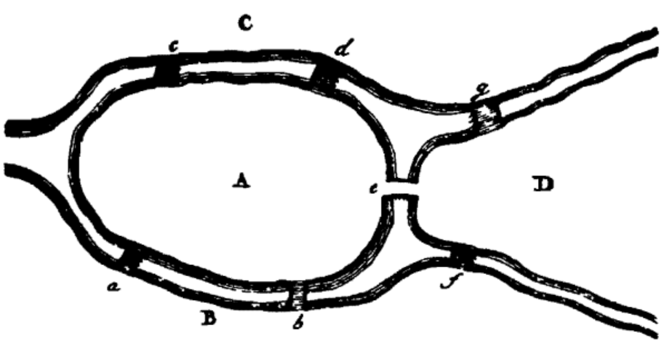


Figuur 0.1: De zeven bruggen over de rivier de Pregel in het achttiende-eeuwse Koningsbergen[1]

Euler beschreef en tekende het bruggenprobleem als volgt in zijn *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (1736):



§. 2. Problema autem hoc, quod mihi ſatis notum eſſe perhibebatur, erat ſequens: Regiomonti in Boruſſia eſſe inſulam A der Kneiphof dictam, fluminque eam cingentem in duos diuidi ramos, quemadmodum ex figura videre licet: ramos vero huius fluuii ſeptem inſtructos eſſe pontibus, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, et *g*. Circa hos pontes iam iſta proponebatur quaeſtio, num quis curſum ita inſtituere queat, vt per ſingulos pontes ſemel et non plus quam ſemel tranſeat. Hocque fieri poſſe, mihi dictum eſt, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi ſequens maxime generale formaui problema; quaecunque ſit fluuii figura et diſtributio in ramos, atque quicunque fuerit numerus pontium, inuenire, vtrum per ſingulos pontes ſemel tantum tranſiri queat, an vero ſecus?



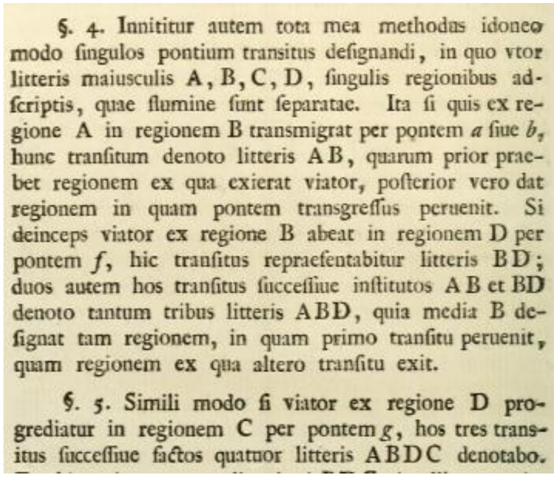
Figuur 0.2: Stap 2 van het bewijs van Euler [2]

[1] Afbeelding 1: (Wikipedia, 2023), Afbeelding 2: (Du Sautoy, 2023) met eigen toevoegingen

In het Engels vertaald: “2. The problem, which I understand is quite well known, is stated as follows: In the town of Konigsberg in Prussia there is an island A, called "Kneiphof," with the two branches of the river (Pregel) flowing around it, as shown in Figure 1. There are seven bridges, a, b, c, d, e, f and g, crossing the two branches. The question is whether a person can plan a walk in such a way that he will cross each of these bridges once but not more than once. I was told that while some denied the possibility of doing this and others were in doubt, there were none who maintained that it was actually possible. On the basis of the above I formulated the following very general problem for myself: Given any configuration of the river and the branches into which it may divide, as well as any number of bridges, to determine whether or not it is possible to cross each bridge exactly once.[2]”

A) Bekijk in tweetallen vijf routes die minstens één keer over alle bruggen gaan, en ga na dat geen enkele route aan Eulers eisen voldoet.

