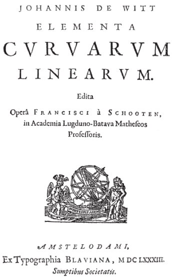
De coördinaten van Jan de Witt
Vergelijkingen toen en nu

Hans Sterk
Technische Universiteit Eindhoven



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CVRVARVM
LINEARVM.
Edita
Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Mathefeos
Profefforis.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, M DC LXXXIII.
Sumptibus Societatis.

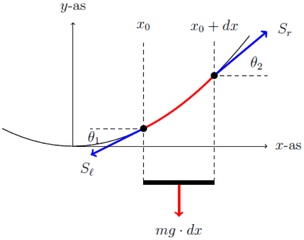
Eindterm Wiskunde D:

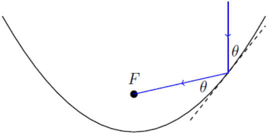
- Subdomein D2: Kegelsneden: synthetisch en in coördinaten
  15. De kandidaat kan kegelsneden zowel synthetisch als algebraïsch beschrijven, en op grond van een synthetische of algebraïsche beschrijving ligging en eigenschappen bij de bijbehorende figuren onderzoeken en bewijzen.

Jan de Witt (1625 – 1672):

- *Elementa Curvarum Linearum* (liber primus & secundus): beschrijving kegelsneden meetkundig en mbv vergelijkingen in 2 variabelen (deel II: '1e leerboek analytische meetkunde')

Parabolen enz. op diverse plaatsen





Hangbrug met weg, constant gewicht per lengte-eenheid

- Krachtenevenwicht:

$$S_r \sin\theta_2 - S_\ell \sin\theta_1 = mg \cdot dx$$
$$S_r \cos\theta_2 = S_\ell \cos\theta_1 (= S_h)$$

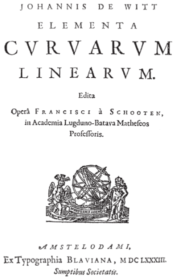
- $y'(x + dx) - y'(x) = \frac{mg}{S_h} \cdot dx$
- y'' constant, dus $y(x) = \frac{1}{2} \frac{mg}{S_h} x^2$

Parabolische spiegel

- Licht weerkaatst door brandpunt


GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum Notis
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.
Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quam ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.


JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.
Edita
Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.

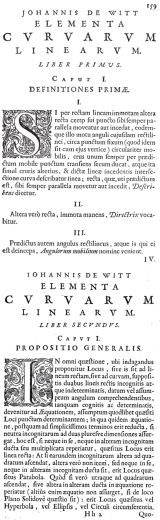
AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Géométrie:

- Door Frans van Schooten jr. (1615-1660) vertaald in het Latijn
- Bijlage bij *Discours de la Méthode...* van René Descartes (1596 – 1650)
- Uitgegeven in twee delen

- Bijlage bij bovenstaand 2e deel
- Er waren meer bijlagen: van Van Schooten, Beaune

Elementa Curvarum Linearum: twee delen



159

JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CVRVARVM
LINEARVM.

LIBER PRIMVS.

CAPUT I.
DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo ſui puncto ſibi ſemper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujuſdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem ſit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum ſemper per prædictum mobile punctum tranſiens ſecum ducat, atque ita ſimul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis interſectione curva deſcribatur linea; recta, quæ, uti prædictum eſt, ſibi ſemper parallela movetur aut incedit, *Deſcribens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei eſt deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CVRVARVM
LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.
PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæſtione, ubi indagandus proponitur Locus, ſive is ſit ad lineam rectam, ſive ad curvam, ſuppoſitis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel aſſumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, aſſumptum quodlibet quæſiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos erit reducta, ſi neutra incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſſurgat, hoc eſt, ſi neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſeu multiplicata reperiatur, quæſitus Locus erit linea recta: At ſi earundem incognitarum altera ad quadratum aſcendat, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſit, erit Locus quæſitus Parabola. Quòd ſi verò utraque ad quadratum aſcendat, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non aſſurget, ſi de loco Plano Solidovè quæſtio ſit): erit Locus quæſitus vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia.

