Theorieën vanbinnen en vanbuiten

Albert Visser

Wijsbegeerte, Geesteswetenschappen, Universiteit Utrecht, Janskerkhof 13, 3512BL Utrecht

E-mail address: a.visser@uu.nl

HOOFDSTUK 1

Mogelijkheden

In het prachtige verhaal *Tranenthee* van Arnold Lobel, denkt Uil aan verdrietige dingen om over te huilen. Op deze manier maakt hij tranenthee. Hij denkt aan lepels die achter het fornuis zijn gevallen en die je nooit meer terugvindt, hij denkt aan liedjes die niemand meer kan zingen omdat niemand de woorden meer weet, hij denkt aan potloodjes die te klein zijn geworden om vast te houden ...

FIGUUR 1. Tranenthee

Wat Uil, in deze voorbeelden, droevig maakt, is het verlies van mogelijkheden. Met die potloodjes kon je eerder wel schrijven maar nu niet meer.

Als het verlies van mogelijkheden al zo droevig is, wat moeten we dan zeggen over het feit dat bepaalde mogelijkheden er nooit waren? Wat moeten we zeggen over gevallen waar mogelijkheden, in principe, zijn afgesloten? Zijn dat soort dingen niet nog veel droeviger? Niet *per se*.

In deze lezing zal ik het hebben over getallen die zo groot zijn dat ze met tellen niet bereikt kunnen worden. Ik zal het hebben over theorieën die voor eens en voor altijd niet van zichzelf kunnen weten of ze kloppen. Op deze manier vormen mogelijkheden en onmogelijkheden een belangrijk thema van deze lezing.

Ik zal betogen dat beperkingen van mogelijkheden in vele gevallen niet een reden tot droefenis zijn, maar juist tot grote vreugde. Die beperkingen leveren ons allerlei informatie. Die beperkingen zijn, als je ze op andere manier bekijkt, vaak juist een kracht.

In mijn lezing probeer ik een indruk te geven van sommige dingen die ik in het onderzoek gedaan heb. Omdat deze dingen redelijk complex zijn zal een boel van wat ik zeg een metaforisch karakter hebben. Ik zal bijvoorbeeld uitleggen dat theorieën ontzettend bescheiden en pretentieloze wezens zijn. Ook ga ik op heel vage manier aanduiden wat voor soort onderzoek ik na mijn pensioen denk te gaan doen.

Om een begin te maken, moet ik eerst iets zeggen over wat theorieën zijn.

HOOFDSTUK 2

Wat zijn Theorieën?

De notie *theorie* is oneindig rijk en enorm gevarieerd. Je kunt het ook negatief formuleren: de notie *theorie* is knap dubbelzinnig.

Ik zal het in deze lezing specifiek hebben over twee noties van theorie, of misschien moet ik ook zeggen over twee aspecten van wat een theorie is. Dit zijn *theorie als beperking op een ruimte van mogelijkheden* en *theorie als bewijssysteem.*

Theorieën hebben nog veel andere aspecten dan deze twee. Theorieën hebben bijvoorbeeld een sociale component. Op theorieën zijn praktijken gebaseerd. Over deze kanten van wat een theorie is zal ik verder geen woord zeggen. Dat betekent niet dat die andere aspecten niet interessant zijn en zelfs niet dat ik er niets over te zeggen heb. Het is gewoon een beperking die volgt uit de lengte van deze lezing en uit de richting van mijn onderzoek.

De eerste notie is *theorie als beperking op een ruimte van mogelijkheden.* Stel je voor. Sherlock Holmes heeft een theorie over wie de moord gepleegd heeft en over hoe dat gedaan is.

Holmes' Theorie
`Moran heeft de moord gepleegd op de avond van 25 april 1986 in Alfred Place nr. 2.`
`Moran en het slachtoffer waren op het moment van de moord de enigen die toen in huis waren.`
`Moran heeft het slachoffer met een hakmes gedood in de studeerkamer.`
`Moran is door de achterdeur gevlucht.`

Die theorie formuleert een beperking aan hoe de wereld geweest zou kunnen zijn. In alle mogelijke situaties die door de theorie worden toegelaten is Sebastian Moran de moordenaar. Maar, in de ene situatie, heeft hij een rode zakdoek in zijn zak, in een tweede situatie, een blauwe en, in een derde situatie, heeft hij helemaal geen zakdoek.

Holmes' theorie zwijgt stil over de zakdoekkwestie. Zij laat daarmee verschillende zakdoekscenario's toe. Holmes theorie laat echter niet toe dat Moriarty het slachtoffer gedood heeft en niet Moran.

Wat zijn nu precies de mogelijke situaties waar we het hier over hebben? Bij het begrijpen van Holmes' theorie zijn situaties primitieve dingen, een soort mogelijke brokjes werkelijkheid. In de wiskundige context nemen de mogelijkheden een heel speciale vorm aan: het zijn wiskundige structuren. We beschouwen dus wiskundige theorieën als beperkingen op wiskundige structuren. Structuren zijn eigenlijk niet echt mogelijkheden maar zijn eerder analoog aan mogelijkheden. Die analogie is echter zeer nuttig.

De tweede notie van theorie is *theorie als bewijssysteem*. Een theorie levert een basis om te redeneren over hoe de wereld er uit ziet. Een goed voorbeeld van een theorie is de Rekenkunde: uit deze theorie kunnen we afleiden dat $x + y = y + x$, in andere woorden, dat de optelling commutatief is.

Wat is een redeneer- of bewijssysteem? Dat kan heel precies beschreven worden. We kunnen een expliciete specificatie geven van de taal van het systeem. Ook kunnen we exact vertellen hoe bewijzen er uit zien.

We kunnen van alles bewijzen over bewijssystemen. Als bijvoorbeeld iets uit de stellingen van zo'n systeem volgt, dan volgt het daarmee ook uit de axioma's. Dat is een simpele stelling over bewijssystemen, maar er zijn ook veel complexere stellingen die ik hier verder niet zal noemen die veel informatie geven over het systeem.

De studie van wiskundige theorieën als beperking op structuren is de *Modeltheorie*. De studie van bewijssystemen is de *Bewijstheorie*. Mijn zeer gewaardeerde collega Rosalie Iemhoff doet Bewijstheorie. Mijn eigen onderzoek bevond zich altijd ergens in het schaduwgebied tussen Bewijstheorie en Modeltheorie. Ik gebruik methoden en resultaten van beide gebieden.

De Bewijstheorie levert niet alleen specifieke inzichten over bewijssystemen en bewijzen, maar geeft ons ook heel nieuwe manieren om over bewijssystemen en bewijzen te denken.

Het soort reflexiviteit dat we in de Bewijstheorie zien is typisch voor mijn vakgebied: we hebben theorieën die over theorieën gaan en we bewijzen stellingen over bewijzen.

HOOFDSTUK 3

Correctheid en Volledigheid

Is er een verband tussen theorieën als beperking van mogelijkheden en theorieën als bewijssysteem? Ja. Gelukkig valt het helder uit te leggen wat dat verband is.

Bij de notie van theorie als beperking op situaties hoort de notie van geldigheid. Een zin volgt uit een gegeven theorie dan en slechts dan als die zin waar is in elke mogelijke situatie die aan de theorie voldoet. We zeggen ook dat de zin een geldig gevolg is van de theorie.

Bijvoorbeeld, in Holmes' theorie verliet de moordenaar het pand door de achterdeur. Uit Holmes' theorie volgt dan dat Sebastian Moran zich over Tottenham Court Road uit de voeten gemaakt heeft, omdat de achterdeur van het pand op Tottenham Court Road uitkomt.

Hier is een wiskundig voorbeeld. In alle modellen van de Rekenkunde geldt dat $x + y = y + x$, met andere woorden, dat de optelling commutatief is. De commutativiteit van de optelling is daarmee een geldig principe van de Rekenkunde.

Een redeneersysteem voor een theorie als beperking op mogelijkheden is *correct* als alles wat we kunnen afleiden in het systeem ook daadwerkelijk uit de theorie volgt. Met andere woorden, een correct redeneersysteem leidt geen ongeldige stellingen af.

Bijvoorbeeld kunnen we de commutativiteit van de optelling in het gebruikelijke bewijssysteem van de rekenkunde afleiden —nog een heel gedoe overigens. Aangezien dat bewijssysteem correct is, vertelt deze afleidbaarheid ons dat het principe van de commutativiteit van de optelling een geldig gevolg is.

Theorieën zijn geformuleerd in een taal. De taal van de theorie van Sherlock Holmes is het Engels. Deze taal is een natuurlijke taal met *open-ended* karakter. De theorieën die ik bestudeer hebben daarentegen een precies gespecificeerde afgebakende kunstmatige taal. Dat betekent dat je bepaalde dingen in de taal van de theorie wel en andere weer niet kunt zeggen.

Bijvoorbeeld de rekenkunde kan prima zeggen dat er precies één even priemgetal is, maar moet ten enen male stilzwijgen over de vraag of gras groen is. De rekenkunde heeft woorden als ‘gras’ en ‘groen’ niet in haar taal.

Laten we nu een geldige zin uit de taal van een theorie beschouwen. Die zin is dus waar in alle situaties die de theorie toestaat. Is die zin nu ook bewijsbaar in het met de theorie geassocieerde bewijssysteem? Over het algemeen heb je geen garantie dat je, in een correct redeneersysteem, elke geldige bewering die je in de taal van het systeem kunt formuleren ook kunt afleiden.

Zouden we de vluchtweg van Moran uit de door Holmes uiteengezette theorie kunnen deduceren? Ik denk het niet. De informatie dat de achterdeur uitkomt op Tottenham Court Road is immers in de theorie niet expliciet gegeven. Misschien weet Sherlock niet eens op welke weg de achterdeur uitkomt —hoewel dat natuurlijk onwaarschijnlijk is. We hebben theorie-externe informatie nodig om deze conclusie te trekken.

Een redeneersysteem waarin je elke geldige uitspraak die in de taal van het systeem formuleerbaar is kunt afleiden heet *volledig*. Dit betekent dat het redeneersysteem de notie geldigheid volledig ‘vangt’.

De klasse van theorieën-als-beperking-op-structuren die ik bestudeer zijn de zogeheten eerste-orde theorieën met opsombare axioma-verzameling. Nu weten de meesten van jullie natuurlijk niet wat dat betekent, maar ik ga het ook niet uitleggen. Het is voor dit verhaal voldoende dat jullie vasthouden dat het hier gaat om een specifieke klasse van theorieën. Deze klasse is zo rijk dat, in zekere zin, elke wiskundige theorie gepresenteerd kan worden als een theorie uit deze klasse. Bijvoorbeeld de Rekenkunde en de Groepentheorie kunnen als eerste-orde theorieën opgevat worden.

Het mooie van de eerste-orde theorieën met opsombare axioma-verzameling is dat ze volledig zijn. Dat betekent dat we voor deze theorieën een volledig bewijssysteem kunnen vinden waarin alles wat geldig is ook bewijsbaar is.

Als we ons beperken tot eerste-orde predicatenlogica kunnen we theorieën-als-beperking en theorieën-als-redeneersysteem voor veel toepassingen door elkaar halen. Met andere woorden, we kunnen in het midden laten of we over een theorie-als-beperking-op-mogelijkeden of over een theorie-als-bewijssysteem spreken. Dat is plezierig, maar ook gevaarlijk omdat het makkelijk is te vergeten dat het verwarren van de noties alleen maar is toegestaan voor een heel specifieke klasse van theorieën.

De stelling die zegt dat voor de eerste-orde theorieën met opsombare axiomaverzameling bewijsbaarheid en geldigheid samenvallen heet de Volledigheidsstelling. Het is één van de meest fundamentele stellingen van de logica. De Volledigheidstelling werd in 1929 bewezen door Kurt Gödel die toen 23 jaar oud was.

Van alle wetenschappers, hebben de ideeën van Kurt Gödel in mijn onderzoek het meest centraal gestaan. We gaan straks nog meer over hem horen.

FIGUUR 1. Kurt Gödel, 1906–1978

HOOFDSTUK 4

Grote Getallen

De Volledigheidsstelling voor de eerste-orde predicatenlogica is, zou je op het eerste gezicht zeggen, een sterkte. De eerste-orde predikatenlogica doet wat het belooft. Wat überhaupt geldig is en formuleerbaar, dat kun je ook afleiden.

Gek genoeg volgt uit die Volledigheidsstelling ook een beperking van deze logica. Theorieën in de eerste-orde predicatenlogica zijn fundamenteel niet in staat om *eindigheid* te karakterizeren. De eerste-orde predicatenlogica is, in politiek correct Amerikaans, *finitistically challenged*. Er is niets dat we in de taal van deze theorieën kunnen zeggen dat structuren van willekeurige eindige grootte toelaat en oneindige structuren uitsluit.

Wel gek, de beperking van eerste-orde theorieën waar we hier over spreken is dus een beperking op de mogelijkheden van een theorie om mogelijkheden te beperken. Hier zien we de reflexiviteit van de logica volop in actie.

De eerste-orde Rekenkunde is ook onderhevig aan deze beperking. De Rekenkunde is de theorie van de natuurlijke getallen 0,1,2,. . . . Zij kan dingen zeggen over getallen met hun typische bewerkingen als optellen en vermenigvuldigen. De Rekenkunde heeft geen weet van groen gras en oude jenever. Voor deze laatste zaken heeft zij geen uitdrukkingen.

Welke bewering je ook naïef bedenkt over getallen, je kunt hem in de Rekenkunde bewijzen of weerleggen. In de Rekenkunde kun je dingen bewijzen die de meeste mensen op de lagere school begrepen zoals de commutativiteit van de optelling $x + y = y + x$. Maar je kunt ook meer geavanceerde zaken bewijzen zoals het bestaan van oneindig veel priemgetallen en het feit dat elk getal op unieke manier te schrijven is als product van priemgetallen.

Toch volgt uit de bovenstaande beperking dat al haar kracht de Rekenkunde niet baat: zij is gewoon niet in staat de eindige natuurlijke getallen te karakterizeren. Dit betekent dat de theorie altijd modellen zal hebben die getallen bevatten die niet echt eindig zijn. Deze getallen hebben verder alle denkbare eigenschappen die je aan natuurlijke getallen kunt toekennen. Sommige zijn even, sommige zijn priem, ze zijn allemaal op één manier in priemfactoren te ontbinden, enzovoorts. Het enige waarin ze van een eerlijk, echt eindig getal verschillen is dat je er met tellen niet bij kunt komen. Het zijn, zogezegd, oneindige eindige getallen. We noemen deze oneindige eindige getallen de non-standaard getallen.

Er zijn ook *honest to god* oneindige getallen. Die zijn heel anders dan de non-standaard getallen waar het hier over gaat. Zo hebben we bijvoorbeeld $\aleph_0$. Dit getal is het aantal eindige getallen. Het getal $\aleph_0$ gedraagt zich volkomen anders dan de natuurlijke getallen. Zo is bijvoorbeeld $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$. De non-standaard getallen daarentegen erven alle gewone eigenschappen van de eindige natuurlijke getallen. Omdat alle eindige natuurlijke getallen de eigenschap hebben dat $x \neq x + 1$, zullen alle non-standaard getallen ook ongelijk zijn aan hun opvolgers. De non-standaard getallen lijken dus veel meer op de eindige getallen dan het 'eerlijke' oneindige getal $\aleph_0$.

We vergeleken net de non-standaard getallen met $\aleph_0$. Het is ook instructief om de non-standaard getallen te vergelijken met hele grote eindige getallen.

Je hebt bijvoorbeeld een heel groot eindig getal dat *googol* heet. Google is vernoemd naar googol. Het verschil in spelling is te danken aan een foutje van Larry Page, de oprichter van Google.

Googol is 10^{100}, dat schrijf je als een één met honderd nullen erachter. Dus zo:

$$10000000000000000000000000000000000000000000000000\\00000000000000000000000000000000000000000000000000$$

Googol seconden is $3,16887646 \times 10^{92}$ jaar. De leeftijd van het universum is 1.382×10^{10} jaar. Veel korter dus. Het aantal protonen en neutronen en electronen in het waarneembare universum is 10^{80}. Het aantal fotonen is 10^{89}. Zelfs opgeteld is het aantal van deze deeltjes nog veel minder dan googol. Wat googol betreft stelt ons universum niet veel voor.

Googol lijkt enigszins op de vis Bahamut die beschreven wordt door Borges in zijn Boek van Denkbeeldige Wezens:

Toen hij dit zag, viel Isa flauw en toen hij bijkwam, sprak Allah tot hem in de geest: 'O Isa, heb je de vis gezien en de lengte en breedte ervan begrepen?' Hij antwoordde 'Bij uw eer en glorie, Heer, ik zag geen vis; er ging een grote stier langs me heen, waarvan de lengte een reis van drie dagen was, en ik weet niet wat voor soort stier dit is.' Toen sprak Allah, 'O Isa, wat gij gezien hebt en wat drie dagen nodig had om aan je voorbij te trekken, was alleen maar het hoofd van de vis; en weet dat ik elke dag veertig zulke vissen schep.'

En dan te bedenken dat er oneindig veel eindige getallen groter dan googol zijn.

Grappig dat googol in decimale notatie nog prima is uit te schrijven. Dat heeft iets te maken met de kracht van exponentiatie waar ik straks nog iets over zal zeggen.

Wiskundigen denken overigens over nog veel grotere eindige getallen. Bijvoorbeeld het grootst bekende priemgetal is $2^{74.207.281} - 1$. Dat is ongeveer $3.003764 \times 10^{22.338.618}$ en dat is weer gelijk aan $3.003764 \times 10^{22.338.518} \times$ googol. Wel even iets meer dan googol dus. En die meer dan 22 miljoen cijfers van de decimale notatie van dit priemgetal schrijf je niet zomaar even op: volgens de Volkskrant is dit anderhalf jaar lang van hun bijlage Sir Edmund geheel gevuld met cijfers.

In een bepaalde zin van *in principe* is het in principe onmogelijk tot googol te tellen. We hebben gewoon niet genoeg tijd om met tellen googol te bereiken, zelfs niet als we mochten doortellen tot *the big Crunch*. Toch beschouwen we googol nog als een eindig getal.

De ontelbaarheid van de non-standaard getallen behelst een hele fundamentele zin van *in principe*. Deze notie van *in principe* abstraheert van alle beperkingen van tijd, ruimte en energie. In dit hele fundamentele principe kunnen we wel tot googol tellen maar niet tot een non-standaard getal. De non-standaard getallen zijn dus nog onvoorstelbaar veel groter dan googol en ook dan het grootste nu bekende priemgetal.

Zijn nu die getallen die we met tellen niet kunnen bereiken, net als Uils onvindbare lepels achter het fornuis, een reden tot droefenis? Nee, gek genoeg, hebben die getallen groot theoretisch nut. Ze kunnen gebruikt worden om de fijnstructuur van het rekenkundig redeneren te bestuderen. Dit betekent dat we in veel gevallen heel precies kunnen bepalen wat wel en wat niet volgt uit zekere rekenkundige aannamen. Bijvoorbeeld welke conclusies berusten precies op de aanname dat exponentiatie, de functie die aan x de waarde 2^x toekent, altijd een waarde heeft?

Die inzichten in de fijnstructuur van redeneren hebben weer repercussies in het filosofisch debat. Zo blijken de non-standaard getallen heel nuttig te zijn bij het nadenken over de vraag wat waarheid is en, bijvoorbeeld, bij de evaluatie van een filosofische theorie die Deflationisme heet. Over waarheid en Deflationisme zal ik later nog wat meer zeggen.

Als je één deelt door een non-standaard getal krijg je een heel klein dingetje, een infinitesimaal. Infinitesimalen waren in de geschiedenis van de wiskunde problematische entiteiten. Berkeley, in *The Analyst* van 1734, noemde ze, met enig recht, *the ghosts of departed quantities*.

Aan de andere kant is denken met infinitesimalen een heel fijne en intuïtieve manier om analyse te doen. Ik denk zelfs dat iedereen die analyse doet stiekem denkt in termen van oneindig kleine verstoringen.

Via de niet-standaard getallen kunnen we een gefundeerde uitleg geven van wat infinitesimalen zijn. De infinitesimalen worden daarmee dus in zekere zin gerehabiliteerd. Abraham Robinson heeft in 1966, met behulp van de non-standaard getallen, de non-standaard analyse gecreëerd, een aanpak die je in staat stelt om foutloos met infinitesimalen te redeneren.

Ik heb jullie enige voordelen laten zien van het bestaan van niet-standaard getallen. Een vermeende zwakte verkeerde in een kracht. De relatie tussen eerste-orde theorieën en eindigheid vertoont een waarlijk Hegeliaanse progressie. We starten met een sterkte: de volledigheidsstelling. De eerste-orde logica doet wat zij belooft. Dit is de *these.* Dan slaat die sterkte om in een zwakte. De eerste-orde logica begrijpt ten enen male niet wat eindigheid is. *De antithese.* Die zwakte blijkt dan weer enorm nuttig: hij kan gebruikt worden om na te denken over de fijnstructuur van redeneren, zowel in de wiskunde als in de filosofie. *De synthese.*

Toen ik in Utrecht doctoraalstudent was volgde ik een prachtig college van Craig Smoryński over non-standaard getallen. Het was een enorm inspirerende ervaring, vooral omdat Craig sprak over dingen waar hij zelf onderzoek over deed. Het gele plaatje is de omslag die ik toen voor zijn handgeschreven college gemaakt heb. Non-standaard getallen spelen in mijn werk een belangrijke rol, bijvoorbeeld in het recente werk met Ali Enayat over non-standaard waarheid.

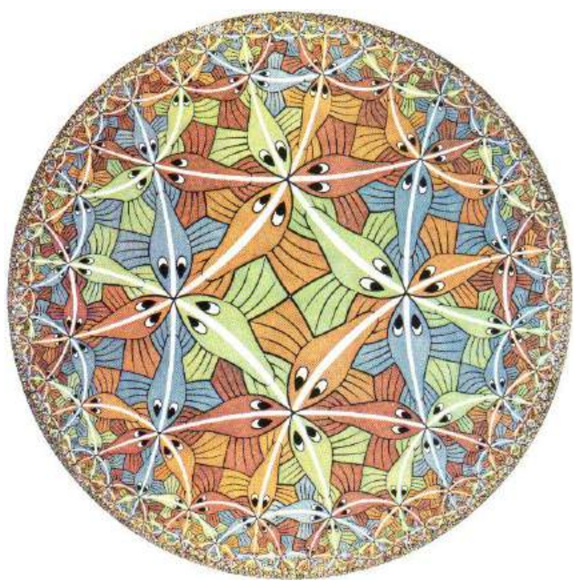
We verlaten nu het onderwerp van de oneindige eindigheid en gaan nadenken over het vergelijken van theorieën.

HOOFDSTUK 5

De Eend die in een Haas zit

Hoe kunnen we theorieën vergelijken? Het blijkt dat de ene theorie de andere theorie in zekere zin kan bevatten.

Eén voorbeeld van dit verschijnsel is de verhouding tussen Verzamelingenleer en Rekenkunde. De Verzamelingenleer gaat over verzamelingen en de Rekenkunde gaat over getallen. De Rekenkunde kan naar de Verzamelingenleer vertaald worden doordat we getallen kunnen nabootsen of simuleren door verzamelingen. Bepaalde verzamelingen kunnen poseren als getallen. Zo kan bijvoorbeeld de lege verzameling net doen of hij het getal nul is.



FIGUUR 1. Het Hyperbolische Vlak getekend door M.C. Escher

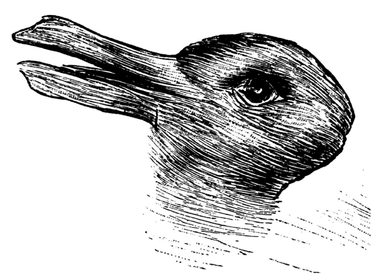
Een tweede voorbeeld van een theorie die in een andere verstopt zit is de Hyperbolische Meetkunde. Dat is een alternatieve meetkunde waar door een gegeven punt meerdere lijnen gaan die parallel zijn aan een gegeven lijn. Deze meetkunde werd onafhankelijk ontdekt door János Bolyai en Nikolai Ivanovich Lobachevski. Zij werd ook ontdekt door

Carl Friedrich Gauß, hoewel we deze ontdekking volgens de spelregels niet aan Gauß mogen toekennen. Gauß heeft zijn bevindingen namelijk niet gepubliceerd uit angst voor "das Geschrei der Böotier", zoals hij schreef in een brief aan Bessel in 1829. 'Böotier' betekent hier zoveel als ongeletterde barbaren.

De Hyperbolische meetkunde blijkt verscholen te zitten in de Euclidische Meetkunde. Het twee-dimensionale Euclidische plaatje door Escher van het hyperbolische vlak gevuld met allemaal gelijkvormige vissen illustreert aanschouwelijk hoe dat werkt.

Theorieën kunnen dus andere theorieën als patroon bevatten. In de gegeven theorie kunnen we de andere theorie nadoen of simuleren. De andere theorie zit op deze manier verstopt in de gegeven theorie. We zeggen in dit geval dat de ene theorie de andere theorie *interpreteert*.

Het verschijnsel waar we hier naar kijken heeft een zekere analogie met de eend die verstopt zit in het plaatje van een haas.



Figuur 2. Eend-in-Haas en Haas-in-Eend

In de eend-in-haas analogie zit de haas natuurlijk ook verstopt in de eend, maar ik kon zo gauw geen éénzijdig zoekplaatje vinden. Er zijn overigens vele paren van theorieën waar de één in de ander en de ander in de één verstopt zit. Dat geldt bijvoorbeeld voor de Euclidische en de hyperbolische vlakke meetkunde.

Het zou prachtig zijn een Escher plaatje te geven van de Euclidische meetkunde in de hyperbolische. Misschien zouden eerst de hyperbolische meetkunde moeten afbeelden in de Euclidische zoals in het plaatje met de vissen en dan de Euclidische meetkunde daar weer in. Helaas, de fantasie ontbreekt me om te zien hoe dat zou moeten.

Heen-en-weer in elkaar interpreteerbare theorieën zijn in zekere zin hetzelfde. Voor zulke paren werkt de eend-haas analogie dus heel mooi.

Het vergelijken van theorieën is één van de kernpunten van mijn onderzoek. Later zal ik daar nog wat meer over zeggen.

HOOFDSTUK 6

De Tweede Onvolledigheidsstelling

De Tweede Onvolledigheidsstelling heeft steeds centraal gestaan in mijn onderzoek. Deze stelling formuleert een fundamentele beperking aan theorieën. Laat ik eerst nog iets zeggen over beperkingen.

Fundamentele beperkingen zijn rare dingen. Zijn het wel echt beperkingen? Zijn onmogelijke mogelijkheden wel mogelijkheden? Wij kunnen bijvoorbeeld hier en nu niet in de Aula het Utrecht Psalter in zijn fysieke vorm vinden. Gewoon omdat het Psalter hier niet is. Maar is de onvindbaarheid van een afwezig ding nu wel echt een beperking?

Misschien wel als we een brandende behoefte hebben om het Psalter hier en nu te raadplegen. Beperkingen zijn, wellicht, geen absolute dingen maar bestaan alleen in contrast tot een behoefte.

FIGUUR 1. Het Utrecht Psalter

De twee Onvolledigheidsstellingen van Gödel staan traditioneel bekend als fundamentele onmogelijkheidsresultaten voor bewijssystemen. Gödel bewees deze resultaten in 1930. Ik bespreek hier alleen de Tweede Onvolledigheidsstelling. Deze stelling zegt ruwweg dat een theorie als deductiesysteem niet kan inzien dat ze klopt. Ik ga dat zo verder uitleggen.

Er is inderdaad behoefte aan theorieën die wel kunnen inzien dat ze kloppen. Immers we zouden graag een alomvattende theorie kunnen vinden. Het inzicht dat deze theorie klopt zou vanzelfsprekend deel van de theorie zelf moeten zijn. Helaas is zo'n theorie er dus niet.

Om de stelling te begrijpen moet ik eerst zeggen wat het betekent dat een theorie consistent is. Een theorie is consistent als die theorie vrij is van tegenspraak. Als een theorie een tegenspraak kan afleiden kan hij in de klassieke logica alles afleiden. *Ex falso sequitur quodlibet*, zeiden de ouden reeds en daar houd ik mij aan. Bertrand Russell illustreerde dit principe door uit $0 = 1$ af te leiden dat hij de paus was. *Stel* $0 = 1$. *Door aan beide kanten één op te tellen krijgen we* $1 = 2$. *De paus en ik zijn twee. Eén is twee. Dus de paus en ik zijn één. Ergo, ik ben de paus.*

De Tweede Onvolledigheidsstelling zegt dat een theorie-als-afleidingssysteem niet zijn eigen consistentie kan afleiden. Een theorie ontbeert daarmee dus het meest elementaire zelfinzicht in de eigen correctheid. Een theorie kan van zichzelf niet weten dat ze klopt.

De stelling zegt dat een reflexieve taak onmogelijk is. Het lijkt enigszins op het probleem zichzelf op de rug krabben. Het is veel makkelijker een ander op de rug te krabben dan om jezelf op de rug te krabben. Op dezelfde manier zijn er andere theorieën die wel de consistentie van onze gegeven theorie kunnen afleiden. In tegenstelling tot *I scratch your back if you scratch mine*, kunnen er echter niet twee consistente theorieën T en U zijn zodat T de consistentie van U afleidt en U de consistentie van T.

Een theorie T die de consistentie van een andere theorie U bewijst is, in een bepaalde zin, sterker dan theorie U. Het blijkt nog mooier te zijn. Als T de consistentie van U bewijst, dan zit U in T verstopt, maar zit niet andersom T in U verstopt. In meer technische termen: als T de consistentie van U bewijst, dan interpreteert de theorie T de theorie U maar niet vice versa.

Theorieën kunnen geordend worden naar sterkte. De Tweede Onvolledigheidsstelling laat zien dat je voor een consistente theorie altijd een sterkere consistente theorie kunt vinden.

We hebben hiermee al een positief gevolg van de Tweede Onvolledigheidsstelling gezien: het geeft ons een middel om te laten zien dat de ene theorie sterker is dan de andere. Hier hebben we weer een sterkte die volgt uit een zwakte.

Ik schets een toepassing van het idee dat een theorie die de consistentie van een andere theorie bewijst, daarmee ook sterker is dan de andere.

Consistentie is diep verbonden met waarheid. Er is een filosofische stroming, het zogeheten Deflationisme, waarvan de voornaamste leerstelling is dat waarheid een dunne, niet substantiële notie is. Waarheid is alleen een handige manier om dingen kort de zeggen. Bijvoorbeeld, *alles wat de paus zegt is waar* betekent alleen maar: de paus zegt dat het regent en het regent en de paus zegt dat gras groen is en gras is groen en de paus zegt dat oude jenever lekker is en oude jenever is ook echt lekker ... Nog anders gezegd: waarheid is een notie die we in principe kunnen missen en die alleen dient als middel om ons dingen vlotter te laten zeggen.

Anders dan de Deflationisten, geloof ik dat waarheid een dikke vette substantiële notie is: een centrale notie van de filosofie. Het feit dat waarheid dik en vet is blijkt als volgt. Stel dat we aan een theorie een waarheidspredicaat toevoegen. Als we dat op een geschikte manier doen, dan kan de resulterende theorie de consistentie van de oorspronkelijke theorie bewijzen. Ruwweg volgt dit door te bewijzen dat wat in de oorspronkelijke theorie bewijsbaar is, ook waar is. Waarheid maakt theorieën dus sterker. Waarheid is de spinazie voor theorieën. De Tweede Onvolledigheidsstelling helpt ons om dat in te zien.

FIGUUR 2. Waarheid

We kunnen waarheid op verschillende manieren toevoegen aan theorieën. Als je dit op een verdunde manier doet kun je je afvragen of de theorie nog steeds sterker wordt. Er blijft helaas nog één heel minimale manier om waarheid toe te voegen, waarvoor ik niet kan bewijzen dat de theorie er sterker door wordt. *Voor de specialisten: wat gebeurt er als we de* T*-zinnen toevoegen aan een eindige geaxiomatizeerde sequentiële theorie?* Ik noem dit probleem *the last stand of Deflationism.*

Ali Enayat wees mij op deze vraag. De Tweede Onvolledigheidsstelling lijkt niet te helpen om de vraag te beantwoorden. Het is om gek van te worden. Als mensen me de laatste tijd met een wazige blik zagen rondlopen, of als ik in conversaties niet passende antwoorden gaf, dan kwam het waarschijnlijk door het denken over dit probleem.

In zijn gebruikelijke formulering lijkt de Tweede Onvolledigheidsstelling een gebrek van theorieën. We kunnen er echter ook anders tegen aan kijken. Aan Solomon Feferman, die ik als één van mijn leermeesters beschouw, danken we het volgende inzicht.

Figuur 3. Sol Feferman, geboren 1928

Bezie een consistente theorie T. Zij U de uitbreiding van T met de uitspraak dat T inconsistent is. Feferman laat zien dat in de theorie T de theorie U verstopt zit. Met andere woorden, T interpreteert T plus de inconsistentie uitspraak van T. Een theorie houdt het daarmee expliciet voor mogelijk dat zij inconsistent is.

Feferman's resultaat laat zien dat de onvolledigheidsstelling niet een gebrek is, maar berust op gezond kritisch zelf-begrip van theorieën. Theorieën geven ruiterlijk toe: ik kan het mis hebben. Feferman ontdekte hiermee dat de onbewijsbaarheid van de eigen consistentie berust op de natuurlijke bescheidenheid van theorieën. Theorieën weten heel goed dat ze niet op hun eigen rug kunnen krabben.

Een laatste opmerking: De Tweede Onvolledigheidsstelling heeft iets te maken met het feit dat eerste-orde theorieën niet kunnen zeggen wat eindig is. We namen steeds aan dat we een consistente theorie aan het bekijken waren. Er is daarmee geen echt eindig bewijs van een tegenspraak uit deze theorie. De theorie zelf kan echter niet uitsluiten dat er wellicht een niet-standaard bewijs van een tegenspraak kan zijn. Een bewijs dat zo groot is dat wij het ook in het allerprincipiëelste principe nooit zouden kunnen opschrijven.

HOOFDSTUK 7

Antropomorf Denken

In het voorgaande heb ik onbeschaamd gesproken over zelf-inzicht van formele theorieën. Theorieën praten over zichzelf; theorieën zijn bescheiden, enzovoorts. Maar is dat eigenlijk geen onzin? Een formeel systeem is een abstract object. Het is niet in tijd en ruimte. Het denkt niet, het heeft geen behoeften, geen intenties, enzovoorts. Het staat veel verder van ons af dan een dier en bij dieren moeten we al oppassen voor antropomorf denken.

Wittgenstein zegt het zo mooi: *Wenn der Löwe sprechen könnte, wir könnten ihn nicht verstehen.*

FIGUUR 1. Zegt de leeuw: "Lekker."

Nu denk ik, zoals het plaatje aanduidt, dat we best wel wat van die leeuw kunnen begrijpen. Zo geweldig diep verschilt onze levensvorm niet van die van de leeuw.

Formele redeneersystemen zijn weliswaar abstracte dingen, maar ze zijn ook een afspiegeling of codificatie van ons eigen denken. Ze zijn wel abstract maar hun begrijpelijkheid is zogezegd ingeprogrammeerd. Waarom zouden we ze niet kunnen behandelen als een soort actoren? Als we dat doen kijken we als het ware in een spiegel.

Heel lang heb ik gedacht dat allerlei praat over de reflexiviteit van arithmetische talen en over zelfreferentie in de rekenkunde alleen maar heuristische metafoor was. Een comfortabel standpunt, hoewel bij nader inzien, ook de effectiviteit van een heuristische metafoor enige verklaring behoeft.

Kort geleden ben ik samen met Volker Halbach gaan nadenken over zaken als zelfreferentie in de rekenkunde. Het resultaat van dit denken zijn twee lange, lange artikelen in de Review of Symbolic Logic die van begin tot eind vol staan met heel erg niet-definitieve overwegingen.

Als ik nu heel eerlijk ben weet ik het niet zeker. Misschien zijn die reflexieve theorieën wel alleen heuristische metafoor, maar misschien is er toch meer aan de hand. Ik hoop dat toekomstig nadenken in dialoog met Volker hierover meer helderheid gaat verschaffen.

HOOFDSTUK 8

Theorie als Verhaal

Mijn werk gaat over theorieën in het meervoud. Theorieën worden hier zelf tot object van studie. We kijken als het ware van buiten tegen theorieën aan en zitten er niet in.

Echter er zijn ook specifieke theorieën waar ik veel onderzoek naar gedaan heb. Dit zijn bijvoorbeeld Peano Rekenkunde, Heyting Rekenkunde, Elementaire Rekenkunde en Buss' theorie S^1_2. Deze theorieën zijn een beetje gaan aanvoelen als oude vrienden. Ik heb niet alleen dingen over deze theorieën bewezen, ik heb ook *in* deze theorieën gewerkt. Ik heb ze aan de binnenkant meegemaakt.

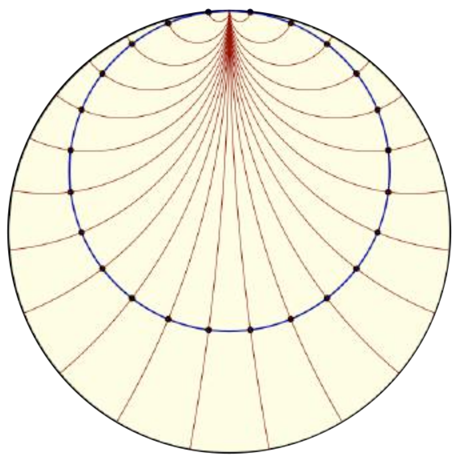
Dit brengt ons tot het perspectief van theorie als verhaal, het perspectief van een theorie als iets dat een wereld voor je opent, zoals een verhaal je introduceert tot de wereld van het verhaal.

Die ervaring van de theorie als verhaal wordt mooi uitgedrukt door János Bolyai. Die zei over zijn ontdekking van de hyperbolische meetkunde: *Uit het niets heb ik een vreemd nieuw universum gecreëerd.* Het interessante is dat Bolyai dat zei voor de ontdekking van modellen van de hyperbolische meetkunde. Zijn uitspraak drukt een manier van zich verhouden tot de theorie uit.

Maar hoe kan een wiskundige theorie iets als een verhaalwereld presenteren? De inhoud van zo'n theorie kan toch alleen een statisch en onveranderlijk universum zijn? Als er al een wereld is, dan is die zo dood als een pier. Misschien, maar onze geest beweegt zich door dat universum, we vinden er paden en aanschouwen er steeds nieuwe vergezichten. Soms ontmoeten we obstakels en komen niet verder.

Maar anders dan een model, laat een theorie toch allerlei details oningevuld? Denk aan de zakdoeken van Sebastian Moran. Inderdaad, maar dat is hetzelfde met een verhaal. We weten toch ook niet wat voor sokken Roodkapje aan had?

Het werken in een theorie of, zo u wilt, in de wereld van een theorie, brengt vaak verrassingen met zich mee. De wereld van de theorie bevat zaken die we er naar ons gevoel niet in gestopt hebben. Als je in de Euclidische meetkunde de straal van een cirkel groter en groter maakt, dan nadert de omtrek van de cirkel naar een rechte lijn. Als je hetzelfde in de hyperbolische meetkunde doet dan nadert de omtrek in de limiet naar een heel andere curve: *de horocycle*. Deze curve speelt een fundamentele rol in het werk van Bolyai en Lobatchevski. Mijn punt is hier: de horocycle overkomt ons. Hij is niet door ons gemaakt maar een verrassende bewoner van het hyperbolisch universum.



FIGUUR 1. Horocycle

Deze ervaring dat wat aan de binnenkant van het verhaal zit niet onze keuze is, is een belangrijke intuïtieve bron van het mathematisch Platonisme, de these dat mathematische objecten echt onafhankelijk van ons bestaan. Mijn lezing gaat niet over het mathematisch Platonisme, maar ik denk in ieder geval dat we met zo'n intuïtieve bron serieus moeten omgaan.

In theorieën als Heyting Rekenkunde en S^1_2 zijn er een aantal dingen die niet mogen en die in de gewone wereld wel mogen. In S^1_2 is machtsverheffen bijvoorbeeld niet per se altijd gedefinieerd. Er zijn getallen x die zo groot zijn dat je er niet van uit mag gaan dat 2^x een waarde heeft. Eigenlijk best realistisch omdat met machtverheffen de grootte van getallen gillend uit de klauw kan lopen. Een gevolg van het feit dat machtsverheffen niet altijd werkt, is dat decimale notaties zo lang kunnen zijn dat ze geen waarde hebben. Denk er maar eens aan hoe makkelijk het was googol decimaal op te schrijven terwijl ons hele universum vergeleken met googol maar een klein pieteltje bleek te zijn. Naja, honderd is, ook voor S^1_2, zo klein dat googol, dat is 10^{100}, nog wel bestaat. De problemen met machtsverheffen krijg je alleen met non-standaard grote getallen.

In theorieën als Heyting Rekenkunde en S^1_2 leggen we onszelf beperkingen op en kijken of we vertrouwde dingen kunnen doen ook met die beperkingen. Als dat kan dan levert dit vaak betere manieren om die vertrouwde dingen te doen. Het feit dat we iets kunnen klaarspelen onder beperkingen geeft in veel gevallen extra informatie.

Figuur 2. In 2006 brak ik mijn pols

In 2006 brak ik mijn pols en heb toen geleerd hoe je sokken met één hand kunt aantrekken. Werken in de hierboven beschreven theorieën voelt zo aan. Te ontdekken hoe iets moet in een beperkte context, is vaak spannend en zeker erg bevredigend.

Hier hebben we een voorbeeld waar we er bewust voor kiezen van mogelijkheden af te zien. In dit voorbeeld is het lonend om dat te doen.

Een andere metafoor voor het werken in zwakke theorieën is een survivaltocht of camperen, waar we ook doelbewust van allerlei moderne gemakken afzien. Bij kamperen koken we zonder fornuis, in S^1_2 rekenen we zonder exponentiatie.

HOOFDSTUK 9

De Toekomst

Het is tijd deze lezing af te ronden. Daarom zeg ik nog kort iets over mijn visie op de toekomst.

Leven is een voordurend verlies van mogelijkheden. Nu is er nog dit-en-dat en zus-en-zo mogelijk, maar over een jaar is de teerling geworpen en is misschien dit-en-dat gerealizeerd maar zijn daarmee de mogelijkheden zus-en-zo verdampt. Zo is leven als het voortdurende verlies van haar … en dat haar groeit nooit meer aan. Deze vorm van verlies van mogelijkheden is de reden dat ik zo'n hekel heb aan datumbriefjes: de voortdurende *collapse of the wavefunction* is onvermijdelijk, maar je wilt er niet van te voren al aan herinnerd worden. Schrödingers kat wil niet weten dat de doos straks wordt geopend.

Vanuit dit standpunt is er natuurlijk alleen maar verlies van mogelijkheden mogelijk en kun je geen nieuwe mogelijkheden verwerven. Een beter hulpmiddel voor de productie van tranensoep lijkt me nauwelijks denkbaar. Aan de andere kant is dat voortdurend verlies aan mogelijkheden natuurlijk vreemd. Bij nadere analyse berust dit vreemde inzicht dan ook op een heel bepaalde interpretatie van wat verlies van mogelijkheden is. Je kunt er ook anders tegen aan kijken.

Uils potloodjes verloren de mogelijkheid als schrijfmateriaal te dienen. Dat betekent dat ze vroeger wel en nu niet schrijfmateriaal konden zijn. Maar er kunnen ook mogelijkheden gewonnen worden. Die kleine potloodjes kunnen misschien prima gebruikt worden als pionnen in een zelfgemaakt halmaspel. Toen de potloden nog lang waren bestond deze mogelijkheid nog niet.

Als we zo denken als over Uils potloodjes kunnen mogelijkheden verloren gaan maar ook ontstaan. Dat brengt ons als vanzelf op de vraag wat voor mogelijkheden ik zie voor het onderzoek in de toekomst en, meer persoonlijk, wat ik zelf wil gaan doen.

Het zou natuurlijk mooi zijn een schitterend beeld neer te zetten van de toekomst van het vak en van het soort onderzoek dat ik doe. Helaas, mijn geest werkt helemaal niet op die manier. Wat zich in mijn hoofd bevindt, is eerder een grote wazige wolk met ideeën en verbanden. Ik zie in die wolk wel ongeveer waar het naar toe moet, maar de artikulatie van die richting manifesteert zich pas wanneer ik het desbetreffende onderzoek ook daadwerkelijk doe. Bij onderzoek speelt *serendipity*, de verrassende ontmoeting met de dingen, een wezenlijke rol. Ik speel op het strand en vind schelpen. Het specifieke vermogen dat ik heb is om af en toe een bijzondere schelp te herkennen.

Laat ik dan maar met enige grote gebaren een paar van de contouren van de vage wolk schetsen.

Wat ik zoek is een abstractere manier van naar theorieën kijken. We willen weg van allerlei onnozele implementatie details en het meer wezenlijke van een theorie vangen. Denk eens aan Horatio Caine van CSI Miami. Horatio is prima in staat een theorie in woorden uiteen te zetten. Maar wat hij ook kan doen is precies dezelfde theorie neerzetten met computerbeelden, animaties en gebaren.

Wij denken moeiteloos over de verschillende presentaties als presentaties van dezelfde theorie, maar de theoretische articulatie van dit soort identificaties is veel moeilijker dan je denkt. Het idee waar ik over nadacht en nadenk is dat twee theorieën als hetzelfde beschouwd kunnen worden als ze op een geschikte manier als eend en haas in elkaar herkend kunnen worden.

De meer abstracte manier van kijken zal ons hopelijk in staat stellen vertrouwde theorieën met geheel nieuwe ogen te zien. Wat maakt bijvoorbeeld een theorie als Peano Rekenkunde zo natuurlijk? Dat is niet makkelijk te zien aan een concrete implementatie. Wellicht zal een nieuw, hoger standpunt er een ander licht op laten schijnen.

De abstracte manier van kijken staat in directe interactie met een andere problematiek. Wat is de juiste manier om theorieën te vergelijken? En, gegeven dat we zo'n manier gekozen hebben, wat zijn geschikte methodieken om de sterkte van een gegeven theorie te meten? We hebben gezien dat de Tweede Onvolledigheidsstelling hierbij helpt, maar ik gaf ook al een voorbeeld waar dit soort technieken niet werken. Dat was het probleem dat ik *the last stand of Deflationism* noemde. We moeten dus met iets beters komen, maar wat?

De studie van waarheid als een manier om theorieën sterker te maken is een integraal onderdeel van het door mij gedroomde onderzoek naar de sterkte van theorieën. We willen in detail begrijpen hoe het toevoegen van een middel als het waarheidsbegrip aan een theorie iets extra's doet, hoe het de theorie sterker maakt. Hoe precies is waarheid in staat haar rol als spinazie van theorieën waar te maken?

We komen nu aan het meer persoonlijke deel. Wat ga ik doen?

Het pensioen leidt tot verlies van mogelijkheden. Ik kan straks niet meer leiding geven aan de geweldige groep mensen die TF heet. Dat voelt wel vreemd en stemt tot weemoed. Aan de andere kant krijg ik meer tijd. Die tijd creëert nieuwe mogelijkheden, bijvoorbeeld om een aantal grotere projecten waar ik al mee bezig ben af te maken. Bovendien hoop ik de mogelijkheid te vinden collegas in mooie steden als Gothenburg en Oxford te bezoeken om samen te werken.

Ik hoop zeker nog bij het onderwijs betrokken te blijven bijvoorbeeld door gastcolleges te geven aan onze fantastische Research Master Studenten. Door de jaren heen zijn deze studenten een grote vreugde voor me geweest. Ook hoop ik betrokken te blijven bij scriptiebegeleiding, Het *Ius Promovendi* houd ik nog vijf jaar en ik denk daar beslist nog gebruik van te maken. In ieder geval komen er binnenkort twee prachtige promoties aan: die van Antje Rumberg en die van Paula Henk.

HOOFDSTUK 10

Bedankt

Helaas zijn er veel te veel mensen om te bedanken. Ook denk ik dat degenen die ik wil danken, al weten dat ik ze dankbaar ben voor alles wat ze voor me betekend hebben. Daarom zal ik hier meer een generiek dankwoord uitspreken zonder namen.

Faculteit, Department, School, Onderzoeksinstituut zijn steeds een thuis voor mij geweest. Dat is voor een belangrijk deel te danken aan bestuurders die toegankelijk waren, advies vroegen, luisterden. Dank daarvoor.

De collegas van het departement zorgden voor een goede open sfeer. Ik heb in de loop van de tijd een opmerkelijke groep zeer gevarieerde karakters leren kennen. *Never a dull moment.* Ik vond de fusie met Religiewetenschappen wel even spannend, maar deze heeft naar mijn gevoel vooral interessante en leuke mensen toegevoegd aan de directe leefomgeving. Dank aan jullie allen dat jullie zijn zoals jullie zijn.

Natuurlijk dank aan mijn bijzondere disciplinegroep. De vele gesprekken met jullie, de vele dingen die we samen gedaan hebben, waren van onschatbare waarde. We hadden een goede tijd samen.

Ik ben bijzondere dank verschuldigd aan ons geweldige secretariaat en ambtelijke ondersteuning. Ik heb het steeds als een eer ervaren met jullie te mogen werken. Jullie waren in veel gevallen pro-actief. Als ik iets vergat te doen —niet geheel een theoretische mogelijkheid— kreeg ik vaak van verschillende kanten bezorgde e-mails van jullie om me aan de gewenste handeling te herinneren. Dank voor alles.

Tenslotte dank aan de studenten. Er is niet mooiers dan het onderwijs aan jonge mensen die iets van hun leven willen maken, jonge mensen met een commitment aan het vergroten van hun filosofisch begrip en van hun vaardigheid in de logica. Ik heb natuurlijk veel gezucht over het nakijken van grote stapels tentamens, maar dat doet niets af van de vreugde die ik had aan het volgen van jullie voortgang.

Het lijkt wel of de werkdruk in Academia steeds groter wordt. Het academische leven wordt steeds hectischer. Daarom wil ik afsluiten met een wens. Ik hoop dat jullie ook punten van rust en ontspanning zullen blijven vinden in het werk. Neem het niet altijd zo serieus. Er moet ook nog wat Arcadia in Academia blijven. Het orgel, bespeeld door Jaap Jan Steensma, zal zo, bij het weggaan, mijn wens verklanken.

Ik heb gezegd.