Euler vervolgde zijn verkenning van het probleem door een methode op te stellen om een route door Koningsbergen te noteren. Als een persoon van gebied A naar gebied B gaat over brug a of b, noteert hij deze route met de letters AB. Als de reiziger daarna van gebied B naar D gaat over brug f, wordt deze route genoteerd als BD. Beide routes na elkaar worden genoteerd als ABD. Als de reiziger vervolgens brug g oversteekt, wordt de route uitgebreid tot ABDC.



§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo ſingulos pontium tranſitus deſignandi, in quo vtor litteris maiuſculis A, B, C, D, ſingulis regionibus adſcriptis, quae flumine ſunt ſeparatae. Ita ſi quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem *a* ſiue *b*, hunc tranſitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, poſterior vero dat regionem in quam pontem transgreſſus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem *f*, hic tranſitus repraeſentabitur litteris BD; duos autem hos tranſitus ſucceſſiue inſtitutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B deſignat tam regionem, in quam primo tranſitu peruenit, quam regionem ex qua altero tranſitu exit.

§. 5. Simili modo ſi viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem *g*, hos tres tranſitus ſucceſſiue factos quatuor litteris ABDC denotabo.

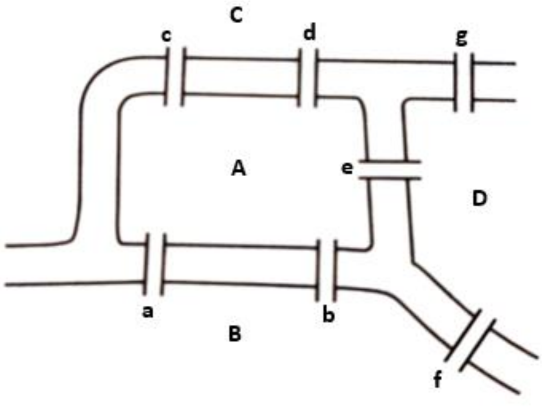
Figuur 0.3: Stap 4 en 5 van het bewijs van Euler [2]

B) In figuur 2.3 staat de originele bron met daarin de aanpak en uitleg van Euler. Vergelijk deze bron in tweetallen met de Nederlandse tekst en kijk wat je ervan kunt volgen en begrijpen.

C) Teken een mogelijke afgelegde route ABDC in de figuur hiernaast.

D) Hoeveel bruggen zijn er afgelegd in de route ABDC? En in ADBACDA? Wat valt je op?

E) Stel dat er een route zou bestaan waarbij alle bruggen precies één keer worden overgestoken. Uit hoeveel letters zou deze route bestaan?



Figuur 0.4: Figuur bij opgave B

Euler maakt geen onderscheid in welke bruggen op welk moment worden gebruikt, maar hij kijkt wel naar welke combinaties van letters moeten voorkomen. Omdat de gebieden A en B met twee bruggen zijn verbonden, zal er twee keer een combinatie AB of BA voorkomen in de totale route. Combinatie BD (of DB) komt één keer voor, omdat er maar één brug is die de twee gebieden met elkaar verbindt.

F) Welke combinaties van letters zijn er nog meer, en hoe vaak komen deze voor?

[2] Origineel: (Euler, 1736), Engelse vertaling: (Newman, 1956)

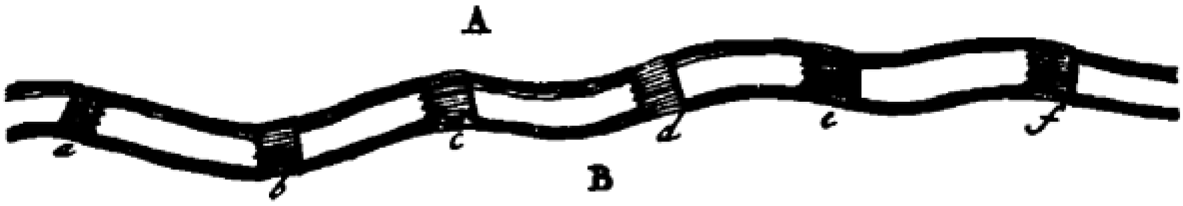
Het bruggenprobleem kan nu worden gereduceerd tot een vraag, die Euler beschrijft in stap 7 van zijn bewijs. In de figuur hieronder staat het oorspronkelijke bewijs van Euler.