Hh 2 Quo-

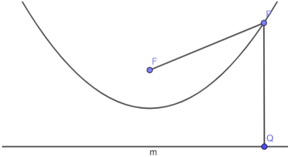
Liber primus: planimetrische inleiding

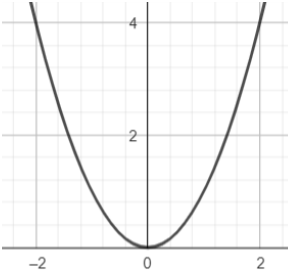
- Beschrijvingen parabool, hyperbool, ellips
- Eigenschappen

Liber secundus: analyse vergelijkingen

- Lijn
- Parabool
- Hyperbool
- Ellips

Wat is een parabool?



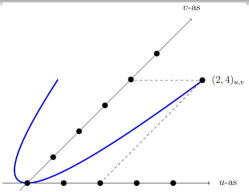


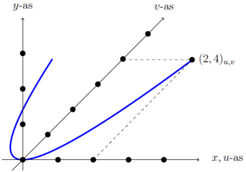
- Richtlijn m, brandpunt F: $\{P \mid d(P,F) = d(P,m)\}$.

- Vergelijking van graad 2 $y = x^2$

Iets soortgelijks bij ellipsen en hyperbolen: mbv brandpunten, vergelijking, brandpunt en richtlijn (excentriciteit). Of: kegelsnede.

$y = x^2$ in een scheef stelsel





Wat als je y-as onder 45° staat?

- Is het nog wel een parabool?
- Zo ja, hoe te analyseren?
- $v = u^2$ tov u-as en scheve v-as
- (u, v) staat voor $u(1,0) + v(1,1)/\sqrt{2} = (x, y)$
- Dwz $x = u + v/\sqrt{2}$ en $y = v/\sqrt{2}$
- Dus $u = x - y$ en $v = \sqrt{2}\,y$ zodat $\sqrt{2}\,y = (x-y)^2$
- Met $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b)$:

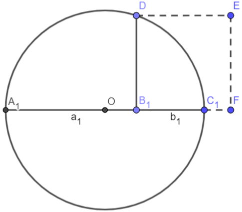
$$b = 2(a + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}$$

Terugrekenen naar x, y-coördinaten: top in $(-\frac{3}{16}\sqrt{2}, \frac{1}{16}\sqrt{2})$

Coördinaten: De Witt in wiskundige kringen

Descartes' *Géometrie* (1637)

- Geeft een methode om meetkundige problemen op te lossen
- Moet wel leiden tot meetkundige oplossing: constructie
- Methode gebruikt algebra:
  - Benoem (on)bekende grootheden: $a, b, c, \ldots$ resp. $x, y, z, \ldots$
  - Leid relaties/vergelijkingen uit gegevens af
  - Vertaal oplossingen hiervan in constructies



Algebra: $x^2 = ab$

J(oh)an de Witt (1625 – 1672)

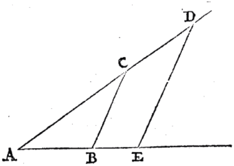
- Geboren te Dordrecht; studie rechten & wiskunde te Leiden
- Raadpensionaris in stadhouderloze tijdperk (1650–1672)
- Versterkt de vloot ivm gevaar Engeland
- Rampjaar 1672: Johan en broer Cornelis gelyncht in Den Haag
- Wiskundige werken:
  - 1649 *Elementa Curvarum Linearum*
  - 1671 *Waerdije van Lijfrenten Naer Proportie van Los-renten*

Wiskundig Netwerk rondom Frans van Schooten jr: Christiaan Huygens (1629–1695), Hendrick van Heuraet (1634–1660?), Jan Hudde (1628–1704), Gerard Kinckhuysen (1625–1666), Jan de Witt, Descartes

Propositio I.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a}$, erit locus quæsitus linea recta.

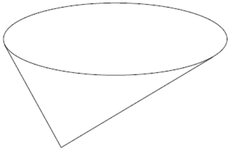
Si aequatio sit $y = \frac{bx}{a}$, erit locus quaesitus linea recta.

