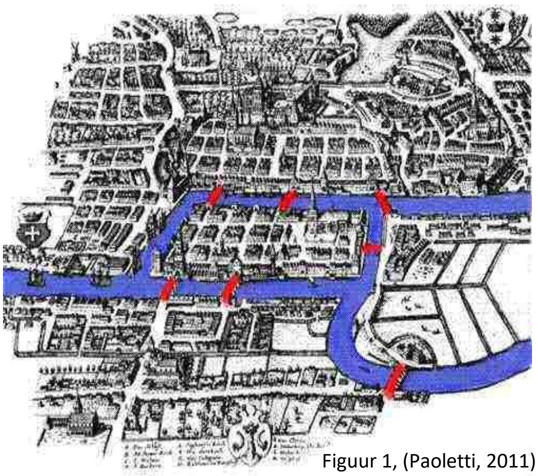
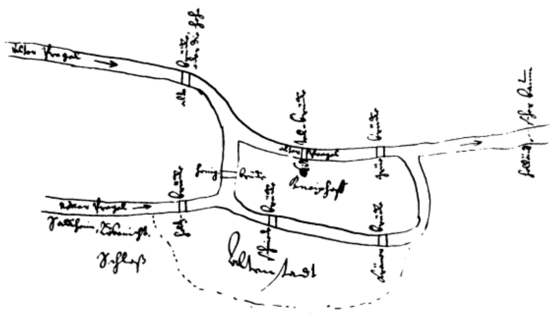
LESONTWERP

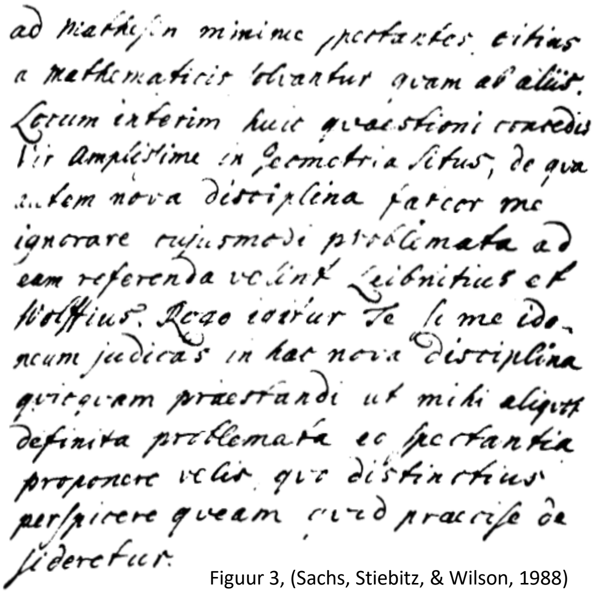

Figuur 1, (Paoletti, 2011)

In 1254 werd de kleine stad Koningsbergen aan de rivier de Pregel ontdekt, nu Kaliningrad. Deze stad zie je hiernaast in figuur 1. Deze plek is in de Middeleeuwen uitgegroeid tot belangrijk handelscentrum, mede te danken aan de ligging aan de rivier. De goed draaiende economie zorgde ervoor dat er bruggen gebouwd konden worden naar de eilandjes in het water. Hier zijn er uiteindelijk 7 van gebouwd. Verveeld stelden de bewoners van Koningsbergen voor om een spel te spelen en elkaar uit te dagen om alle bruggen te bewandelen waarbij geen enkele brug 2 keer gebruikt mocht worden. Al wandelend kwamen zij erachter dat dit nog niet zo simpel was als het leek (Paoletti, 2011).

Opdracht 1.
a) Bekijk figuur 1 en hiermee het bruggenprobleem van Koningsbergen. Schrijf minstens 5 eventuele routes op waarbij je elke brug tenminste 1 keer bewandelt. Probeer daarbij zo min mogelijk bruggen dubbel te gebruiken.
b) Is het volgens jou mogelijk om deze 7 bruggen over te steken, zonder dat hierbij een brug dubbel gebruikt wordt en ieder gebied om de bruggen heen bereikt wordt?