§. 7. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt ex quatuor litteris A, B, C et D ſeries octo litterarum formetur, in qua omnes illae ſucceſſiones toties occurrant quoties eſt praeceptum. Antequam autem ad talem diſpoſitionem opera adhibeatur, oſtendi conuenit, vtrum tali modo hae litterae diſponi queant an non. Si enim demonſtrari poterit talem diſpoſitionem omnino fieri non poſſe, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inueſtigaui, cuius ope tam pro hac quaeſtione, quam pro omnibus ſimilibus, facile diſcerni queat, num talis litterarum diſpoſitio locum habere queat.

Figuur 0.5: Stap 7 van het bewijs van Euler [2]

G) Probeer aan de hand van hulpmiddelen op het internet (bijvoorbeeld google translate) te vertalen wat Euler precies schrijft in stap 7 van zijn bewijs.

Euler bekijkt eerst een eenvoudiger voorbeeld: een regio A en B met een willekeurige oneven hoeveelheid bruggen a, b, c enzovoort. Zijn grafische weergave staat in de figuur hieronder.



Figuur 0.6: Een bruggenprobleem met regio A en B en bruggen a t/m f [2]

Deze manier van een lastig probleem terugbrengen tot een overzichtelijke situatie is een vorm van *modelleren* en dit wordt tegenwoordig nog steeds veel gebruikt in de wiskunde.

Bekijk eerst het geval dat er slechts één brug is en noem deze a. Over deze brug zijn twee routes mogelijk: van A naar B (AB) of van B naar A (BA). In beide routes wordt de letter A één keer gebruikt. Als er drie bruggen zijn (a, b en c), is de route ofwel ABAB, ofwel BABA en in beide gevallen komt de letter A twee keer voor.

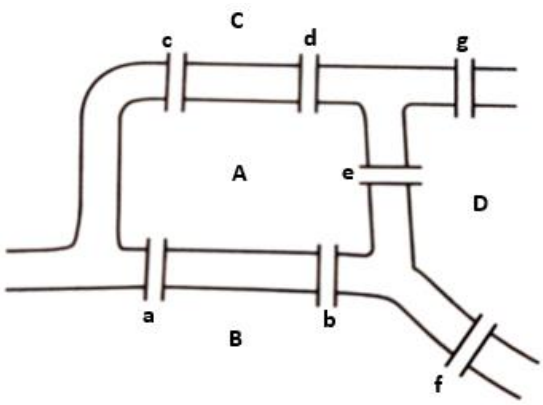
H) Vul de onderstaande tabel in en stel een formule op van het aantal maal A, uitgedrukt in het aantal bruggen (n) tussen A en B.

Aantal bruggen	1	3	5	7	9
Aantal keer A	1	2			

I) In het voorbeeld van Euler is A alleen verbonden met B, maar in het probleem van Koningsbergen zijn gebieden steeds verbonden met meerdere andere gebieden. Maakt dit uit voor de formule van het aantal maal A uitgedrukt in het totale aantal bruggen (n)? Geef je redenatie.

J) We keren nu terug naar het bruggenprobleem in Koningsbergen. Vanuit elk van de vier gebieden vertrekt een oneven aantal bruggen. Gebruik je formule om te bepalen hoe vaak elke letter moet voorkomen in een route.

K) Vergelijk je antwoord op vraag E en J en concludeer: is het bruggenprobleem oplosbaar of niet?