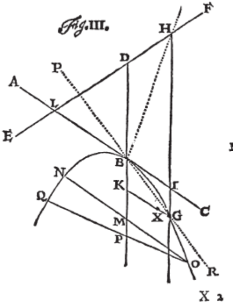


Indien de vergelijking luidt $y = \frac{bx}{a}$, dan zal de gezochte plaats een rechte lijn zijn.

- Beginpunt A van x (langs rechte AB)
- Trek BC onder gegeven hoek en zó dat $AB : BC = a : b$.
- Rechte AC is de gezochte plaats:
    - Kies D op AC willekeurig, trek DE onder de gegeven hoek
    - Noem DE dan y
    - Dan vind je $x : y = AE : ED = AB : BC = a : b$

Dus $ay = bx$ zodat $y = \frac{bx}{a}$



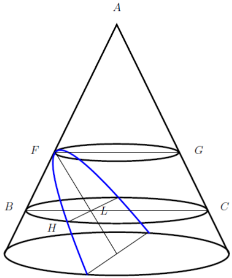


Klassieke beschrijving: doorsnijding vlak met kegel/cilinder

- ellips, hyperbool, parabool
- of ‘ontaarding’ (bijv 2 rechte lijnen)

De Witt: vlakke krommen zonder ‘tussenkomst’ ruimtelijke beschouwingen beschrijven

Vandaar dat Liber primus (deel 1) dergelijke beschrijvingen levert

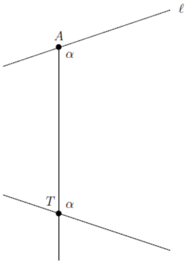


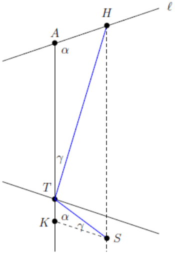
Vlak kegelsnede $\parallel$ beschrijvende AG

- $FLCG$ parallellogram, dus $LC = FG$
- $HL^2 = BL \cdot LC = BL \cdot FG$
  (uit horizontale cirkel door B, C)
- Gelijkvormig: $\triangle BLF \sim \triangle FGA$
- $BL = FL \cdot BL/FL = FL \cdot FG/AG$
- $HL^2 = FL \cdot (FG^2/AG)$
  $y^2 = x \cdot c$

Stelling. *Het vierkant op HL is de rechthoek op FL en een lijnstuk gelijk aan* FG^2/AG

Hier ligt de sleutel tot De Witts 'vlakke' aanpak: 'vierkant $\sim$ rechthoek'



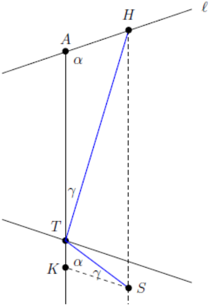


Start met

- Een lijn ℓ (richtlijn)
- Een punt T (pool)
- Hoek TA en ℓ is α (vast)
- Lijn door T onder hoek α met TA

Constructie punt S op parabool:

- Draai TA en 2e lijn door T om T
- Snijpunt H gedraaide TA met ℓ
- Snijd lijn door H en $\parallel$ TA met 2e gedraaide lijn: S
- Voor de analyse: trek $SK \parallel$ 2e gedraaide lijn, K op TA



Er geldt

- $\triangle SKT \sim \triangle TAH$
- $AH = SK$
- Dus $SK/TK = TA/AH = TA/SK$ ofwel: $SK^2 = TA \cdot TK$
- Met $x = TK$ (variabel) en $y = SK$: $y^2 = TA \cdot x$
- $TA = p$ parameter: $y^2 = px$

Stelling *Het vierkant op SK is gelijk aan de rechthoek ATK*

(Het betreft dus een (deel van een) parabool)

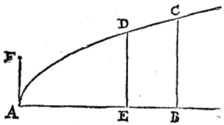
Uit De Witts Elementa II: $y^2 = ax$

Propositio 7.

Si æquatio ſit *yy* ∞ *ax*, vel converſim *ay* ∞ *xx* : erit Locus quæſitus Parabola.

