In de voetsporen van Euler

de formule van Euler afgeleid uit zijn
oorspronkelijk werk

Diego Demaree
d.demaree@chrlyceumdelft.nl

INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

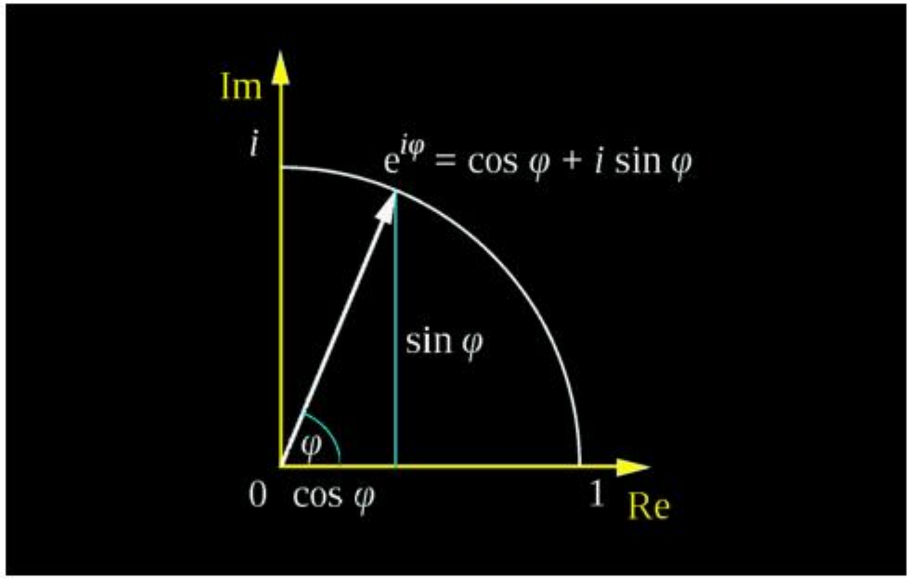
TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

De formule van Euler



Complexe getallen

5 vwo wiskunde D

Diego Demaree

Waar gaat het vandaag over?

Hoe kwam Euler van

Cum ſit $(\text{ſin.}\, z)^2 + (\text{coſ.}\, z)^2 = 1$ erit

via

ideoque generaliter erit $(\text{coſ.}\, z \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n = \text{coſ.}\, nz \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, nz$:

naar

Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Coſinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, v + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, v - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, v$.

Voordat we beginnen

- Waarom geschiedenis van de wiskunde?
- Waarom Euler?

Geschiedenis van de wiskunde

- Inzicht in ontwikkeling van concepten
- Wiskunde als dynamische wetenschap
- Vallen en opstaan
- Verhoging cognitief niveau

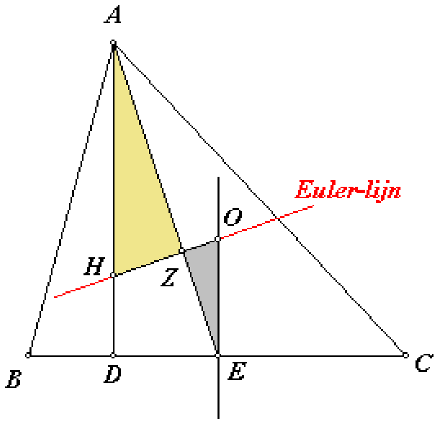
Leonhard Euler (1707-1783)

- Laplace: “Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.”
- Gauss: "das Studium aller Eulerschen Arbeiten doch stets die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird"