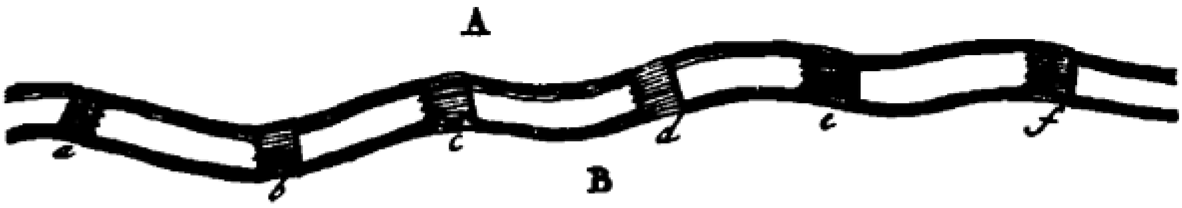


Figuur 0.7: Figuur bij opgave G

Het bruggenprobleem van Koningsbergen is hiermee bewezen, en Euler stelt in zijn bewijs dat men met deze methode bij alle problemen met een oneven aantal bruggen kan bepalen of er een route mogelijk is waarbij elke brug precies één keer wordt overgestoken.

L) Gebruik je conclusie uit opgave K om een algemene conclusie op te stellen wanneer een bruggen-probleem met oneven aantallen bruggen oplosbaar is.

Na het bewijs van het bruggenprobleem rijst de vraag: kan er een brug worden toegevoegd zodat er wel een route bestaat waarbij elke brug éénmaal wordt aangedaan? Als we echter een brug toevoegen ontstaan er gebieden waar een even aantal bruggen naartoe loopt, waarvoor we een nieuwe methode moeten ontwikkelen. Bekijk hiervoor nogmaals het eenvoudige voorbeeld met een gebied A en B:



Figuur 0.8: Een bruggenprobleem met regio A en B en bruggen a t/m f [2]

M) Kijk als eerste naar een situatie met twee bruggen: a en b en beschrijf de routes. Maakt het voor de hoeveelheid keer A uit in welk gebied je start?

N) Beschrijf het verband tussen het aantal bruggen en het aantal keer A (met een tabel, formule of in woorden). Maak hierbij onderscheid tussen de situatie waarin de route start in A, en de situatie waarin de route niet start in A.

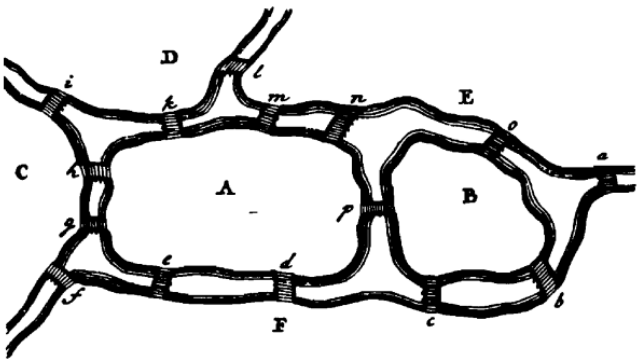
O) Net als bij de oneven bruggen gebruikt Euler een voorbeeld waarin er maar twee gebieden zijn: A en B. Bij de oneven bruggen maakte het niet uit of gebied A met meerdere gebieden verbonden is. Is dat ook zo bij een even aantal bruggen?

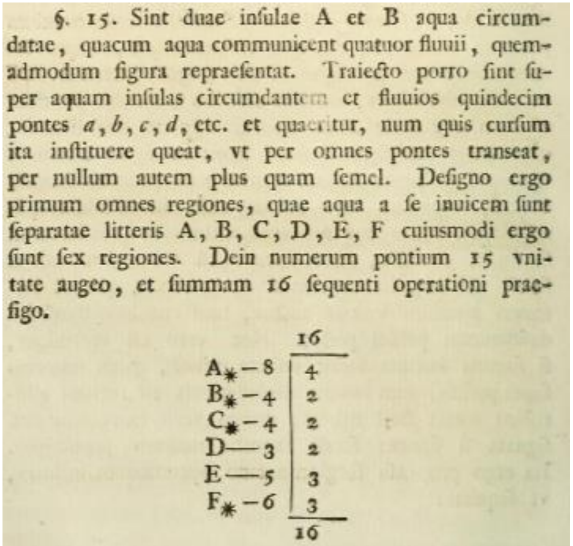
Om een bruggenprobleem met zowel oneven als even aantallen bruggen op te lossen, gebruikte Euler een methode die gebruik maakt van de formules van opgaven H en M. Deze methode gaat als volgt:

"13. Every route must, of course, start in some one region, thus from the number of bridges that lead to each region I determine the number of times that the corresponding letter will occur in the expression for the entire route as follows: When the number of the bridges is odd I increase it by one and divide by two; when the number is even I simply divide it by two. Then if the sum of the resulting numbers is equal to the actual number of bridges pi us one, the journey can be accomplished, though it must start in a region approached by an odd number of bridges. But if the sum is one less than the number of bridges plus one, the journey is feasible if its starting point is a region approached by an even number of bridges, for in that case the sum is again increased by one.[2]"

P) In de laatste twee zinnen bepaalt Euler op basis van het totaal aantal letters (*sum of the resulting numbers*) waar de route moet starten: in een gebied met oneven of even bruggen. Leg uit waarom.

In zijn bewijs past Euler de bovenstaande methode toe op een tweede bruggenprobleem met zes gebieden. Hij stelt hierbij een tabel op, zoals weergegeven in de afbeelding hieronder.




§. 15. Sint duae inſulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraeſentat. Traiecto porro ſint ſuper aquam inſulas circumdantem et fluuios quindecim pontes *a*, *b*, *c*, *d*, etc. et quaeritur, num quis curſum ita inſtituere queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam ſemel. Deſigno ergo primum omnes regiones, quae aqua a ſe inuicem ſunt ſeparatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo ſunt ſex regiones. Dein numerum pontium 15 vnitate augeo, et ſummam 16 ſequenti operationi praefigo.

	16
A* − 8	4
B* − 4	2
C* − 4	2
D — 3	2
E — 5	3
F* − 6	3
	16

Figuur 0.9: Stap 14 van het bewijs van Euler [2]

Q) Leg aan de hand van de figuur en de methode van Euler uit waar alle getallen in de tabel vandaan komen en wat ze betekenen. Leg ook uit waarom er een asterisk zou kunnen staan bij A, B, C en F.

R) Leg uit of het bruggenprobleem oplosbaar is en in welke gebieden een eventuele route zou kunnen starten.

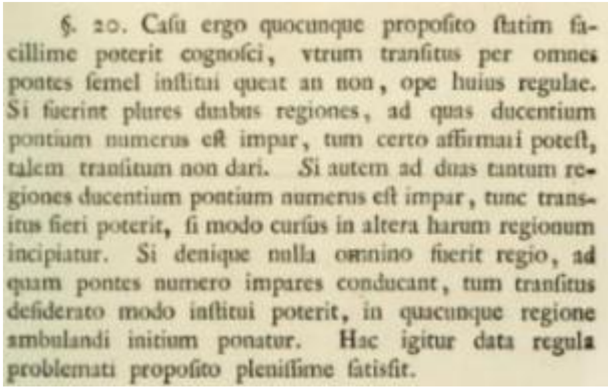
Aan het einde van zijn uitgebreide bewijs geeft Euler een tweede, simpelere methode om te bepalen of een bruggenprobleem oplosbaar is. Deze methode werkt als volgt:

Verdeel de gebieden in twee categorieën: het start- en eindpunt, en doorreisgebieden. Elke keer dat een reiziger aankomt in een doorreisgebied, gaat deze er ook weer weg. Dit betekent dat er voor elke reis door het gebied een brug naar het gebied en een brug van het gebied moet zijn. Het aantal bruggen wat verbonden is met ieder doorreisgebied moet dus een veelvoud zijn van twee: een even getal.