In 1736 loste Leonhard Euler deze tot dan toe lastige puzzel op. Leonhard Euler was een Zwitserse wiskundige die een groot deel van zijn tijd doorbracht in Duitsland en Rusland. Hij wordt gezien als een van de belangrijkste wiskundigen aller tijden. Zo werd hij via een brief aangeschreven om na te denken over het bruggenprobleem van Koningsbergen. Hiernaast zie je de bij deze brief gevoegde tekening van dhr. Danzig weergegeven, waarin hij zijn interpretatie van het probleem van Koningsbruggen weergeeft (Sachs, Stiebitz, & Wilson, 1988).


Figuur 2, (Sachs, Stiebitz, & Wilson, 1988)

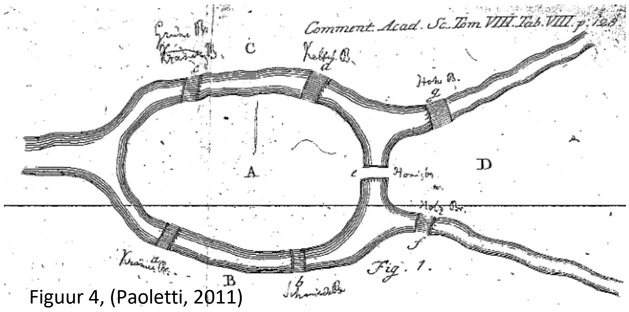

ad mathesin minime pertinentes, citius
a mathematicis solvantur quam ab aliis.
Locum interim huic quaestioni concedis
Vir Amplissime in Geometria Situs, de qua
autem nova disciplina fateor me
ignorare cujusmodi problemata ad
eam referenda velint Leibnitius et
Wolffius. Rogo igitur te, si me ido-
neum judicas in hac nova disciplina
quicquam praestandi ut mihi aliquot
definita problemata eo spectantia
proponere velis, quo distinctius
perspicere queam quid praecise de-
sideretur.

Figuur 3, (Sachs, Stiebitz, & Wilson, 1988)

Zoals je misschien kunt voorstellen begreep hij in eerste instantie niet waarom iemand hem uitnodigde dit probleem te bekijken, dit werd bekend uit een geschreven brief naar de burgemeester van Danzig die hem dit probleem had voorgelegd. De brief die hij schreef staat hiernaast weergegeven en is hieronder vrij vertaald: *"Thus you see, most noble Sir, how this type of solution bears little relationship to mathematics, and I do not understand why you expect a mathematician to produce it, rather than anyone else, for the solution is based on reason alone, and its discovery does not depend on any mathematical principle. Because of this, I do not know why even questions which bear so little relationship to mathematics are solved more quickly by mathematicians than by others."* (Paoletti, 2011)

Later raakte Leonhard Euler toch geïnteresseerd om te kijken of er een manier was dit op te lossen. Hij schreef het volgende naar zijn Italiaanse collega wiskundige Giovanni Marinoni: *“This question is so banal, but seemed to me worthy of attention in that (neither) geometry, nor algebra, nor even the art of counting was sufficient to solve it.”*

Opdracht 2.
Bedenk een reden waarom Euler in eerste instantie raar gereageerd kan hebben op de vraag dit probleem als wiskundige op te lossen.