Si aequatio sit $yy = ax$, vel conversim $ay = xx$: erit Locus quaesitus Parabola

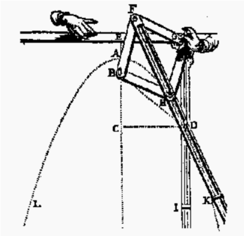
Als de vergelijking luidt $y^2 = ax$, of omgekeerd $ay = x^2$, dan zal de gezochte plaats een parabool zijn

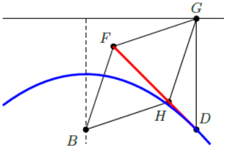


Beschouw parabool ADC bepaald door:

- Breng de (gegeven) hoek ABC aan
- Breng $FA = a$ aan
- Parabool ADC: vierkant op ED is gelijk aan rechthoek FAE
- Meet x af vanaf A
- Met $y = ED$, $x = AE$: $y^2 = ax$

Opm: in bv het geval $y^2 = ax + b^2$ tekent De Witt een hoek $\neq 90^\circ$



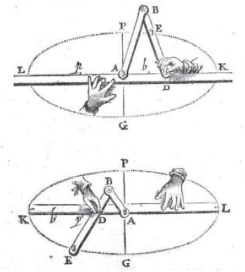


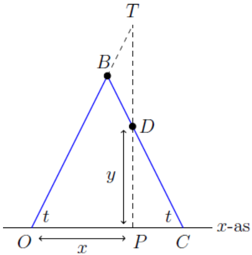
Een bij de hoekpunten beweegbare ruit

- Hoekpunt B vast (brandpunt)
- Hoekpunt G beweegt over richtlijn
- Verlengde FH snijdt verticaal door G

Volgt uit $DB = DG$. In coördinaten:

- $B = (0, -1)$, $\ell : y = 1$
- $D = (x, y)$
- $x^2 + (y + 1)^2 = |y - 1|^2$
- $y = -x^2/4$

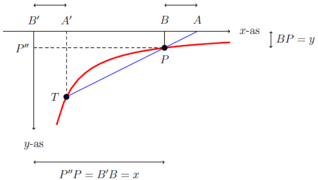




- Los van 'passer en liniaal': nieuwe werktuigen

- $\triangle OPT \sim \triangle CPD$
- $\cos t = \frac{OP}{OT} = \frac{x}{4\ell/3}$,
  $\sin t = \frac{PD}{CD} = \frac{y}{2\ell/3}$
- $\frac{x^2}{(4\ell/3)^2} + \frac{y^2}{(2\ell/3)^2} = 1$

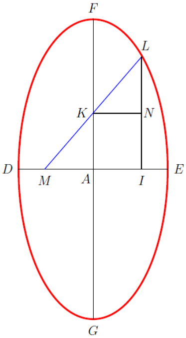
De Witts beschrijvingen: hyperbool en ellips



Gegeven: 2 assen (niet per se $\perp$): x, y-as, T, afstand AB

- TA draait om T
- Snijd lijn door B parallel met y-as met TA

Dan $BP \cdot P''P = TA' \cdot AB$, dus $xy = \text{cst}$



Gegeven: 2 assen DE, FG door A (niet per se $\perp$), vaste lengte KM, punt L op verlengde KM

- K, M bewegen op assen
- Ellips: baan van L

Want: $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{LI^2}{DI \cdot IE} = \frac{FA^2}{AE^2} = \frac{b^2}{a^2}$ en dus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ten slotte

- A.W. Grootendorst: tekst, vertaling, inleiding en commentaar bij *Elementa Curvarum Linearum*, CWI Publications 1997 en 2003 (Engelse versie: Springer, 2000 en 2010)
- Descartes: *Over de methode*, Band III: Dioptriek, Meteoren, Geometrie, Nawoord bij de Geometrie (door Henk Bos), Uitgeverij Boom, 2011
- Websites: fransvanschooten.nl (met leerlingen aan de slag!), pandd.nl/kegelsneden.htm, hhofstede.nl
- Jean-Marc van Tol: trilogie rondom Johan de Witt (deel 1 (2018): *Musch*; deel 2 (2023): *Buat*; deel 3: in voorbereiding)
- Huygens instituut: briefwisseling van Johan de Witt (diverse delen nu verschenen), zie ook johandewitt.nl
- Teun Koetsier (2024): *A history of kinematics from Zeno to Einstein*, Springer.

Dank aan Steven Wepster (UU) voor het toezenden van informatie!