Voor het start- en eindgebied geldt het volgende: de reiziger verlaat via één brug het startgebied en komt via één brug aan bij het eindgebied. Alle keren dat de reiziger intussen door deze gebieden reist, komen er twee bruggen bij. Het start- en eindgebied hebben dus beide een oneven aantal bruggen.

S) Wat kan je zeggen over het aantal bruggen in het start- en eindgebied als dit hetzelfde gebied is?

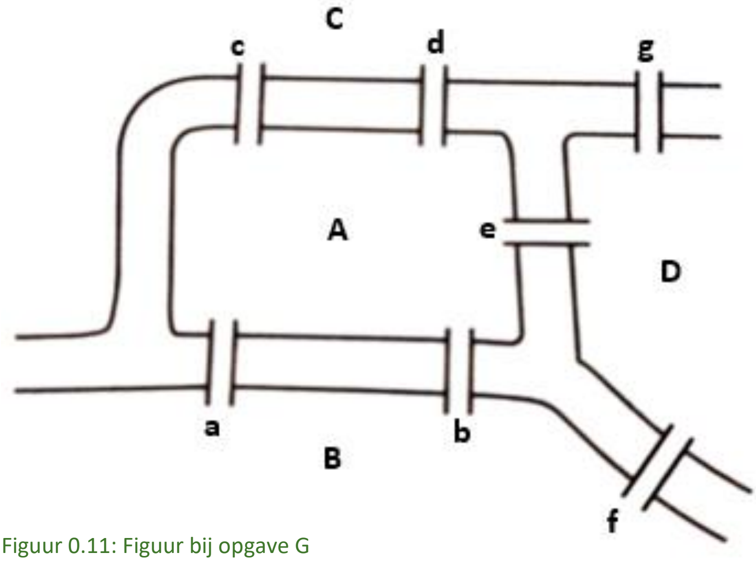
Euler concludeerde tenslotte het volgende:


§. 20. Caſu ergo quocunque propoſito ſtatim facillime poterit cognoſci, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel inſtitui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus eſt impar, tum certo affirmari poteſt, talem tranſitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus eſt impar, tunc tranſitus fieri poterit, ſi modo curſus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum tranſitus deſiderato modo inſtitui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati propoſito pleniſſime ſatisfit.

Figuur 0.10: Eulers conclusie van het bruggenprobleem [2]

“Thus for any configuration that may arise the easiest way of determining whether a single crossing of all the bridges is possible is to apply the following rules: If there are more than two regions which are approached by an odd number of bridges, no route satisfying the required conditions can be found. If, however, there are only two regions with an odd number of approach bridges the required journey can be completed provided it originates in one of the regions. If, finally, there is no region with an odd number of approach bridges, the required journey can be effected, no matter where it begins. These rules solve completely the problem initially proposed.[2]”

T) Vul in de figuur hieronder aan de hand van Eulers conclusie bruggen toe aan Koningsbergen zodat er wel een route mogelijk is.