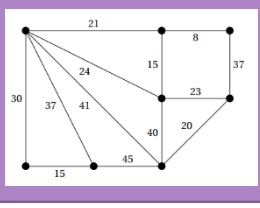


Figuur 4, (Paoletti, 2011)

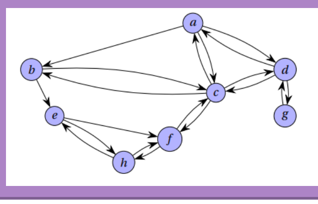
Waar de bewoners van Koningsbergen dit probleem probeerden op te lossen door verschillende routes over de bruggen te proberen, gebruikte Euler hiervoor enkel pen en papier. In figuur 4 zie je een aantekening van Euler waarin hij het probleem benadert. Deze weergave noemen we modelleren en dit model ondersteunt het vinden van de oplossing voor het probleem. Je ziet dat deze weergave al een stuk duidelijker is dan die uit de brief van dhr. Danzig.
Echter werd pas meer dan een eeuw later zijn grafische verwerking voor het eerst geïntroduceerd als “Graaf” door James Joseph Silvester, een andere Engelse collega wiskundige die bekend staat om het introduceren van nieuwe begrippen als ‘matrix’ en de welbekende ‘discriminant’!

Een graaf wordt gedefinieerd als een verzameling punten, die knopen worden genoemd, verbonden door lijnen of bogen. Het centrale idee van de grafentheorie is dat bij vrijwel alle sociale en natuurlijke verhoudingen een wiskundige structuur ter grondslag ligt. De grafentheorie is een onderdeel van de wiskunde die zich richt op het bestuderen van netwerken en verbindingen tussen objecten. Je kan hierbij denken aan routes voor postbodes, het treinverkeer, maar ook de verbindingen tussen mensen, in computers, tussen neuronen of bijvoorbeeld de verbindingen tussen mensen op Sociale Media. De oplossing van het door Euler banaal genoemde probleem is dus na een eeuw pas opgepakt en tot graaf bestempeld, wat later is uitgegroeid tot een groot en belangrijk onderdeel van de wiskunde.
Een aantal begrippen binnen de grafentheorie op een rijtje:

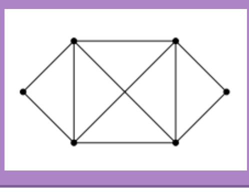
Gewogen graaf: lijnen krijgen een gewicht toegekend.



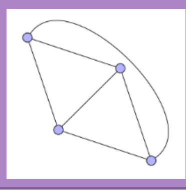
Gerichte graaf: de knooppunten worden verbonden door pijlen



Samenhangende graaf: vanuit ieder punt is een route te maken naar een ander punt.



Oneven graad: uit een knooppunt vertrekt een oneven aantal verbindingslijnen.



Opdracht 3.
a) Maak zelf een graaf die past bij het Bruggenprobleem van Koningsbergen. Laat de graaf bestaan uit knopen en lijnen.
b) Bepaal van de begrippen in de paarse kaders hierboven welke passen bij het Bruggenprobleem.

Een missend begrip in bovenstaand rijtje is het Eulerpad, ook wel de Eulerroute genoemd. Deze benaming is uiteindelijk ontstaan uit het bruggenprobleem van Koningsbergen. Een Eulerroute in een graaf wordt omschreven als een route door de graaf heen, waarbij alle verbindingslijnen maar een keer voorkomen.

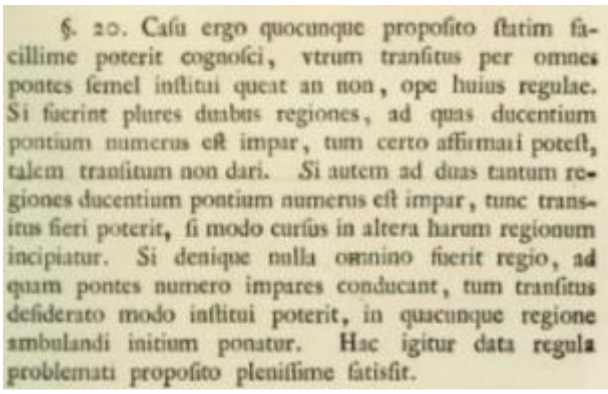
Opdracht 4.
a) Teken op twee verschillende manieren een willekeurige, samenhangende graaf waarbij een Eulerroute te vormen is. Zorg dat je graaf minstens 4 knooppunten bevat en tenminste één knooppunt een graad van meer dan 3 heeft.
b) Wat valt je op aan de toename van het aantal verbindingslijnen bij het toevoegen van een knooppunt aan de graaf?

Kijkend naar de omschrijving van het begrip Eulerroute en de ontwikkelde graaf van opdracht 4 kan gesteld worden dat bij het passeren van ieder knooppunt er twee verbindingslijnen nodig zijn. Dit betekent dus dat alle knooppunten een even graad moeten hebben. Sterker nog, als er een graaf is waarbij ieder knooppunt een even aantal verbindingen bevat, is er een Eulerpad te vormen. Hier is echter wel nog een extra mogelijkheid te vinden, waarbij het begin- en eindpunt allebei oneven graden, dus een oneven aantal verbindingslijnen hebben.

Opdracht 5.
Teken een samenhangende graaf bij de hierboven omschreven extra mogelijkheid.

We keren terug naar het Bruggenprobleem van Koningsbergen in de 18^{e} eeuw en het bewandelen van een eventueel Eulerpad. Zoals hiervoor omschreven is, blijkt dat bij een willekeurige graaf waarvan nul of twee knooppunten een oneven graad hebben er een Eulerpad te vinden is. Bij een even aantal verbindingen rondom een knooppunt kun je iedere verbinding precies één keer gebruiken en op het einde weer terugkeren naar de plek van starten.
We bekijken nu de graaf van het bruggenprobleem nogmaals. Je kan je dus afvragen of er een pad te bewandelen is dat over alle zeven bruggen gaat waarbij je geen enkele brug dubbel gebruikt.

Opdracht 6.
a) Bekijk je getekende graaf van opdracht 3a nog eens. Probeer nu te bepalen of er in deze graaf een Eulerroute te creëren is aan de hand van bovengenoemde informatie. Schrijf je conclusie op en leg uit hoe je op dit antwoord gekomen bent.
b) Waar kan je een brug bijbouwen om ervoor te zorgen dat er wel een Eulerroute gemaakt kan worden bij Koningsbergen?


§. 20. Caſu ergo quocunque propoſito ſtatim facillime poterit cognoſci, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel inſtitui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus eſt impar, tum certo affirmari poteſt, talem tranſitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus eſt impar, tunc tranſitus fieri poterit, ſi modo curſus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum tranſitus deſiderato modo inſtitui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati propoſito pleniſſime ſatisfit.

Figuur 5, (Euler, 1736), vertaling (Newman, 1956)

c) Laat zien hoe deze Eulerroute er dan uit komt te zien en wat je begin- en eindpunt zou moeten zijn.

In het figuur hiernaast zie je de geschreven van conclusie van Euler staan. Hij schrijft hier, vrij vertaald: “Als er meer dan twee gebieden zijn waar een oneven aantal bruggen op uitkomt, dan is er geen route waarbij alle bruggen maar 1 keer aangedaan worden. Echter wanneer er precies 2 gebieden zijn waar een oneven aantal bruggen op uitkomt, lukt dit wel wanneer de route in een van deze twee gebieden begint. Wanneer er geen enkel gebied is waar een oneven aantal bruggen op uitkomt, kan de wandeling wel volbracht worden.

De Eulerroute bleek dus helaas niet gevormd te kunnen worden bij het Zeven Bruggenprobleem. Waar de bewoners van Koningsbergen eerst dachten dat dit een simpele puzzel was, bleek het bewijzen hiervan uiteindelijk nog redelijk wat tijd te kosten voordat dit uitgewerkt kon worden. Dit maakt de ontwikkeling en de start van de grafentheorie dus ook zo bijzonder. Het bruggenprobleem kan dan al meer dan 200 jaar oud zijn, de gevonden theorieën die erbij horen worden vandaag de dag nog steeds gebruikt en vormen een belangrijke basis om complexe problemen op te lossen.