Een kleine greep

$\pi, f(x), e, i, \Delta, \Sigma$

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

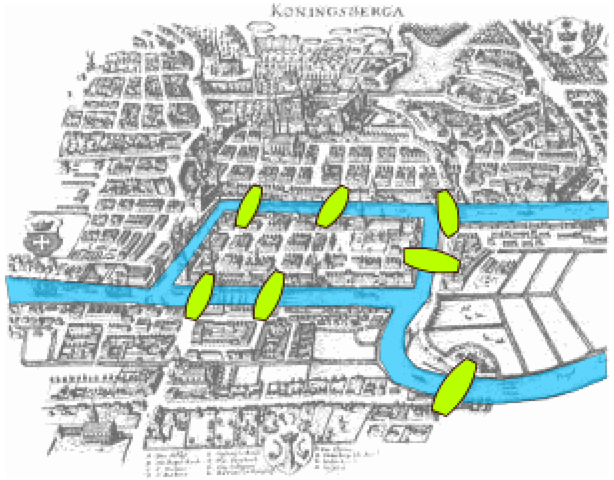


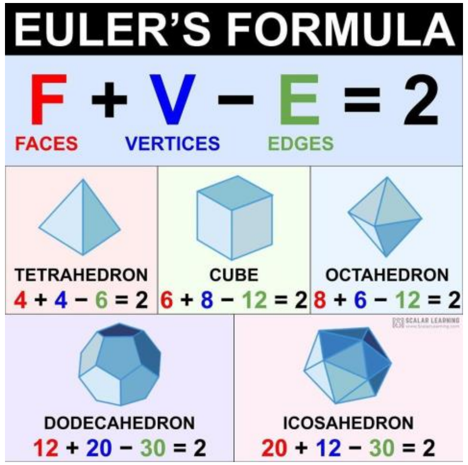
$$s(220) = 284$$

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

$$s(284) = 220$$

$$1+2+4+71+142$$





Materiaal van Euler

How Euler Did It

by Ed Sandifer

EULER'S

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

Translated and annotated by
Ian Bruce

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

CAPUT VIII.

De quantitatibus tranſcendentibus ex Circulo ortis.

- Eenheidscirkel en π

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $=$ 3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

William Jones (1675-1749)

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Inſtance, in the *Circle*, the Diameter is to Circumference as 1 to

$$\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\,\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} -, \&c. =$$

$\boxed{3{\cdot}14159, \&c. = \pi.}$ This *Series* (among others for the ſame purpoſe, and drawn from the ſame Principle) I receiv'd from the Excellent Analyſt, and my much Eſteem'd Friend Mr. *John Machin*; and by means thereof, *Van Ceulen*'s Number, or that in Art. 64. 38. may be Examin'd with all deſireable Eaſe and Diſpatch.

Goniometrische functies

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo assumo $= 1$; hujus Arcus z considerari potissimum solent Sinus & Cosinus. Sinum autem Arcus z in posterum hoc modo indicabo, *sin. A.* z, seu tantum *sin.* z. Cosinum vero hoc modo *cos. A.* z, seu tantum *cos.* z. Ita, cum π sit Arcus $180°$, erit *sin.* $0\pi = 0$; *cos.* $0\pi = 1$; &

sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, *cos.* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *sin.* $\pi = 0$; *cos.* $\pi = -1$;

sin. $\frac{3}{2}\pi = -1$; *cos.* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *sin.* $2\pi = 0$; & *cos.* $2\pi = 1$.

Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 con-

Eigenschappen goniometrische functies

128. Hinc vero etiam constat si habeantur duo Arcus y & z, fore $\sin.(y+z) = \sin.y.\cos.z + \cos.y.\sin.z$, & $\cos.(y+z) = \cos.y.\cos.z - \sin.y.\sin.z$, itemque $\sin.(y-z) = \sin.y.\cos.z - \cos.y.\sin.z$ & $\cos.(y-z) = \cos.y.\cos.z + \sin.y.\sin.z$.

Hinc loco y substituendo Arcus $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$, &c., erit

$\sin.(\frac{1}{2}\pi + z) = +\cos.z$	$\sin.(\frac{1}{2}\pi - z) = +\cos.z$
$\cos.(\frac{1}{2}\pi + z) = -\sin.z$	$\cos.(\frac{1}{2}\pi - z) = +\sin.z$
$\sin.(\pi + z) = -\sin.z$	$\sin.(\pi - z) = +\sin.z$
$\cos.(\pi + z) = -\cos.z$	$\cos.(\pi - z) = -\cos.z$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi + z) = -\cos.z$	$\sin.(\frac{3}{2}\pi - z) = -\cos.z$
$\cos.(\frac{3}{2}\pi + z) = +\sin.z$	$\cos.(\frac{3}{2}\pi - z) = -\sin.z$
$\sin.(2\pi + z) = +\sin.z$	$\sin.(2\pi - z) = -\sin.z$
$\cos.(2\pi + z) = +\cos.z$	$\cos.(2\pi - z) = +\cos.z$

Van $sin^2(z) + cos^2(z) = 1$ naar De Moivre

- Bekijk de tekst van Euler in paragraaf 132 en 133 (blz. 97 en 98)

- Hoe volgt volgens Euler vanuit $(\sin.z)^2 + (\cos.z)^2 = 1$
  dat $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz \pm \sqrt{-1}.\sin.nz$?

  Tip: maak ook gebruik van paragraaf 128!

NB. Hierboven is de notatie van Euler gebruikt zowel bij de notatie van de sinus en cosinus (afkortingspunt, haakjes bij kwadraat, geen haakjes bij hoek nz), als bij $\sqrt{-1}$.
Het symbool i is ook door hem geïntroduceerd, maar pas in later werk.

Uitwerking

128. Hinc vero etiam conſtat ſi habeantur duo Arcus y & z, fore ſin. $(y+z) =$ ſin. y. coſ. $z +$ coſ. y. ſin. z, & coſ. $(y+z) =$ coſ. y. coſ. $z -$ ſin. y. ſin. z, itemque ſin. $(y-z) =$ ſin. y. coſ. $z -$ coſ. y. ſin. z & coſ. $(y-z) =$ coſ. y. coſ. $z +$ ſin. y. ſin. z.

- $(\sin.z)^2 + (\cos.z)^2 = 1$
- $(\cos.z + \sqrt{-1}\sin.z)(\cos.z - \sqrt{-1}\sin.z) = 1$
- $\left(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z\right)\left(\cos.y + \sqrt{-1}.\sin.y\right) =$
- $\cos.y.\cos.z - \sin.y.\sin.z + \sqrt{-1}.(\cos.y.\sin.z + \sin.y.\cos.z)$
- $\cos.(y+z) + \sqrt{-1}.(\sin.(y+z))$
- $\left(\cos.x + \sqrt{-1}.\sin.x\right)\left(\cos.y + \sqrt{-1}.\sin.y\right)\left(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z\right) =$
- $\left(\cos.(x+y) + \sqrt{-1}.\sin.(x+y)\right)\left(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z\right) =$
- $\left(\cos.(x+y+z) + \sqrt{-1}.\sin.(x+y+z)\right)$

Vervolg

- We weten: $\left(\cos . z+\sqrt{-1} . \sin . z\right)\left(\cos . y+\sqrt{-1} . \sin . y\right)=$ $\cos .(y+z)+\sqrt{-1} .(\sin .(y+z))$ en:
- $\left(\cos . x+\sqrt{-1} . \sin . x\right)\left(\cos . y+\sqrt{-1} . \sin . y\right)\left(\cos . z+\sqrt{-1} . \sin . z\right)=$
- $\left(\cos .(x+y+z)+\sqrt{-1} . \sin .(x+y+z)\right)$
- Vervang nu y en z door x en veralgemeniseer
- $(\cos . x+\sqrt{-1} . \sin . x)^{2}=\cos .(x+x)+\sqrt{-1} . \sin .(x+x)=$ $\cos . 2x+\sqrt{-1} . \sin . 2x$
- $(\cos . x+\sqrt{-1} . \sin . x)^{3}=\cos .(x+x+x)+\sqrt{-1} . \sin .(x+x+x)=$ $\cos . 3x+\sqrt{-1} . \sin . 3x$

En dus

- $(\cos.x + \sqrt{-1}.\sin.x)^n =$
  $\cos.(x + \cdots + x) + \sqrt{-1}.\sin.(x + \cdots + x) =$
  $\cos.nx + \sqrt{-1}.\sin.nx$
- Evenzo geldt:
  $(\cos.x - \sqrt{-1}.\sin.x)^n = \cos.nx - \sqrt{-1}.\sin.nx$
- En dus
  $$\cos.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n + (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2}$$
  $$\sin.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n - (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2.\sqrt{-1}}$$

Uitgeschreven als reeks

Evolutis ergo binomiis hisce erit per Series:

$$cos.\, nz = (cos.\, z)^{n} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(cos.\, z)^{n-2}(sin.\, z)^{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(cos.\, z)^{n-4}(sin.\, z)^{4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}(cos.\, z)^{n-6}(sin.\, z)^{6} + \&c.,$$

&

$$sin.\, nz = \frac{n}{1}(cos.\, z)^{n-1}\, sin.\, z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(cos.\, z)^{n-3}(sin.\, z)^{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(cos.\, z)^{n-5}(sin.\, z)^{5} - \&c.$$

Reeksontwikkeling sinus en cosinus

134. Sit Arcus z infinite parvus, erit ſin. $z = z$ & coſ. z
$= 1$: ſit autem n numerus infinite magnus, ut ſit Arcus nz
finitæ magnitudinis, puta, $nz = v$; ob ſin. $z = z = \frac{v}{n}$ erit

$$\text{coſ.}\ v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c., \ \&$$

$$\text{ſin.}\ v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.\ \text{Da-}$$

- Euler geeft hierna voorbeelden, ook van tangens en cotangens

Terug naar

$$\cos. nz = \frac{(\cos.z+\sqrt{-1}.\sin.z)^n+(\cos.z-\sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2}$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos.z+\sqrt{-1}.\sin.z)^n-(\cos.z-\sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2.\sqrt{-1}}$$

- In paragraaf 138 lezen we

138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus z infinite parvus, & fit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$; & $z = \frac{v}{i}$, unde $ſin.\ z = \frac{v}{i}$ & $coſ.\ z = 1$; his ſubſtitutis fit $coſ.\ v =$

- Vertaald staat daar: Een oneindig kleine hoek z kan opnieuw in de formules uit paragraaf 133 (de formules hierboven) ingevuld worden en n zal een oneindig groot getal i zijn, zodat iz een eindige waarde v zal blijven. Daarom zal gelden: $nz = v$ en $z = \frac{v}{i}$. Hieruit volgt $\sin. z = \frac{v}{i}$ en $\cos. z = 1$

- Voer deze substitutie uit. Wat herkennen we hier (limietdefinitie)?

Uitwerking

- $n = i$, $nz = v$, $z = \frac{v}{i}$, $\sin . z = \frac{v}{i}$, $\cos . z = 1$
- $\cos . nz = \frac{(\cos . z + \sqrt{-1}.\sin . z)^{n} + (\cos . z - \sqrt{-1}.\sin . z)^{n}}{2}$
- $\cos . v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^{i} + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^{i}}{2}$
- $\sin . nz = \frac{(\cos . z + \sqrt{-1}.\sin . z)^{n} - (\cos . z - \sqrt{-1}.\sin . z)^{n}}{2\sqrt{-1}}$
- $\sin . v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^{i} - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^{i}}{2\sqrt{-1}}$

Herleiden tot de formule van Euler

$$\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right) - \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$ In Capite autem præcedente vidimus esse $\left(1+\frac{z}{i}\right)^{i} = e^{z}$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $cos.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $sin.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = cos.\, v + \sqrt{-1}.\, sin.\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = cos.\, v - \sqrt{-1}.\, sin.\, v$.

Herleiden tot formule van Euler

- Uit hoofdstuk VII: Cum sit $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} +$ &c.

  infinitam explicari potest. Tum vero, denotante i numerum infinite magnum, tam quantitates exponentiales quam Logarithmi per potestates exponi possunt. Erit enim $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, hincque $a^y = (1 + \frac{y\,la}{i})^i$, deinde pro Logarithmis hy-
- Dit komt overeen met de definitie: $e^z = \lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$
- En dus:

$$\cos.v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2} = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin.v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

vervolg

- $\cos. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \rightarrow 2\cos. v = e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$
  $\sin. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \rightarrow 2\sqrt{-1}. \sin. v = e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}$
- Links en rechts optellen
  $2\cos. v + 2\sqrt{-1}. \sin. v = 2e^{v\sqrt{-1}}$ en dus
  $\cos. v + \sqrt{-1}. \sin. v = e^{v\sqrt{-1}}$
- Vermenigvuldig met r, vervang v door φ en $\sqrt{-1}$ door i
  $r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

Naar een les over de formule van Euler

- Les vormgegeven als een story (Agterberg et al., 2022)
- Geschiedenis ingezet volgens het *genetic principle*: ontwikkelen begrip rondom concept aan de hand van de historische ontwikkeling (Gulikers & Blom, 2001).
- Geschiedenis zowel als hulpmiddel (i.e., leren van wiskunde), als doel (i.e., inzicht in de ontwikkeling van wiskunde als menselijke activiteit en kennis van het geniale werk van Euler) (Jankvist, 2009).

Tijdens de les

- Gebruik van oorspronkelijk materiaal
- Zowel onderzoeken als toepassen
- Aandacht voor wiskunde als levende wetenschap
- Aandacht voor bewijzen
- Onderzoek alternatieve methodes van bewijzen
- Samenwerkend leren

Uitwisseling

- Bekijk de les over de formule van Euler en wissel uit wat u ervan vindt
- Op welke manier gebruiken we geschiedenis nu al in de wiskundeles?
- Welke ideeën hebben we om leerlingen actief kennis te laten maken met geschiedenis?
- Wat vonden we van deze workshop?

Vul uw antwoorden in op deze padlet:
https://tinyurl.com/nwd2024

De mooiste formule?

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dank voor uw aandacht

Referenties

- Agterberg, D. A., Oostdam, R. J., & Janssen, F. J. J. M. (2022). From speck to story: Relating history of mathematics to the cognitive demand level of tasks. *Educational Studies in Mathematics, 110*(1), 49–64. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10093-6
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (Vol. 1). Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
- Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 223–258. https://doi.org/10.1023/A:1014539212782
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9
- Jones, W. (1706). *Synopsis palmariorum matheseos: or, A new introduction to the mathematics.* London. Geraadpleegd op 30 maart 2024, van https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Synopsis_Palmariorum_Matheseos_pi.jpg
- Sandifer, E. (2007). *How Euler did it. e, π and i: Why is "Euler" in the Euler identity?* Geraadpleegd op 28 april 2023, van http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-08.pdf
- Stichting Math4all. (z.d.). *Formule van Euler*. Geraadpleegd op 28 april 2023, van https://content.math4all.nl/view?comp=vd-e2&subcomp=vd-e23&repo=m4a2015&parent=www.math4all.nl/overzichten/vwo-d-2020/33

Links

- The Euler Archive: http://eulerarchive.maa.org/
- How Euler did it: http://eulerarchive.maa.org/hedi/#:~:text=How%20Euler%20Did%20It%20is,to%20geography%20to%20fluid%20mechanics.
- Engelse vertaling: https://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm
- Math4all: https://www.math4all.nl/overzichten/vwo-d-2020/33