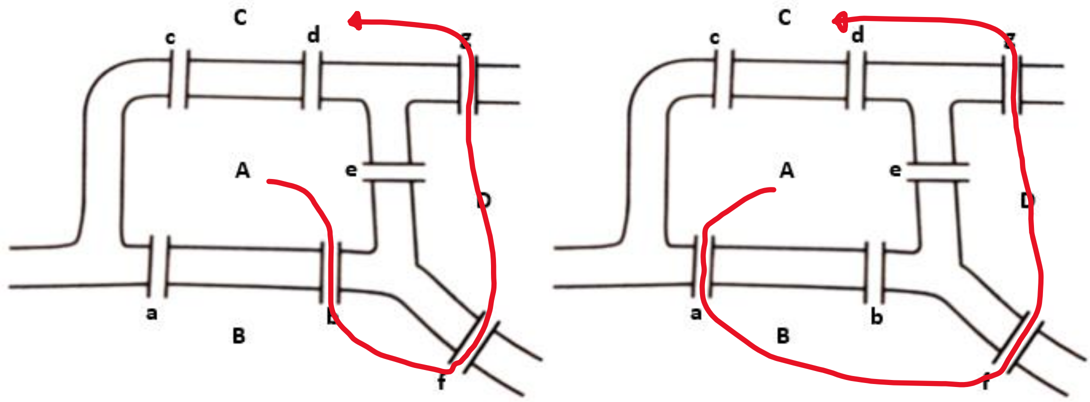


Figuur 0.11: Figuur bij opgave G

A) Bekijk vijf mogelijke routes en ga na dat geen enkele route aan Eulers eisen voldoet.
n.v.t.

B) In figuur 2.3 staat de originele bron met daarin de aanpak en uitleg van Euler. Vergelijk deze bron in tweetallen met de Nederlandse tekst en kijk wat je ervan kunt volgen en begrijpen.
n.v.t.

C) Teken de afgelegde route ABDC in de figuur hiernaast.
Zie figuur hieronder (een van beide is voldoende)



Figuur 0.12: Figuur bij opgave B

D) Hoeveel bruggen zijn er afgelegd in de route ABDC?
3 bruggen

E) Uit hoeveel letters bestaat een route waarbij alle bruggen precies één keer worden overgestoken?
8 letters

F) Welke combinaties van letters zijn er nog meer, en hoe vaak komen deze voor?
De combinatie A,C komt twee keer voor, A,D en C,D komen elk één keer voor.

G) Probeer aan de hand van hulpmiddelen op het internet (bijvoorbeeld google translate) te vertalen wat Euler precies schrijft in stap 7 van zijn bewijs.
Iets in de trant van: Het probleem is gereduceerd tot de vraag of de vier letters A, B, C en D een serie van acht letters kunnen vormen waarin alle combinaties de juiste hoeveelheid keer voorkomen. Voordat we echter de moeite doen om zo'n serie te vinden, kunnen we ons afvragen of deze überhaupt kan bestaan. Als de serie onmogelijk is, dan zou het een verspilde moeite zijn om deze te proberen te vinden. Ik heb daarom gezocht naar een regel die eenvoudig kan bepalen voor deze en alle vergelijkbare vragen, of de vereiste serie letters bestaat.

H) Vul de onderstaande tabel in en stel een formule op van het aantal maal A, uitgedrukt in het aantal bruggen (n) tussen A en B. (3, 4, 5, A=(n+1)/2)

Aantal bruggen	1	3	5	7	9
Aantal keer A	1	2	*3*	*4*	*5*

Het verband wordt gegeven door $A = \frac{n+1}{2}$

I) In het voorbeeld van Euler is A alleen verbonden met B, maar in het probleem van Koningsbergen zijn gebieden steeds verbonden met meerdere andere gebieden. Maakt dit uit voor de formule van het aantal maal A uitgedrukt in het totale aantal bruggen (n)? Geef je redenatie.
Het maakt niet uit. Immers, wat er tussen twee keer A in gebeurt tussen andere gebieden, maakt niet uit voor de hoeveelheid keer dat A voorkomt.

J) We keren nu terug naar het bruggenprobleem in Koningsbergen. Vanuit elk van de vier gebieden vertrekt een oneven aantal bruggen. Gebruik je tabel om te bepalen hoe vaak elke letter moet voorkomen in een route.
A komt drie keer voor, B, C en D elk twee keer

K) Vergelijk je antwoord op vraag D en G en concludeer: is het bruggenprobleem oplosbaar of niet?
Als A drie keer en B, C en D twee keer moeten voorkomen, zijn dat in totaal negen letters. De route waarbij alle bruggen precies één keer worden overgestoken bestaat echter uit acht letters. Er bestaat dus geen route waarbij alle bruggen precies één keer worden overgestoken.