Figuur 5, naar NS (2018)

Een voorbeeld van een dergelijk probleem is iets dat je zelf misschien ook wel eens meegemaakt hebt: het uitvallen van een bepaald station door werkzaamheden of problemen als sneeuw op het spoor. Hierbij vormen de stations een knooppunt en de sporen een verbindingslijn wanneer dit weergegeven wordt als graaf. Daardoor zijn per station ook de graden af te lezen die bij het knooppunt horen, ofwel het aantal richtingen dat men vanuit dat station op kan. Zie de figuur hierboven voor een deel van de spoorkaart in 2018.

Toepassingsopdracht.
a) Welk station dat op dit deel van de kaart wordt weergegeven heeft de hoogste graad? De kleur van de lijn is hierbij niet van belang.
b) Welke invloed op de bereikbaarheid heeft het uitvallen van dit station door werkzaamheden of vertragingen plaatsvinden? Gebruik voor het beantwoorden van deze vraag de bovenstaande kaart in figuur 5.
c) Welk advies zou je de NS willen geven om te voorkomen dat dit probleem zich vaker zou kunnen voordoen? Laat dit in de figuur hierboven met een tekening zien.

Uitwerkingen opdracht

Opdracht 1.

a) Bekijk figuur 1 en hiermee het bruggenprobleem van Koningsbergen. Schrijf minstens 5 eventuele routes op. Let op! Probeer zo min mogelijk bruggen dubbel te gebruiken, maar het is niet erg in de routes bruggen meer voorkomen dan 1 keer.

Verschillende combinaties van routes zijn mogelijk. Leerlingen zullen er al snel achter komen dat het lastig is routes te krijgen waar iedere brug maar 1 keer bewandelt wordt. Geef hier niet direct een conclusie bij.

b) Is het volgens jou mogelijk om deze 7 bruggen over te steken, zonder dat hierbij een brug dubbel gebruikt wordt en ieder gebied om de bruggen heen bereikt wordt?

Antwoorden kunnen variëren, leerlingen kunnen direct zien dat dit niet mogelijk is. Vraag hierbij dan om een uitleg waarom zij dit logisch vinden klinken. Vraag daarna ook of ze dit eventueel kunnen bewijzen, of dat dit een gevoelskwestie (nog) is. Laat leerlingen die denken dat dit wel mogelijk is uitleggen waarom.

Opdracht 2.

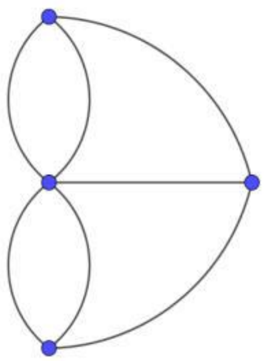
Bedenk een reden waarom Euler in eerste instantie raar gereageerd kan hebben op de vraag dit probleem als wiskundige op te lossen.

Het probleem voelt in eerste instantie misschien niet wiskundig aan omdat het niet bij de voornamelijk bekende getallenreeksen of formules lijkt te passen. Dit probleem sluit vooral aan bij de wiskunde van structuren, iets dat men soms vergeet te zien als wiskundig onderdeel. Euler kan hier raar op gereageerd hebben doordat het probleem in eerste instantie al opgelost leek: het was niet mogelijk, maar een bewijs nog niet geleverd was. Hij ging dus voor het eerst aan de slag met deze wiskunde van structuren.

Opdracht 3.

a) Maak zelf een graaf die past bij het Bruggenprobleem van Koningsbergen. Laat de graaf bestaan uit knopen en lijnen.

Een graaf die eruit ziet als een variatie op onderstaande graaf:



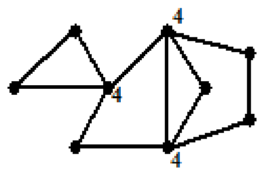
b) Bepaal van bovenstaande begrippen welke passen bij het Bruggenprobleem.

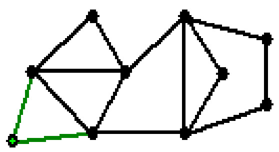
Samenhangende graaf; oneven graad.

Opdracht 4.

a) Teken op twee verschillende manieren een willekeurige, <u>samenhangende</u> graaf waarbij een Eulerroute te vormen is. Zorg dat je graaf minstens 5 knooppunten bevat.

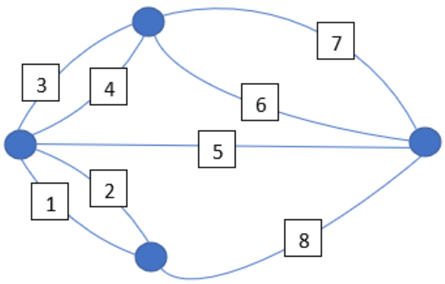
Voorbeeld van een dergelijke graaf:



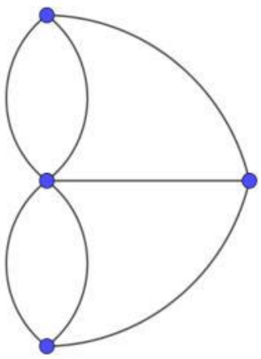


b) Wat valt je op aan de toename van het aantal verbindingslijnen bij het toevoegen van een knooppunt aan de graaf?
Het zou moeten opvallen dat bij het toevoegen van een knooppunt het aantal verbindingslijnen minstens 2 en een even aantal moet zijn om deze te verbinden met de graaf en hierbij een Eulerroute te vormen. Je moet in het knooppunt binnenkomen en dus ook weer vertrekken met een andere lijn.

Opdracht 5.
Teken een samenhangende graaf bij de omschreven uitzondering.
Onderstaand voorbeeld, uiteraard zijn er variaties mogelijk.



Opdracht 6.
a) Bekijk je getekende graaf van opdracht 3a nog eens. Probeer nu te bepalen of er in deze graaf een Eulerroute te creëren is aan de hand van bovengenoemde informatie. Schrijf je conclusie op en leg uit hoe je op dit antwoord gekomen bent.



Het is hierbij niet mogelijk om een Eulerroute te creëren. Je kan niet van iedere brug maar 1 keer gebruik maken en in alle punten terechtkomen. Dit heeft te maken met het teveel aan punten waarvan de graad oneven is: dit zijn ze namelijk allemaal.
b) Waar kan je een brug bijbouwen om ervoor te zorgen dat er wel een Eulerroute gemaakt kan worden bij Koningsbergen?
Er zou dan tussen twee punten een brug bijgebouwd moeten worden, zodat bij twee punten een even graad gemeten wordt en bij de twee andere punten een oneven graad. Wanneer dan de route doorlopen wordt door in een punt met oneven graad te starten en te eindigen bij het andere punt met een oneven graad, lukt het wel om een Eulerroute te creëren.
c) Laat zien hoe deze Eulerroute er dan uit komt te zien en wat je begin- en eindpunt zou moeten zijn.
Bovenstaande route getekend: en laten zien dat beginnen moet worden in gebied met oneven graad.

Toepassingsopdracht.

a) Welk station dat op dit deel van de kaart wordt weergegeven heeft de hoogste graad?

Zwolle

b) Wat probleem ontstaat er als er precies op dit station werkzaamheden of vertragingen plaatsvinden? Gebruik voor het beantwoorden van deze vraag de kaart.

Het noordelijk deel van Nederland wordt volledig afgesloten.

c) Welk advies zou je de NS willen geven om te voorkomen dat dit probleem zich vaker zou kunnen voordoen? Laat dit eventueel in een tekening van een graaf zien.

Een station van Emmen naar Groningen aanleggen.