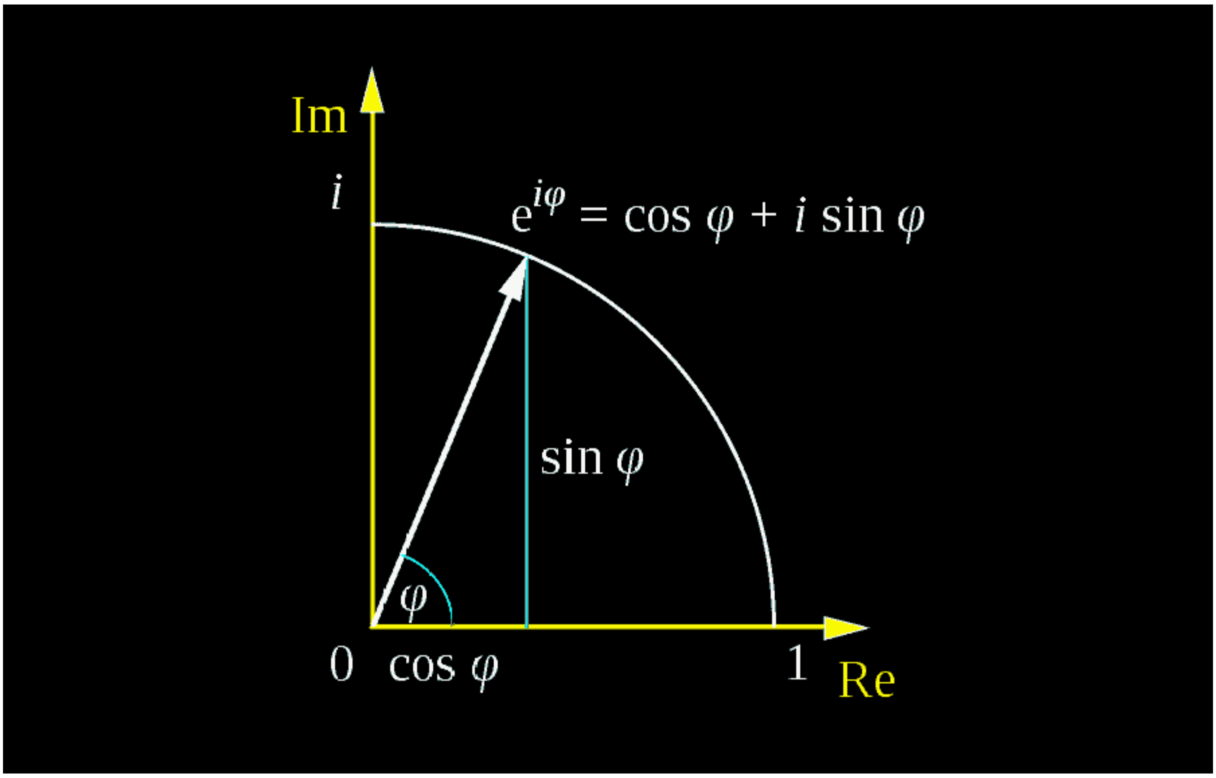
De formule van Euler



Complexe getallen

5 vwo wiskunde D

Diego Demaree

Inhoud

Lesdoelen:

Aan het eind van deze les kan ik:

- de formule van Euler afleiden en aantonen, met behulp van de oorspronkelijke tekst;
- het verband zien tussen goniometrische functies en machtsfuncties;
- complexe getallen vermenigvuldigen en delen en machten van complexe getallen berekenen met behulp van de formule van Euler.

Benodigdheden:

Laptop/chromebook, schrift.

Inleiding

In de vorige lessen hebben we geleerd dat een complex getal te schrijven is in de vormen:

- $z = a + bi$
- $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Daarnaast kennen we de stelling van De Moivre: $(\cos x + i \cdot \sin x)^n = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx)$

In deze les treden we in de voetsporen van Leonhard Euler. We gaan met behulp van zijn werk nog een derde manier vinden om een complex getal uit te drukken. Alsof we zijn studenten zijn, werken we gezamenlijk een hoofdstuk uit een van zijn werken door. ‘Zijn studenten zijn’ betekent dat we de teksten die Euler zelf heeft geschreven gaan bestuderen en proberen te begrijpen. We werken denkstappen die hij gemaakt heeft uit en we bestuderen voorbeelden. Maar voordat we dat doen onderzoeken we eerst wie Euler eigenlijk was.

Opgave 1: Euler

Leonhard Euler (1707-1783) was een Zwitserse wis- en natuurkundige. Hij wordt door velen beschouwd als een van de belangrijkste wiskundigen aller tijden.

Figuur 1: Leonhard Euler

Zoek op het internet informatie op over Euler en zijn werk.

a. Waarom wordt Euler gezien als een van de belangrijkste wiskundigen aller tijden?

b. Welke bijzondere bijdragen heeft Euler geleverd aan de wiskunde? Noem er minimaal 3.

c. Welke informatie die jij over Euler hebt gevonden sprak je het meest aan, of verwonderde je het meest? Geef ook aan waarom.

Uit het vele werk dat Euler heeft nagelaten, bespreken we er vandaag één. In 1748 kwam het boek *Introductio in analysin infinitorum* uit. Een groot deel van de jaren ’40 had hij besteed aan het schrijven van dit boek. Hij kon in eerste instantie geen uitgeverij vinden voor dit werk. Uiteindelijk heeft een uitgeverij in het Zwitserse Lausanne zijn werk alsnog gepubliceerd. Gelukkig maar, want dit werk wordt gezien als een van de grootste wiskundige werken ooit geschreven, omdat het zowel de grondslagen legt voor wat we tegenwoordig het domein *analyse* binnen de wiskunde noemen, maar ook zodanig is geschreven dat het werk ook door studenten en leerlingen goed is te begrijpen.

We bestuderen in deze les een deel van hoofdstuk VIII

CAPUT VIII.

De quantitatibus tranſcendentibus ex Circulo ortis.

In dit hoofdstuk behandelt Euler eerst de goniometrische functies en hun eigenschappen. Dit is voor het eerst dat de sinus, cosinus en tangens worden behandeld als een functie in plaats van als een verhouding en de rekenregels die hij noemt, gebruiken we nu nog.
Voordat hij daarmee begint, introduceert hij en passant nog het symbool π[1] als de halve omtrek van een cirkel met straal 1. Daarnaast stelt hij dat π ook gelijk is aan de booglengte van 180°.
Zie hiervoor ook tekst 1.

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $=$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

Tekst 1: introductie van het getal π

Opgave 2: π

Leg uit dat beide beweringen van Euler over π inderdaad overeenkomen met onze huidige opvatting over het getal π.

Op de volgende pagina's van het hoofdstuk behandelt Euler diverse eigenschappen over goniometrische functies en geeft hij een aantal voorbeelden. In deze les behandelen we die niet allemaal. Je kunt ze terugvinden in de volledige tekst in de bijlage. We bekijken nu alleen paragraaf 128 in tekst 2.

128. Hinc vero etiam conſtat ſi habeantur duo Arcus y & z, fore $\text{ſin.}(y+z) = \text{ſin.}y.\text{coſ.}z + \text{coſ.}y.\text{ſin.}z$, & $\text{coſ.}(y+z) = \text{coſ.}y.\text{coſ.}z - \text{ſin.}y.\text{ſin.}z$, itemque $\text{ſin.}(y-z) = \text{ſin.}y.\text{coſ.}z - \text{coſ.}y.\text{ſin.}z$ & $\text{coſ.}(y-z) = \text{coſ.}y.\text{coſ.}z + \text{ſin.}y.\text{ſin.}z$.

Hinc loco y ſubſtituendo Arcus $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$, &c., erit

$\text{ſin.}(\frac{1}{2}\pi+z) = +\text{coſ.}z$	$\text{ſin.}(\frac{1}{2}\pi-z) = +\text{coſ.}z$
$\text{coſ.}(\frac{1}{2}\pi+z) = -\text{ſin.}z$	$\text{coſ.}(\frac{1}{2}\pi-z) = +\text{ſin.}z$
$\text{ſin.}(\pi+z) = -\text{ſin.}z$	$\text{ſin.}(\pi-z) = +\text{ſin.}z$
$\text{coſ.}(\pi+z) = -\text{coſ.}z$	$\text{coſ.}(\pi-z) = -\text{coſ.}z$
$\text{ſin.}(\frac{3}{2}\pi+z) = -\text{coſ.}z$	$\text{ſin.}(\frac{3}{2}\pi-z) = -\text{coſ.}z$
$\text{coſ.}(\frac{3}{2}\pi+z) = +\text{ſin.}z$	$\text{coſ.}(\frac{3}{2}\pi-z) = -\text{ſin.}z$
$\text{ſin.}(2\pi+z) = +\text{ſin.}z$	$\text{ſin.}(2\pi-z) = -\text{ſin.}z$
$\text{coſ.}(2\pi+z) = +\text{coſ.}z$	$\text{coſ.}(2\pi-z) = +\text{coſ.}z$

Tekst 2: paragraaf 128 met goniometrische formules

---

[1] Het symbool π werd in eerdere teksten van bijvoorbeeld de Engelse wiskundige William Jones (1706) ook al eens gebruikt, maar sinds Euler is het symbool π algemeen gebruik geworden.

Opgave 3: goniometrische formules

Bekijk de bovenstaande tekst en tabel van paragraaf 128 in tekst 2. Welke goniometrische formules herken je? Schrijf ze op in de notatie die je gewend bent uit de lessen wiskunde B.

We slaan nu een aantal paragrafen over, die je zelf in de bijlage kunt bekijken. We maken de stap naar de complexe getallen. In paragraaf 132 schrijft Euler (tekst 3):

132. Cum sit $(\text{fin}.\, z)^2 + (\text{cof}.\, z)^2 = 1$ erit, Factoribus sumendis, $(\text{cof}.\, z + \sqrt{-1}.\,\text{fin}.\, z)(\text{cof}.\, z - \sqrt{-1}.\,\text{fin}.\, z) = 1$;

Tekst 3: start van paragraaf 132

Opgave 4: ontbinden in factoren

Je herkent waarschijnlijk hierboven de uitdrukking $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$
Euler zegt: Sinds gegeven is dat $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$, krijgen we als we ontbinden in factoren $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = 1$.
Het symbool i ter vervanging van $\sqrt{-1}$ is ook door Euler bedacht, maar pas in een later werk. Echter de rekenregels die wij voor i kennen, gelden ook voor $\sqrt{-1}$. Aangezien we de originele bron gebruiken, noteren we deze les $\sqrt{-1}$ in plaats van i. Daarnaast zet Euler na sin en cos een punt (afkortingen). Ook na $\sqrt{-1}$ schijft hij een punt (vermenigvuldiging). Ook die vind je in deze vertaling terug. Daar waar wij schrijven $\sin^2 z$ en $\cos^2 z$, schrijft Euler $(\sin. z)^2$ en $(\cos. z)^2$
Laat zien dat $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = 1$ inderdaad een correcte ontbinding is van $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$.

In de rest van deze paragraaf toont Euler de Stelling van De Moivre aan:
$(\cos. z + \sqrt{-1}\,. \sin. z)^n = \cos. nz + \sqrt{-1}. \sin. nz$. Wij gaan dat zelf ook doen.
We starten daar waar Euler ook is gestart (tekst 4):

Arcubus combinandis & multiplicandis. Quaeratur enim productum horum Factorum $(\text{cof}.\, z + \sqrt{-1}.\,\text{fin}.\, z)(\text{cof}.\, y. + \sqrt{-1}.\,\text{fin}.\, y.)$ ac reperietur $\text{cof}.\, y.\, \text{cof}.\, z - \text{fin}.\, y.\, \text{fin}.\, z + (\text{cof}.\, y.\, \text{fin}.\, z + \text{fin}.\, y.\, \text{cof}.\, z)$

Tekst 4: product van twee complexe getallen in poolvoorstelling

---

Opgave 5: Stelling van De Moivre aantonen

Euler schrijft hier: Factoren, zelfs als ze imaginair zijn, spelen een grote rol in de combinatie en vermenigvuldiging van hoeken (bogen). Voor het product van deze factoren zou gezocht kunnen worden: $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. y. + \sqrt{-1}. \sin. y)$ en dan wordt gevonden:
$\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z + \sqrt{-1}. (\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z)$[2]

Dit product is te herleiden tot de poolvoorstelling van dit complexe getal in de vorm:
$\cos. \ldots + \sqrt{-1}. \sin. \ldots.$

a. Voer deze herleiding uit. Maak (eventueel) gebruik van paragraaf 128 (tekst 2) en dan met name de rekenregels die boven de tabel staan.

---

[2] Achter de variabele y zet Euler hier ook een vermenigvuldigingspunt. Ook die zijn in de vertaling overgenomen.

b. De volgende stap is om het complexe getal $(\cos. x + \sqrt{-1}. \sin. x)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)$ te herleiden tot de poolvoorstelling in de vorm: $\cos. \ldots + \sqrt{-1}. \sin. \ldots..$ Voer ook deze herleiding uit.

c. Veralgemeniseer bovenstaande twee voorbeelden tot de Stelling van De Moivre: $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz + \sqrt{-1}. \sin. nz$

Euler geeft deze stelling ook voor de geconjugeerde dus $(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz - \sqrt{-1}. \sin. nz$. Hij schrijft deze in één keer algemeen op: $(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$ en vervolgt daarna met (tekst 5):

ideoque generaliter erit $(cof. z \pm \sqrt{-1}. fin. z)^n = cof. nz \pm \sqrt{-1}. fin. nz$:
Unde, ob ſignorum ambiguitatem, erit

$$cof. nz = \frac{(cof. z + \sqrt{-1}. fin. z)^n + (cof. z - \sqrt{-1}. fin. z)^n}{2} \ \&$$

$$fin. nz = \frac{(cof. z + \sqrt{-1}. fin. z)^n - (cof. z - \sqrt{-1}. fin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Tekst 5: formules voor sinus en cosinus

Deze twee formules uit tekst 5 hebben we nodig om de stap te maken naar een andere schrijfwijze van complexe getallen.

We slaan nu een aantal paragrafen over en gaan naar paragraaf 138[3].

Euler schrijft in paragraaf 138 het volgende (tekst 6):

138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus z infinite parvus, & fit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$; & $z = \frac{v}{i}$, unde $fin. z = \frac{v}{i}$ & $cof. z = 1$; his ſubſtitutis fit $cof. v =$

Tekst 6: invullen formules van paragraaf 133

Vertaald staat daar: Een oneindig kleine hoek z kan opnieuw in de formules uit paragraaf 133 (de formules uit tekst 5) ingevuld worden en n zal een oneindig groot getal i zijn, zodat iz een eindige waarde v zal blijven. Daarom zal gelden: $nz = v$ en $z = \frac{v}{i}$. Hieruit volgt $\sin. z = \frac{v}{i}$ en $\cos. z = 1$.

Eerder in de tekst (paragraaf 134) had Euler al aangetoond dat voor een zeer kleine hoek bij benadering geldt dat $\sin. z = z$ en $\cos. z = 1$. Door ook slim te kiezen voor i als oneindig grote waarde[4] zorgt hij ervoor dat v een eindige waarde blijft. Hierdoor kan via substitutie een uitdrukking worden gevonden voor $\cos. nz$ en $\sin. nz$. In het rechterlid vervangt hij $\sin. z$ door $\frac{v}{i}$, immers, hij had $z = \frac{v}{i}$ gesteld, waarbij z een kleine hoek is. Hij vervolgt op de volgende pagina: door deze waarden[5] in te vullen geldt:

---

[3] Een deel van de tussenliggende paragrafen behandelen we in het extra materiaal bij deze les op bladzijde 11.

[4] Let op: dit is niet de imaginaire i, want die introduceerde hij pas in een later werk.

[5] De waarden voor $nz, \sin. z, \cos. z$ en n.

$\cos. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i+(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$ en $\sin. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i-(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$.

Opgave 6: Verband goniometrie en e-machten

Leid de formules $\cos. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i+(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$ en $\sin. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i-(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$ af met behulp van de formules voor $\cos. nz$ en $\sin. nz$ (zoals gegeven in tekst 5) en de bovenstaande vertaling van tekst 6.

Hierna zet Euler nog een belangrijke stap. Hij herleidt deze formules verder tot (tekst 7):

$+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $cof.\ v =$

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \;\&\; fin.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Tekst 7: herleiden tot e-machten

Hoe hij aan het getal e komt en waarom hij e kan substitueren in de formules uit paragraaf 133, heeft hij in hoofdstuk VII laten zien. Een stukje daaruit zie je in tekst 8. Ook in deze tekst gaat hij uit van een oneindig groot getal voor i en is dit dus niet de imaginaire i.

infinitam explicari poteſt. Tum vero, denotante i numerum infinite magnum, tam quantitates exponentiales quam Logarithmi per poteſtates exponi poſſunt. Erit enim $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, hincque $a^y = (1 + \frac{yla}{i})^i$, deinde pro Logarithmis hy-

Tekst 8: de limietdefinitie van het getal e

Opgave 7: herleiden tot e-machten

In deze opgave gaan we uitleggen waarom $\cos. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i+(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$ en $\sin. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i-(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$ herleid kunnen worden tot $\cos. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ en $\sin. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

We gebruiken hier de definitie[6] (tekst 8) dat e het getal is waarvoor geldt: $e = \lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$.

a. Controleer deze definitie door de formule $y_1 = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ in te vullen in je GR en te bepalen naar welke waarde de grafiek nadert als x heel groot wordt.
b. Vervang de 1 in de teller van de breuk in de bovenstaande formule door 2. Naar welke waarde nadert de grafiek nu als x heel groot wordt. En naar welke waarde nadert de grafiek als je de 1 in de teller van de breuk in de bovenstaande formule vervangt door 3?
c. Laat me behulp van vraag a en b zien dat de herleiding van $\cos. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i+(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$ en $\sin. v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i-(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$ tot $\cos. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ en $\sin. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ inderdaad juist is. Denk er hierbij aan dat i in de formule en in de limiet niet de imaginaire i is, maar een oneindig groot getal (zie de vertaling van tekst 6).

In deze opgave heb je het verband tussen goniometrische functies en e-machten gevonden!

[6] Euler gebruikte deze definitie zelf ook. Die had hij in hoofdstuk 7 van het boek *Introductio in analysin infinitorum* afgeleid, zie tekst 8. De limietnotatie is zoals we de definitie van e tegenwoordig schrijven.

Opgave 8: andere schrijfwijze voor poolvoorstelling

Nu volgt de laatste stap. We gaan de formules uit de vorige vraag combineren tot een andere schrijfwijze voor de poolvoorstelling $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$. Daartoe herleiden we eerst $\cos. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ en $\sin. v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ door beide vergelijkingen met een handige factor te vermenigvuldigen zodat de noemer in beide vergelijkingen verdwijnt in het rechterlid en daarna de vergelijkingen op te tellen.

a. Voer deze herleiding uit.
b. Vervang nu $\sqrt{-1}$ door i en vervang v door φ. Haal de punten achter $\sin.$ en $\cos.$ weg. Vermenigvuldig tot slot met r.

Je hebt nu de (hedendaagse) uitdrukking gevonden om $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ als e-macht te schrijven. Deze uitdrukking heet de formule van Euler.
We hebben de formule van Euler (tekst 9) in deze les aangetoond met behulp van het oorspronkelijke werk van Euler[7]. Daarmee zijn we in deze les als zijn ‘studenten’ in zijn voetsporen getreden!

$$e^{+v\sqrt{-1}} = cof.\, v + \sqrt{-1}.\, fin.\, v$$

Tekst 9: de formule van Euler

Euler werkt in de rest van hoofdstuk VIII nog een aantal praktische voorbeelden uit. Een zeer bijzonder voorbeeld behandelt hij niet, namelijk het geval waarbij geldt $v = \pi$. Dit geval levert de prachtige formule $e^{i\pi} = -1$ op. Vaak wordt deze formule geschreven als $e^{i\pi} + 1 = 0$. Ondanks dat Euler dit specifieke geval niet zelf heeft opgeschreven, heeft het wel zijn naam gekregen: de Euler identiteit. Deze formule wordt ook wel de mooiste (wiskundige) formule genoemd.

Opgave 9: the most beautiful formula

Wat maakt Eulers identiteit zo bijzonder en waarom wordt deze formule ook wel de mooiste formule die er bestaat genoemd? Maak gebruik van een internetbron bij je antwoord.

Terugblik op de lesdoelen

In deze les waren de doelen: Aan het eind van deze les kan ik:

- de formule van Euler afleiden en aantonen, met behulp van de oorspronkelijke tekst;
- het verband zien tussen goniometrische functies en machtsfuncties;
- complexe getallen vermenigvuldigen en delen en machten van complexe getallen berekenen met behulp van de formule van Euler.

Bepaal nu voor jezelf per lesdoel of je dat behaald hebt en waaruit dat blijkt (pagina en/of opgave).

[7] Zie behalve tekst 8 ook pagina 25 in de bijlage voor de formule van Euler in zijn oorspronkelijke werk.

Bronvermelding

Teksten

Alle teksten komen uit hoofdstuk 8 van:

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (Vol. 1). Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

Figuren

De afbeelding van Euler op de kaft komt van:
https://canonjjohn.com/2022/08/27/heroes-of-the-faith-leonhard-euler/
De afbeelding van Eulers identiteit op de kaft komt van:
https://mathvault.ca/euler-formula/

Figuur 1: Leonhard Euler komt van: https://nl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
Figuur 2: Brook Taylor (extra materiaal) komt van: https://www.ecured.cu/Brook_Taylor

Extra materiaal bij de les over de formule van Euler

Toepassingen

Met behulp van de formule van Euler is het eenvoudig om complexe getallen te vermenigvuldigen en te delen. Je maakt daarbij gebruik van dezelfde rekenregels als bij reële e-machten. Datzelfde geldt voor machtsverheffen.

Een voorbeeld:
Gegeven zijn: $z_1 = 2{,}8 + 5i$ en $z_2 = 1{,}9 + 3i$
Bereken: $z_1 \cdot z_2$ en $\frac{z_1}{z_2}$ en schrijf de complexe getallen in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$ met behulp van de formule van Euler.
Uitwerking: $|z_1| = \sqrt{2,8^2 + 5^2 \approx 5{,}73}$, $Arg(z_1) = \tan^{-1}\frac{5}{2{,}8} \approx 1{,}06$. Dus $z_{1\approx}5{,}73e^{1{,}06i}$.
Op dezelfde wijze vind je $z_{2\approx}3{,}55e^{1{,}01i}$
Dan geldt $z_1 \cdot z_2 = 5{,}73e^{1{,}06i} \cdot 3{,}55e^{1{,}01i} \approx 20{,}35e^{2{,}07i}$ en $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5{,}73e^{1{,}06i}}{3{,}55e^{1{,}01i}} \approx 1{,}61e^{0{,}05i}$

Opgave 10: verwerken

Gegeven zijn de volgende complexe getallen:

$z_1 = 3,\;\; z_2 = 2{,}4 + 4i,\;\; z_3 = i,\;\; z_4 = -3 - 2{,}5i$

$z_5 = 3{,}1(\cos 1{,}8 + i \cdot \sin 1{,}8),\;\; z_6 = 4{,}6e^{1{,}35i},\;\; z_7 = 1{,}1e^{5{,}54i}$

a. Schrijf alle complexe getallen in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$ met behulp van de formule van Euler. Rond zo nodig af op twee decimalen, maar geef z_3 exact.

Bereken en rond daarbij r en φ zo nodig af op twee decimalen:

b. $z_1 \cdot z_2$

c. $z_4 \cdot z_5 \cdot z_6$

d. ${z_2}^3 \cdot {z_4}^4$

e. ${z_3}^2$

f. $\frac{z_7}{z_6}$

g. $\frac{1}{z_5}$

h. $\frac{3}{{z_2}^3}$

i. $10 \cdot \frac{z_4 \cdot z_5 \cdot z_6}{{z_2}^3 \cdot {z_4}^4}$

Opgave 11: Toepassen

De formule van Euler kan gebruikt worden om de somformules voor $\sin(x+y)$ en $\cos(x+y)$ af te leiden. We weten $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$. Start met $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ en leid vanuit daar de somformules voor $\sin(x+y)$ en $\cos(x+y)$ af.

Een ander bewijs van de Euler identiteit

In de afgelopen les hebben we de formule van Euler ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$) aangetoond met behulp van zijn oorspronkelijke werk. Daarmee is door voor φ de waarde π te nemen ook direct de Euleridentiteit $e^{i\pi} + 1 = 0$ aan te tonen. In deze paragraaf bekijken we nog een bewijs van de Euleridentiteit, dat niet door Euler zelf is gegeven, maar wel met alle kennis uit hoofdstuk 8 van *Introductio in analysin infinitorum* kan worden opgesteld. Een stuk dat we in de les hebben overgeslagen, hebben we daarvoor nodig. Het gaat om paragraaf 133 uit hoofdstuk 8.

In paragraaf 132 had Euler uitdrukkingen voor $\cos. nz$ en $\sin. nz$ gevonden (tekst 5, hieronder opnieuw weergegeven).

ideoque generaliter erit $(\text{coſ.}\, z \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n = \text{coſ.}\, nz \pm \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, nz$:
Unde, ob ſignorum ambiguitatem, erit

$$\text{coſ.}\, nz = \left(\frac{(\text{coſ.}\, z + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n + (\text{coſ.}\, z - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n}{2}\right) \;\&$$

$$\text{ſin.}\, nz = \frac{(\text{coſ.}\, z + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n - (\text{coſ.}\, z - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\, z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Tekst 5 (herhaling): formules voor sinus en cosinus

Wat Euler vervolgens doet in paragraaf 133 is beide uitdrukkingen benaderen met een machtreeksontwikkeling. Wij kennen dit in de wiskunde als een Taylorreeks[8]. De Engelse wiskundige Brook Taylor (1685 – 1731) heeft namelijk in 1715 gepubliceerd[9] dat functiewaarden (van sommige functies) te benaderen zijn door een machtreeks, waarbij de coëfficiënten volgen uit de afgeleiden van de functie in een bepaald punt. Het voert te ver voor deze les om volledig in te gaan op Taylorreeksen. Je kunt daarvoor dit keuzeonderwerp volgen: https://tinyurl.com/Taylorreeks.

Voor nu is het voldoende om aan te nemen dat $\sin z$ benaderd kan worden door:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

dat $\cos z$ benaderd kan worden door

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

en dat e^z benaderd kan worden door

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Figuur 2: Brook Taylor

In tekst 10 is te zien dat Euler de correcte reeksontwikkeling voor de sinus en cosinus geeft:

$$\text{coſ.}\, v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

$$\text{ſin.}\, v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

Tekst 10: reeksontwikkeling sinus en cosinus

---

[8] Een machtreeksontwikkeling rondom $x = 0$ wordt ook wel een Maclaurinreeks genoemd.

[9] Het was niet geheel Taylors eigen ontdekking, want die wordt namelijk toegeschreven aan de Schotse wiskundige James Gregory (1638 – 1675).

De machtreeksontwikkeling van e^z had hij al in paragraaf 125 van het vorige hoofdstuk gegeven (tekst 11).

125. Cum sit $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \&c.$

Tekst 11: reeksontwikkeling e^z

In het vervolg van de paragraaf geeft hij een paar voorbeelden van het benaderen van een antwoord met een Taylorreeks, zoals bijvoorbeeld de sinus van 90°.

In tekst 12 zie je het eerste stukje daarvan.

esse $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; Quia nunc valor ipsius π constat, si is ubique substituatur, prodibit

$$\text{sin. A.}\ \frac{m}{n}90^\circ =$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916 \\
&- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636 \\
&+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055488 \\
&- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854632
\end{aligned}
$$

Tekst 12: Taylorreeks van de sinus van 90°

Opgave 12: Maakte Euler ook fouten?

Euler had natuurlijk geen rekenmachine ter beschikking en berekende alles uit zijn hoofd. Wij kunnen gelukkig gebruik maken van rekenmachines, zoals deze high precision calculator: https://www.ttmath.org/online_calculator. We gebruiken nu deze rekenmachine, omdat de high precision calculator een groot aantal decimalen kan berekenen, waardoor we het werk van Euler kunnen narekenen (met de GR lukt dat niet gezien het geringe aantal decimalen). Maar voordat we dat doen, bestuderen we eerst tekst 12 nog wat nader.

a. Bekijk tekst 12, tekst 10 en de uitleg over de Taylorreeksen boven tekst 10. Leg uit hoe Euler aan de getallen 1,5707… 0,6459…. 0,07969… enz. is gekomen.
b. Gebruik de high precision calculator om de eerste vier termen uit deze reeks na te rekenen[10]. Tot in hoeveel decimalen nauwkeurig had Euler het per term bij het rechte eind?
c. Wellicht kwam je tot de conclusie dat niet elke decimaal klopte. Hierbij maakte Euler dus rekenfouten. Euler heeft echter heel veel materiaal gepubliceerd. Ga eens op zoek op internet naar voorbeelden van werk van Euler waar conceptuele fouten in zitten.

We gaan op de volgende pagina de Euler identiteit nogmaals (op een andere manier) bewijzen, met behulp van alle voorgaande theorie en opgaven uit deze les.

[10] Je kunt voor π in deze rekenmachine het woord pi invullen. Als je bijvoorbeeld 3! Wilt uitrekenen, doe je dit met $factorial(3)$.

Opgave 13: bewijs van de Euler identiteit

Te bewijzen: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Om te bewijzen dat $e^{i\pi} + 1 = 0$, ofwel $e^{i\pi} = -1$ volstaat het om te bewijzen dat $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

a. Waarom volstaat het om bovenstaande te bewijzen?

We maken in dit bewijs gebruik van Taylorreeksen, zoals hierboven uitgelegd.

b. Schrijf eerst de eerste zes termen van de reeksontwikkeling van e^z uit[11] (zie boven tekst 8).
c. Substitueer nu $z = i \cdot \varphi$.
d. Herleid waarbij je eerst gebruik maakt van de definitie $i^2 = -1$ en haal daarna bij de resterende termen met i de factor i buiten haakjes.
e. Maak het bewijs af, met behulp van tekst 9.

Je hebt nu de Euler identiteit bewezen.

Opgave 14: Toegift

Je hebt in deze les een bewijs gevonden voor de Euler identiteit $e^{i\pi} + 1 = 0$. Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het oorspronkelijke werk van Euler. Echter, zoals gebruikelijk bij belangrijke (of mooie) stellingen[12], zijn er ook andere manieren gezocht en gevonden om de Euler identiteit te bewijzen. Ga eens op zoek naar zo'n ander bewijs (Google, YouTube, etc.) en zorg ervoor dat je de stappen kunt volgen én uitleggen. Bereid een korte presentatie voor van dit bewijs, waarin je als doelgroep je klasgenoten neemt.

[11] We maken gebruik van z in plaats van x omdat z de complexe variabele is.

[12] Denk bijvoorbeeld aan de stelling van Pythagoras. Daar bestaan al meer dan 350 verschillende bewijzen voor (bron: Wikipedia).

CAPUT VIII.

De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis.

126. POst Logarithmos & quantitates exponentiales considerari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse $= 1$, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse $=$ 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993 751058209749445923078164062862089986280348253421 170679821480865132723066470938446 $+$, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π, ita ut sit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo assumo $= 1$; hujus Arcus z considerari potissimum solent Sinus & Cosinus. Sinum autem Arcus z in posterum hoc modo indicabo, $\textit{sin. } A.\, z$, seu tantum $\textit{sin. } z$. Cosinum vero hoc modo $\textit{cos. } A.\, z$, seu tantum $\textit{cos. } z$. Ita, cum π sit Arcus $180°$, erit $\textit{sin. } 0\,\pi = 0$; $\textit{cos. } 0\,\pi = 1$; & $\textit{sin. } \frac{1}{2}\pi = 1$, $\textit{cos. } \frac{1}{2}\pi = 0$; $\textit{sin. } \pi = 0$; $\textit{cos. } \pi = -1$; $\textit{sin. } \frac{3}{2}\pi = -1$; $\textit{cos. } \frac{3}{2}\pi = 0$; $\textit{sin. } 2\pi = 0$; & $\textit{cos. } 2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 continen-

M 3 tinen-

tinentur. Erit autem porro $\cos. z = \sin. (\frac{1}{2}\pi - z)$, & $\sin. z = \cos. (\frac{1}{2}\pi - z)$, atque $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$. Præter has denominationes notandæ ſunt quoque hæ: $tang. z$, quæ denotat Tangentem Arcus z; $cot. z$ Cotangentem Arcus z; conſtatque eſſe $tang. z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$ & $cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z} = \frac{1}{tang. z}$; quæ omnia ex Trigonometria ſunt nota.

128. Hinc vero etiam conſtat ſi habeantur duo Arcus y & z, fore $\sin. (y+z) = \sin. y. \cos. z + \cos. y. \sin. z$, & $\cos. (y+z) = \cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z$, itemque $\sin. (y-z) = \sin. y. \cos. z - \cos. y. \sin. z$ & $\cos. (y-z) = \cos. y. \cos. z + \sin. y. \sin. z$.

Hinc loco y ſubſtituendo Arcus $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$, &c., erit

$\sin. (\frac{1}{2}\pi + z) = + \cos. z$	$\sin. (\frac{1}{2}\pi - z) = + \cos. z$
$\cos. (\frac{1}{2}\pi + z) = - \sin. z$	$\cos. (\frac{1}{2}\pi - z) = + \sin. z$
$\sin. (\pi + z) = - \sin. z$	$\sin. (\pi - z) = + \sin. z$
$\cos. (\pi + z) = - \cos. z$	$\cos. (\pi - z) = - \cos. z$
$\sin. (\frac{3}{2}\pi + z) = - \cos. z$	$\sin. (\frac{3}{2}\pi - z) = - \cos. z$
$\cos. (\frac{3}{2}\pi + z) = + \sin. z$	$\cos. (\frac{3}{2}\pi - z) = - \sin. z$
$\sin. (2\pi + z) = + \sin. z$	$\sin. (2\pi - z) = - \sin. z$
$\cos. (2\pi + z) = + \cos. z$	$\cos. (2\pi - z) = + \cos. z$

Si ergo n denotet numerum integrum quemcunque, erit

$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=+\cos.z$	$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\cos.z$
$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=-\sin.z$	$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=-\sin.z$
$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\sin.z$	$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=+\sin.z$
$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\cos.z$	$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=-\cos.z$
$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=-\cos.z$	$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\cos.z$
$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=+\sin.z$	$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\sin.z$
$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\sin.z$	$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=-\sin.z$
$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\cos.z$	$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=+\cos.z$

Quæ formulæ veræ ſunt ſive n ſit numerus affirmativus ſive negativus integer.

129. Sit $\sin. z = p$ & $\cos. z = q$ erit $pp+qq=1$; & $\sin. y = m$; $\cos. y = n$; ut ſit quoque $mm+nn=1$; Arcuum ex his compoſitorum Sinus & Coſinus ita ſe habebunt.

$\sin.\ z = p$	$\cos.\ z = q$
$\sin.(y+z) = mq+np$	$\cos.(y+z) = nq-mp$
$\sin.(2y+z) = 2mnq+(nn-mm)p$	$\cos.(2y+z) = (nn-mm)q-2mnp$
$\sin.(3y+z) = (3mn^2-m^3)q+(n^3-3m^2n)p$	$\cos.(3y+z) = (n^3-3m^2n)q-(3mn^2-m^3)p$
&c.	&c.

Arcus iſti z, $y+z$, $2y+z$, $3y+z$, &c., in arithmetica progreſſione progrediuntur; eorum vero tam Sinus quam Coſinus progreſſionem recurrentem conſtituunt, qualis ex denominatore $1-2nx+(mm+nn)xx$ oritur; eſt enim

ſin.

$\mathrm{sin.}\,(2y+z) = 2n\,\mathrm{sin.}\,(y+z) - (mm+nn)\,\mathrm{sin.}\,z$ ſive
$\mathrm{sin.}\,(2y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,(y+z) - (\mathrm{sin.}\,z)$; atque ſimili modo
$\mathrm{cos.}\,(2y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,(y+z) - \mathrm{cos.}\,z$. Eodem modo erit porro
$\mathrm{sin.}\,(3y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,(2y+z) - \mathrm{sin.}\,(y+z)$, &
$\mathrm{cos.}\,(3y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,(2y+z) - \mathrm{cos.}\,(y+z)$, itemque
$\mathrm{sin.}\,(4y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,(3y+z) - \mathrm{sin.}\,(2y+z)$, &
$\mathrm{cos.}\,(4y+z) = 2\,\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,(3y+z) - \mathrm{cos.}\,(2y+z)$ &c.

Cujus legis beneficio Arcuum in progreſſione arithmetica progredientium tam Sinus quam Coſinus quouſque libuerit expedite formari poſſunt.

130. Cum ſit $\mathrm{sin.}\,(y+z) = \mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z + \mathrm{cos.}\,y\,\mathrm{sin.}\,z$ atque $\mathrm{sin.}\,(y-z) = \mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z - \mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,z$, erit his expreſſionibus vel addendis vel ſubtrahendis:

$$\mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z = \frac{\mathrm{sin.}\,(y+z) + \mathrm{sin.}\,(y-z)}{2}$$

$$\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,z = \frac{\mathrm{sin.}\,(y+z) - \mathrm{sin.}\,(y-z)}{2}$$

Quia porro eſt $\mathrm{cos.}\,(y+z) = \mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z - \mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,z$, atque $\mathrm{cos.}\,(y-z) = \mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z + \mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,z$, erit pari modo

$$\mathrm{cos.}\,y.\,\mathrm{cos.}\,z = \frac{\mathrm{cos.}\,(y-z) + \mathrm{cos.}\,(y+z)}{2}$$

$$\mathrm{sin.}\,y.\,\mathrm{sin.}\,z = \frac{\mathrm{cos.}\,(y-z) - \mathrm{cos.}\,(y+z)}{2}.$$

Sit $y = z = \frac{1}{2}v$, erit ex his poſtremis formulis:

$$\left(\mathrm{cos.}\,\tfrac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1+\mathrm{cos.}\,v}{2}, \;\&\; \mathrm{cos.}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\mathrm{cos.}\,v}{2}}$$

$$\left(\mathrm{sin.}\,\tfrac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1-\mathrm{cos.}\,v}{2}, \;\&\; \mathrm{sin.}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\mathrm{cos.}\,v}{2}}$$

unde, ex dato Coſinu cujuſque anguli reperiuntur ejus ſemiſſis Sinus & Coſinus.

131. Ponatur Arcus $y+z=a$, & $y-z=b$; erit $y = \frac{a+b}{2}$ & $z = \frac{a-b}{2}$, quibus in ſuperioribus formulis ſubſtitutis

tutis, habebuntur hæ æquationes, tanquam totidem Theoremata.

$$\sin. a + \sin. b = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \cos. \frac{a-b}{2}$$

$$\sin. a - \sin. b = 2 \cos. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{a-b}{2}$$

$$\cos. a + \cos. b = 2 \cos. \frac{a+b}{2} \cos. \frac{a-b}{2}$$

$$\cos. b - \cos. a = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{a-b}{2}.$$

ex his porro nascuntur, ope divisionis, hæc Theoremata

$$\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} = \mathrm{tang.} \frac{a+b}{2}.\ \cot. \frac{a-b}{2} = \frac{\mathrm{tang.} \frac{a+b}{2}}{\mathrm{tang.} \frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \mathrm{tang.} \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\sin. a + \sin. a}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin. a - \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \mathrm{tang.} \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin. a - \sin. a}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2}.\ \cot. \frac{a-b}{2}$$

Ex his denique deducuntur ista Theoremata

$$\frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \frac{\cos. b - \cos. a}{\sin. a - \sin. b};$$

$$\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \left(\cot. \frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. a + \cos. b} = \left(\mathrm{tang.} \frac{a+b}{2}\right)^2$$

132. Cum sit $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$ erit, Factoribus sumendis, $(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z) = 1$; qui Factores, etsi imaginarii, tamen ingentem præstant usum in Arcubus combinandis & multiplicandis. Quæratur enim productum horum Factorum $(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}.\sin. y)$ ac reperietur $\cos. y.\cos. z - \sin. y.\sin. z + (\cos. y.\sin. z + \sin. y.\cos. z)$

LIB. I. $\sqrt{-1}$. Cum autem sit $\cos.y.\cos.z - \sin.y.\sin.z = \cos.(y+z)$ & $\cos.y.\sin.z + \sin.y.\cos.z = \sin.(y+z)$ erit hoc productum

$$(\cos.y + \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z) = \cos.(y+z) + \sqrt{-1}.\sin.(y+z)$$

& simili modo

$$(\cos.y - \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z) = \cos.(y+z) - \sqrt{-1}.\sin.(y+z)$$

item

$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}.\sin.x)(\cos.y \pm \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z) = \cos.(x+y+z) \pm \sqrt{-1}.\sin.(x+y+z).$$

133. Hinc itaque sequitur fore $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin z)^2 = \cos.2z \pm \sqrt{-1}.\sin.2z$, & $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^3 = \cos.3z \pm \sqrt{-1}.\sin.3z$.

ideoque generaliter erit $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz \pm \sqrt{-1}.\sin.nz$:

Unde, ob signorum ambiguitatem, erit

$$\cos.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n + (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2} \text{ \& }$$

$$\sin.nz = \frac{(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n - (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Evolutis ergo binomiis hisce erit per Series:

$$\cos.nz = (\cos.z)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}(\cos.z)^{n-2}(\sin.z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos.z)^{n-4}(\sin.z)^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\cos.z)^{n-6}(\sin.z)^6 + \text{\&c., \&}$$

$$\sin.nz = \frac{n}{1}(\cos.z)^{n-1}\sin.z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos.z)^{n-3}(\sin.z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}(\cos.z)^{n-5}(\sin.z)^5 - \text{\&c.}$$

134.

CAP. VIII.

134. Sit Arcus z infinite parvus, erit *sin.* $z = z$ & *cos.* $z = 1$: sit autem n numerus infinite magnus, ut sit Arcus nz finitæ magnitudinis, puta, $nz = v$; ob *sin.* $z = z = \frac{v}{n}$ erit

$$cos.\ v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c., \&$$

$$sin.\ v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

Dato ergo Arcu v, ope harum Serierum ejus Sinus & Cosinus inveniri poterunt; quarum formularum usus quo magis pateat, ponamus Arcum v esse ad quadrantem, seu $90°$, ut m ad n, seu esse $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; Quia nunc valor ipsius π constat, si is ubique substituatur, prodibit

$$sin.\ A.\ \frac{m}{n} 90° =$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916\\
&- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636\\
&+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055488\\
&- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854632\\
&+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0001604411847873598218726605\\
&- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000035988432352120853404580\\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000569217292196792681171\\
&- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000006688035109811467224\\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000060669357311061950
\end{aligned}
$$

$- \frac{m^{19}}{n^{19}}$. 0, 0000000000000437706546731370

$+ \frac{m^{21}}{n^{21}}$. 0, 0000000000000002571422892856

$- \frac{m^{23}}{n^{23}}$. 0, 0000000000000000012538995403

$+ \frac{m^{25}}{n^{25}}$. 0, 0000000000000000000051564550

$- \frac{m^{27}}{n^{27}}$. 0, 0000000000000000000000181239

$+ \frac{m^{29}}{n^{29}}$. 0, 0000000000000000000000000549

atque *cos.* A. $\frac{m}{n}$ 90° =

$+$ 1, 0000000000000000000000000000

$- \frac{m^{2}}{n^{2}}$. 1, 2337005501361698273543113745

$+ \frac{m^{4}}{n^{4}}$. 0, 2536695079010480136365633659

$- \frac{m^{6}}{n^{6}}$. 0, 0208634807633529608730516364

$+ \frac{m^{8}}{n^{8}}$. 0, 0009192602748394265802417158

$- \frac{m^{10}}{n^{10}}$. 0, 0000252020423730606054810526

$+ \frac{m^{12}}{n^{12}}$. 0, 0000004710874778818171503665

$- \frac{m^{14}}{n^{14}}$. 0, 0000000063866030837918522408

$+ \frac{m^{16}}{n^{16}}$. 0, 0000000000656596311497947230

$- \frac{m^{18}}{n^{18}}$. 0, 0000000000005294400200734620

$+ \frac{m^{20}}{n^{20}}$. 0, 0000000000000034377391790981

$- \frac{m^{22}}{n^{22}}$. 0, 0000000000000000183599165212

$+$

$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}.\ 0,00000000000000000000820675327$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}.\ 0,00000000000000000000000003115285$$

$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}.\ 0,00000000000000000000000010165$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}.\ 0,00000000000000000000000000026$$

Cum igitur ſufficiat Sinus & Coſinus angulorum ad 45° noſſe, fractio $\frac{m}{n}$ ſemper minor erit quam $\frac{1}{2}$, hincque etiam ob Poteſtates fractionis $\frac{m}{n}$, Series exhibitæ maxime convergent, ita ut plerumque aliquot tantum termini ſufficiant, præcipue, ſi Sinus & Coſinus non ad tot figuras deſiderentur.

135. Inventis Sinibus & Coſinibus inveniri quidem poſſunt Tangentes & Cotangentes, per analogias conſuetas, at quia in hujuſmodi ingentibus numeris multiplicatio & diviſio vehementer eſt moleſta, peculiari modo eas exprimere convenit. Erit ergo

$$tang.\, v = \frac{ſin.\, v}{coſ.\, v} = \frac{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3....7} + \&c.}{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.0....6} + \&c.}$$

$$\&\ cot.\, v = \frac{coſ.\, v}{ſin.\, v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3....6} + \&c.}{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3....7} + \&c.}$$

LIB. I. si jam sit Arcus $v = \frac{m}{n}\, 90^\circ$ erit eodem modo quo ante

$tang.\ A.\ \frac{m}{n}\, 90^\circ =$	$cot.\ A.\ \frac{m}{n}\, 90^\circ =$
$+ \frac{2mn}{nn-mm} \cdot 0,6366197723675$	$+ \frac{n}{m} \cdot 0,6366197723675$
$+ \frac{m}{n} \cdot 0,2975567820597$	$\frac{-4mn}{4nn-mm} \cdot 0,3183098861837$
$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,0186886502773$	$- \frac{m}{n} \cdot 0,2052888894145$
$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0018424752034$	$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,0065510747882$
$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0001975800714$	$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0003450292554$
$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0000216977245$	$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0000202791060$
$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000024011370$	$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0000012366527$
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000002664132$	$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000000764959$
$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000295864$	$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000047597$
$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000032867$	$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000002969$
$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000003651$	$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000185$
$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000405$	$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000011$
$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000045$	
$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000005$	

quarum Serierum ratio infra fusius exponetur.

136. Ex superioribus quidem constat, si cogniti fuerint omnium angulorum semirecto minorum Sinus & Cosinus, inde simul omnium angulorum majorum Sinus & Cosinus haberi. Verum si tantum angulorum 30° minorum habeantur Sinus

Sinus & Cosinus, ex iis, per solam additionem & subtractionem, omnium angulorum majorum Sinus & Cosinus inveniri possunt. Cum enim sit $\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$, erit, posito $y = 30^\circ$ ex (130) $\cos. z = \sin. (30 + z) + \sin. (30 - z)$; & $\sin. z = \cos. (30 - z) - \cos. (30 + z)$, ideoque ex Sinibus & Cosinibus angulorum z & $30 - z$, reperiuntur $\sin. (30 + z) = \cos. z - \sin. (30 - z)$ & $\cos. (30 + z) = \cos. (30 - z) - \sin. z$, unde Sinus & Cosinus angulorum a 30° ad 60°, hincque omnes majores definiuntur. CAP. VIII.

137. In Tangentibus & Cotangentibus simile subsidium usu venit. Cum enim sit $\text{tang.} (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a . \text{tang. } b}$, erit $\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang. } a . \text{tang. } a}$, & $\cot. 2a = \frac{\cot. a - \text{tang. } a}{2}$ unde ex Tangentibus & Cotangentibus Arcuum 30° minorum inveniuntur Cotangentes usque ad 60°.

Sit jam $a = 30 - b$ erit $2a = 60 - 2b$ & $\cot. 2a = \text{tang.} (30 + 2b)$; erit ergo $\text{tang.} (30 + 2b) = \frac{\cot. (30 - b) - \text{tang.} (30 - b)}{2}$, unde etiam Tangentes Arcuum 30° majorum obtinentur.

Secantes autem & Cosecantes ex Tangentibus per solam subtractionem inveniuntur; est enim $\text{cosec. } z = \cot. \frac{1}{2} z - \cot. z$, & hinc $\sec. z = \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} z) - \text{tang. } z$. Ex his ergo luculenter perspicitur, quomodo canones Sinuum construi potuerint.

138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus z infinite parvus, & sit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$; & $z = \frac{v}{i}$, unde $\sin. z = \frac{v}{i}$ & $\cos. z = 1$; his substitutis fit $\cos. v =$

(1 +

$$\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$; atque $fin.\, v =$

$$\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i-\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$ In Capite autem præcedente vidimus esse $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $cof.\, v =$

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \;\&\; fin.\, v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = cof.\, v + \sqrt{-1}.\, fin.\, v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = cof.\, v - \sqrt{-1}.\, fin.\, v$.

139. Sit jam in iisdem formulis §. 130. n numerus infinite parvus, seu $n = \frac{1}{i}$, existente i numero infinite magno, erit $cof.\, nz = cof.\, \frac{z}{i} = 1$ & $fin.\, nz = fin.\, \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; Arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ Sinus est ipsi æqualis, Cosinus vero $= 1$. His positis habebitur

$$1 = \frac{(cof.\, z+\sqrt{-1}.\, fin.\, z)^{\frac{1}{i}} + (cof.\, z-\sqrt{-1}.\, fin.\, z)^{\frac{1}{i}}}{2} \;\&$$

$$\frac{z}{i} = \frac{(cof.\, z+\sqrt{-1}.\, fin.\, z)^{\frac{1}{i}} - (cof.\, z-\sqrt{-1}.\, fin.\, z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$ Sumendis autem Logarithmis hyperbolicis supra (125) ostendimus esse $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$, seu $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}ly$, posito

pofito y loco $1+x$. Nunc igitur, pofito loco y, partim $cof.z+\sqrt{-1}.\,fin.\,z$ partim $cof.\,z-\sqrt{-1}.\,fin.\,z$, prodibit $1=$ CAP. VIII.

$$\frac{1+\frac{1}{i}l(cof.z+\sqrt{-1}.\,fin.\,z)+1+\frac{1}{i}l(cof.z-\sqrt{-1}.\,fin.z)}{2}$$

$=1$, ob Logarithmos evanefcentes; ita ut hinc nil fequatur. Altera vero æquatio pro Sinu fuppeditat:

$$\frac{z}{i}=\frac{\frac{1}{i}l(cof.z+\sqrt{-1}.\,fin.\,z)-\frac{1}{i}l(cof.z-\sqrt{-1}.\,fin.\,z)}{2\sqrt{-1}}$$

ideoque $z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{cof.\,z+\sqrt{-1}.\,fin.\,z}{cof.\,z-\sqrt{-1}.\,fin.\,z}$, unde patet quemadmodum Logarithmi imaginarii ad Arcus circulares revocentur.

140. Cum fit $\frac{fin.z}{cof.z}=tang.\,z$, Arcus z per fuam Tangentem ita exprimetur ut fit $z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{1+\sqrt{-1}.\,tang.z}{1-\sqrt{-1}.\,tang.z}$. Supra vero (§. 123) vidimus effe $l\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+$ &c.. Pofito ergo $x=\sqrt{-1}.\,tang.\,z$, fiet $z=\frac{tang.\,z}{1}-\frac{(tang.\,z)^3}{3}+\frac{(tang.\,z)^5}{5}-\frac{(tang.\,z)^7}{7}+$ &c.. Si ergo ponamus $tang.\,z=t$, ut fit z Arcus, cujus Tangens eft t, quem ita indicabimus *A. tang.* t, ideoque erit $z=A\,tang.\,t$. Cognita ergo Tangente t erit Arcus refpondens $z=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-$ &c.. Cum igitur, fi Tangens t æquetur Radio 1, fiat Arcus $z=$ Arcui 45° feu $z=\frac{\pi}{4}$, erit $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ &c., quæ eft Series a LEIBNITZIO primum producta, ad valorem Peripheriæ Circuli exprimendum.

141. Quo autem ex hujufmodi Serie longitudo Arcus Circuli

LIB. I. culi expedite definiri possit, perspicuum est pro Tangente t fractionem satis parvam substitui debere. Sic ope hujus Seriei facile reperietur longitudo Arcus z, cujus Tangens t æquetur $\frac{1}{10}$, foret enim iste Arcus $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} - \&c.$, cujus Seriei valor per approximationem non difficulter in fractione decimali exhiberetur. At vero ex tali Arcu cognito nihil pro longitudine totius Circumferentiæ concludere licebit, cum ratio, quam Arcus, cujus Tangens est $= \frac{1}{10}$, ad totam Peripheriam tenet, non sit assignabilis. Hanc ob rem ad Peripheriam indagandam, ejusmodi Arcus quæri debet, qui sit simul pars aliquota Peripheriæ, & cujus Tangens satis exigua commode exprimi queat. Ad hoc ergo institutum sumi solet Arcus $30°$. cujus Tangens est $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, quia minorum Arcuum cum Peripheria commensurabilium Tangentes nimis fiunt irrationales. Quare, ob Arcum $30° = \frac{\pi}{6}$, erit $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \&c.$, & $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \&c.$, cujus Seriei ope valor ipsius π ante exhibitus incredibili labore fuit determinatus.

142. Hic autem labor eo major est, quod primum singuli termini sint irrationales, tum vero quisque tantum, circiter, triplo sit minor quam præcedens. Huic itaque incommodo ita occurri poterit: sumatur Arcus $45°$ seu $\frac{\pi}{4}$ cujus valor, etsi per Seriem vix convergentem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$, exprimitur, tamen is retineatur, atque in duos Arcus a & b dispertiatur ut sit $a + b = \frac{\pi}{4} = 45°$. Cum igitur sit $tang.(a+b) = 1 = \frac{tang.\,a + tang.\,b}{1 - tang.\,a.\,tang.\,b}$ erit $1 - tang.a.\,tang.b =$

tang. a

$tang. a + tang. b$ & $tang. b = \frac{1 - tang. a}{1 + tang. a}$. Sit nunc $tang. a = \frac{1}{2}$, erit $tang. b = \frac{1}{3}$, hinc uterque Arcus a & b per Seriem rationalem multo magis, quam ſuperior, convergentem exprimetur, eorumque ſumma dabit valorem Arcus $\frac{\pi}{4}$; hinc itaque erit CAP. VIII.

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \&c. \\ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \&c. \end{array} \right\}$$

hoc ergo modo multo expeditius longitudo ſemicircumferentiæ π inveniri potuiſſet, quam quidem factum eſt ope Seriei ante commemoratæ.