L) Gebruik je conclusie uit opgave K om een algemene conclusie op te stellen wanneer een bruggen-probleem met oneven aantallen bruggen oplosbaar is.
Als de hoeveelheid bruggen plus één gelijk is aan de som van alle hoeveelheden letters, dan is het bruggenprobleem oplosbaar.

M) Kijk als eerste naar een situatie met twee bruggen: a en b en beschrijf de routes. Maakt het voor de hoeveelheid keer A uit in welk gebied je start?
Dit maakt uit. Als je start in gebied A is de route ABA en komt A twee keer voor, als je start in gebied B is de route BAB en komt de letter A één keer voor.

N) Beschrijf het verband tussen het aantal bruggen en het aantal keer A (met een tabel, formule of in woorden). Maak hierbij onderscheid tussen de situatie waarin de route start in A, en de situatie waarin de route niet start in A.
Bij starten in A: het aantal keer A is gelijk aan de helft van het aantal bruggen plus één.
Bij niet starten in A: het aantal keer A is gelijk aan de helft van het aantal bruggen.

O) Net als bij de oneven bruggen gebruikt Euler een voorbeeld waarin er maar twee gebieden zijn: A en B. Bij de oneven bruggen maakte het niet uit of gebied A met meerdere gebieden verbonden is. Is dat ook zo bij een even aantal bruggen?
Het maakt niet uit. Immers, wat er tussen twee keer A in gebeurt tussen andere gebieden, maakt niet uit voor de hoeveelheid keer dat A voorkomt.

P) In de laatste twee zinnen bepaalt Euler op basis van het totaal aantal letters (*sum of the resulting numbers*) waar de route moet starten: in een gebied met oneven of juist even bruggen. Leg uit waarom.
Als een route niet start in een gebied met een even aantal bruggen, komt die letter even vaak voor als de helft van het aantal bruggen. Door de route te laten starten en eindigen in een gebied met een oneven aantal bruggen, kan er worden gesteld dat bij alle gebieden met even bruggen het aantal bruggen kan worden gehalveerd. Als dit overeen komt met het totaal aantal bruggen plus één is de route mogelijk.
Door te starten en te eindigen in een gebied met een even aantal bruggen, gaat het totaal aantal letters met één omhoog. Dit kan compenseren voor het tekort van één letter zoals genoemd in de laatste regel.

Q) Leg aan de hand van de figuur en de methode van Euler uit waar alle getallen in de tabel vandaan komen en wat ze betekenen. Leg ook uit waarom er een asterisk zou kunnen staan bij A, B, C en F.
De getallen direct naast de letters geven het aantal bruggen aan die aansluiten op het gebied in kwestie. De getallen daar rechts van is het aantal keer dat de letter voorkomt. De 16 bovenaan is het totaal aantal bruggen plus één, de 16 onderaan de som van alle hoeveelheden letters. De asterisken geven aan welke gebieden een even aantal bruggen bevatten.

R) Leg uit of het bruggenprobleem oplosbaar is en in welke gebieden een eventuele route zou kunnen starten.
Het bruggenprobleem is oplosbaar, de som (16) is gelijk aan het totaal aantal bruggen plus één. De route moet starten in een gebied met een oneven aantal bruggen, in dit geval dus gebied D of E.

S) Wat kan je zeggen over het aantal bruggen in het start- en eindgebied als dit hetzelfde gebied is?
Dit gebied heeft een even aantal bruggen.

T) Vul in de figuur hieronder aan de hand van Eulers conclusie bruggen toe aan Koningsbergen zodat er wel een route mogelijk is.
Meerdere mogelijkheden, belangrijk is dat het aantal bruggen naar tenminste twee gebieden een even aantal moet zijn.

Mogelijke antwoordopties met één toegevoegde brug zijn: